Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 255–262

Laiko eilučių agregavimo, deagregavimo uždaviniai ir tolima priklausomybė

Dmitrij CELOV, Remigijus LEIPUS (VU)
el. paštas: dcelov@ktl.mii.lt, remigijus.leipus@maf.vu.lt

1. Įvadas: agregavimo ir deagregavimo uždavinių apžvalga

Ekonometriniuose (ypač makroekonometriniuose) uždaviniuose labai dažnai tyrimo objektas yra laiko (dinaminės) eilutės. Suprantama, kad, norint kuo pilniau išnaudoti turimą informaciją apie rodiklių kaitą, būtina gerai suprasti nagrinėjamų duomenų prigimtį, ištirti jų savybes, palyginti su anksčiau, prie kitų prielaidų, daryta laiko eilučių analize. Specifiniai taikomieji uždaviniai atsiranda, sprendžiant hidrologijos, makroekonomikos, astronomijos, sociologijos uždavinius. Šias mokslo šakas jungiančia savybe galima išskirti didelio kiekio individualių (idiosinkratinių) procesų agregavimą. Dažnai, kaip ir šiame straipsnyje, nagrinėjamas agreguotas procesas gautas iš begalinio skaičiaus individualių modelių. Paminėtina, kad literatūroje tiriamas ir fiksuoto kiekio sumavimas, bei tarplaikinis agregavimas, kurie savo savybėmis skiriasi nuo aptariamų šiame straipsnyje modelių.

Tiesioginis agregavimo uždavinys iškyla mikrolygio elgsenos (idiosinkratinėse) lygtyse

$$y_{it} = f_{it}(x_{it}, u_{it}, \theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N,\ t = 1, 2, \dots, T,$$

esant duomenų heteroskedastiškumo šaltiniams: veiksnių (x_{it}) bei inovacijų (u_{it}) įvestyse, parametruose (θ_i) arba funkcinėje formoje (f_{it}). Agregavimas šiame kontekste suprantamas kaip paprastas nurodytų laiko eilučių y_{it} sumavimas. Skirtingi reikalavimai ribiniam procesui kai $N \to \infty$ duoda tris pagrindinius agreguoto proceso apibrėžimus (žr. Pesaran (1999)): 1) *griežtasis* arba *deterministinis* – kuomet agregavimo funkcija bet kuriai realizacijai tiksliai atitinka agregavimo rezultatą, kitaip sakant $\|F(X_t, U_t, \theta_a) - N^{-1}\sum_{i=1}^N f_{it}(x_{it}, u_{it}, \theta_i)\| = 0$, čia $X_t = N^{-1}\sum_{i=1}^N x_{it}$, $U_t = N^{-1}\sum_{i=1}^N u_{it}$, o $\|a - b\|$ yra atitinkamas atstumo tarp a ir b matas (pvz. $\|a - b\| = (a - b)^2$); taip yra, pavyzdžiui, kai a priori žinomas tikrasis idiosinkratinio proceso parametrų skirstinys; 2) *stochastinis*, kai pastaroji lygybė galioja vidurkio prasme; 3) *silpnasis* arba *optimalios prognozės*, kuomet pakanka, kad bet kuriai realizacijai agregavimo funkcija minimizuotų atstumą (sąlyginio vidurkio prasme) iki agreguojamų procesų vidurkio. Pirmasis ir antrasis reikalavimai yra gana griežti ir retai sutinkami taikomojoje ekonominėje analizėje. Trečiasis būdas reikalauja mažiausiai pradinės informacijos ir gana dažnai taikomas praktikoje.

Naujas susidomėjimo agregavimo problematika etapas prasidėjo Robinson'o (1978) bei Granger'io (1980) darbais, kuriuose buvo parodyta, kad pirmos eilės autoregresijos (žymėsime AR(1)) modelių su atsitiktiniu parametru agregavimas (kai $N \to \infty$) gali generuoti tolimos priklausomybės Gauso stacionarų procesą. Vėliau ši agregavimo schema buvo apibendrinta tiek diskretaus laiko atveju (Oppenheim ir Viano (2004), Zaffaroni (2004) bei kiti darbai) tiek ir tolydaus laiko atveju (Anh ir kt. (2004), Barndorff–Nielsen (2001), Oppenheim ir Viano (2004)).

Nemažiau įdomus ir atvirkštinis uždavinys – kada tolimos priklausomybės procesas gali būti „deagreguotas“ į tam tikros individualios elgsenos procesų klases? Dacunha–Castelle ir Oppenheim (2001) parodė, kad gana plati tolimos priklausomybės procesų klasė gali būti deagreguota į stacionarius procesus su spektriniais tankiais iš C^{∞}. Šių rezultatų kontekste autoriai išskyrė tolimos priklausomybės procesų klasę – „sunkią“ tolimą priklausomybę, kurios negalima gauti agreguojant „artimos“ priklausomybės sekas. Leipaus ir kt. (2006) bei Chong (2006) darbuose buvo nagrinėjamos statistinės problemos susijusios su deagregavimu.

Šiame straipsnyje nagrinėjama agregavimo schema, kuomet *stebimas* agreguotas procesas gautas sumuojant be galo daug nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių (artimos priklausomybės) AR(1) modelių su atsitiktiniu autoregresijos parametru. Uždavinio tikslas – nustatyti nežinomą AR(1) parametro skirstinį. Taigi tiriamas silpnojo agregavimo atvejis. Jei pastarasis skirstinys (ar skirstinių klasė) būtų a priori žinomas, kaip pavyzdžiui Chong (2006) (jis nagrinėjo polinominio skirstinio atvejį), tuomet agreguotas procesas galėtų būti traktuojamas griežtojo agregavimo kontekste. Pastebėtina, kad prielaida apie polinominį skirstinį yra gana natūrali, turint galvoje, kad praktikoje nežinomą skirstinį silpno agregavimo atveju galima gana tiksliai aproksimuoti polinominiu skirstiniu. Leipaus ir kt. (2006) darbe pasiūlyta alternatyvi deagregavimo schema, besiremianti AR(1) parametro skirstinio tankio aproksimavimu ortogonaliaisiais Gegenbauerio (ultrasferiniais) polinomais.

Straipsnio struktūra yra tokia: 2 skyrelyje trumpai apžvelgiami pagrindiniai Leipaus ir kt. (2006) darbo rezultatai. Toliau pateikiamas teiginys apie dviejų spektrinių tankių sandaugos atitinkamo maišančiojo tankio struktūrą, kuri iliustruojama FARUMA$(0, d_1, d_2, 0)$ pavyzdžiu. Paskutiniajame skyrelyje pateikiamos baigiamosios pastabos.

2. AR(1) proceso maišančiojo tankio vertinimas

Šiame skyrelyje aptarsime Leipaus ir kt. (2006) darbe nusakytą AR(1) procesų agregavimo schemą. Tarkime, kad individualios elgsenos lygtys nusakomos AR(1) modeliais

$$Y_t^{(j)} = a^{(j)} Y_{t-1}^{(j)} + \varepsilon_t^{(j)}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots. \tag{2.1}$$

Čia parametrai $a^{(j)}$ bei inovacijos $\varepsilon^{(j)} = \{\varepsilon_t^{(j)}, \ t \in \mathbb{Z}\}$ tenkina šias sąlygas:

- $\varepsilon^{(j)}$, $j \geqslant 1$ yra nepriklausomos stipriojo balto triukšmo[1] kopijos;

[1] Stipriuoju baltu triukšmu vadiname nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seką ε_t, $t \in \mathbb{Z}$ su vidurkiu $E\varepsilon_t = 0$ ir dispersija $E\varepsilon_t^2 = 1$.

- $a^{(j)}$ yra absoliučiai tolydaus atsitiktinio dydžio a, kurio tankio funkcija apibrėžta intervale $[-1, 1]$, ir tenkinančio sąlygą $E[1/(1-a^2)] < \infty$, nepriklausomos kopijos;
- sekos $(a^{(j)}, j \geqslant 1)$ bei $(\varepsilon^{(j)}, j \geqslant 1)$ yra tarpusavyje nepriklausomos.

Iš šių sąlygų išplaukia, kad (2.1) lygtys turi stacionarų sprendinį. Be to, remiantis Oppenheim ir Viano (2004), dalinių sumų seka

$$X_t^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} Y_t^{(j)}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

silpnai konverguoja į Gauso procesą X_t, kai $N \to \infty$. Šis procesas vadinamas *agreguotu* procesu.

Svarbus įrankis, sprendžiant agregavimo bei deagregavimo uždavinius, yra atsitiktinio dydžio a tankis $\varphi(x)$ (jį vadinsime *maišančiuoju tankiu*), kurį patogu pateikti tokia semiparametrine forma:

$$\varphi(x) = (1-x)^{d_1}(1+x)^{d_2}\psi(x), \quad d_1 > 0, \ d_2 > 0, \tag{2.2}$$

čia $\psi(x)$, $x \in [-1, 1]$ yra neneigiama ir tolydi taškuose ± 1 funkcija, tokia kad $\psi(\pm 1) \neq 0$. Iš suformuluotų prielaidų seka, kad agreguotas procesas X_t turi baigtinę dispersiją:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{1-x^2} \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{2.3}$$

Be to, remiantis $\varphi(x)$ apibrėžimu, nesunku rasti agreguoto proceso X_t kovariacinę funkciją ir spektrinį tankį, kurie sutampa su $Y_t^{(j)}$ kovariacine funkcija bei spektriniu tankiu ir yra lygūs atitinkamai:

$$\sigma(h) = \int_{-1}^{1} \frac{x^{|h|}}{1-x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x, \quad h = 0, \pm 1, \ldots;$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{|1 - xe^{i\lambda}|^2} \, \mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Remiantis Oppenheim ir Viano (2004), agreguotas procesas $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ turi tolimos priklausomybės savybę (t.y. $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\sigma(h)| = \infty$) tada ir tik tada, kai bent vienas iš parametrų d_1 ar d_2 yra mažesnis už 1. Tokiu atveju turime

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{(1-x^2)^2} \, \mathrm{d}x = \infty. \tag{2.5}$$

Deagregavimo uždavinio tikslas – įvertinti nežinomą (maišantįjį) tankį $\varphi(x)$, kuomet yra stebimi agreguoti dydžiai $X_1, \ldots, X_N$, o individualūs procesai (2.1) nėra stebimi. Tam tikslui autoriai siūlo pasinaudoti pagalbine funkcija:

$$\zeta(x) := \frac{\varphi(x)}{(1-x^2)^{\alpha}}, \quad \alpha > -1, \tag{2.6}$$

kuri, esant išpildytai sąlygai

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi^2(x)}{(1-x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

priklauso klasei $L^2((1-x^2)^\alpha)$ ir todėl gali būti išskleista α-Gegenbauerio (ultrasferiniais) daugianariais, t.y. $\zeta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k G_k^{(\alpha)}(x)$ su koeficientais

$$\zeta_k = \sum_{j=0}^{k} g_{k,j}^{(\alpha)} \int_{-1}^{1} \varphi(x) x^j\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{k} g_{k,j}^{(\alpha)} \big(\sigma(j) - \sigma(j+2)\big), \quad k \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Čia $g_{k,j}^{(\alpha)}$ yra α-Gegenbauerio daugianario $G_k^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{n} g_{k,j}^{(\alpha)} x^j$ koeficientai. Tikslias koeficientų $g_{k,j}^{(\alpha)}$ išraiškas galima rasti Leipaus ir kt. (2006) darbo B.1 priede. Tuomet maišantįjį tankį $\varphi(x)$ natūralu vertinti (2.7) išraiškoje $\sigma(j)$ kovariacijas pakeičiant jų empiriniais analogais $\hat{\sigma}_n(j) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n-j} X_i X_{i+j}$:

$$\hat{\varphi}_n(x) = (1-x^2)^\alpha \hat{\zeta}_n(x) = (1-x^2)^\alpha \sum_{j=0}^{k} g_{k,j}^{(\alpha)} \big(\hat{\sigma}_n(j) - \hat{\sigma}_n(j+2)\big). \tag{2.8}$$

Leipaus ir kt. (2006) darbe parodoma, kad $\hat{\varphi}_n(x)$ yra pagrįstas $\varphi(x)$ įvertis.

3. Tolimos priklausomybės proceso deagregavimas į AR(1)

Kaip minėta, vienas iš deagregavimo tematikos uždavinių yra *maišančiojo tankio* φ nustatymas atveju, kai iš anksto fiksuojamas (stebimas) tam tikros klasės tolimos priklausomybės procesas. Pirmieji, kurie šį uždavinį suformulavo ir atskirais atvejais pateikė sprendimus, buvo Dacunha–Castelle ir Oppenheim (2001). Jie atskiru atveju nusakė sąlygas, kuomet tolimos priklausomybės procesas gali būti deagreguojamas į (2.1) tipo individualių elgsenos lygčių klasę.

Dacunha–Castelle ir Oppenheim (2001) parodė, kaip šis uždavinys sprendžiamas trupmeninio integruoto proceso FARIMA$(0, d, 0)$, $0 < d < 1/2$, atveju. Priminsime, kad FARIMA$(0, d, 0)$ procesas nusakomas lygtimi $(1-B)^d X_t = \varepsilon_t$, kur B yra poslinkio operatorius ($B^j X_t = X_{t-j}$). Remdamiesi agreguoto proceso spektrinio tankio integraline išraiska (2.4) bei FARIMA$(0, d, 0)$ spektrinio tankio išraiška $f(\lambda) = (2\pi)^{-1}|1-e^{i\lambda}|^{-2d}$, tuo atveju kai autoregresijos parametras a yra sukoncentruotas [0, 1], autoriai parodė, kad

$$\varphi(x) = C(d) x^{d-1} (1-x)^{1-2d} (1+x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad C(d) := \sin(\pi d)\pi^{-1}. \tag{3.1}$$

Analogiškai, tuo atveju kai a nešėjas yra [-1,0], gauname

$$\varphi(x) = C(d)|x|^{d-1}(1+x)^{1-2d}(1-x)\mathbf{1}_{[-1,0]}(x). \tag{3.2}$$

Teoremoje 3 Dacunha–Castelle ir Oppenheim (2001) parodė, kad agreguotas procesas gali būti deagreguojamas į AR(1), jei jo spektrinis tankis turi pavidalą $f(\lambda) =$

$\Phi(1-\cos\lambda)+\Psi(1+\cos\lambda)$ (maišantysis tankis tuomet gali būti, pavyzdžiui, (3.1) ir (3.2) derinys), kur $\Phi(t)$ ir $\Psi(t)$ yra pavidalo $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}L(y)}{1+ty}$ su $L(y)$, tenkinančia sąlygą $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}L(y)}{\sqrt{1+2y}}<\infty$.

Žemiau pateikiamame teiginyje praplečiama deagreguojamų procesų klasė, kuomet agreguoto proceso tankis gali būti išreikštas dviejų spektrinių tankių su atitinkamais maišančiaisiais tankiais sandauga. Šio teiginio pagalba tikėtina, kad galima gauti įdomius maišančiųjų tankių pavyzdžius tokiems modeliams kaip FARUMA$(0,d_1,d_2,0)$ ar FARIMA$(1,d,0)$.

3.1 TEIGINYS. *Tegul atsitiktinio proceso $\{X_t, t\in\mathbb{Z}\}$ spektrinis tankis $f(\lambda)$ tenkina*

$$f(\lambda)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{|1-xe^{i\lambda}|^2}\,\mathrm{d}x=2\pi f_1(\lambda)f_2(\lambda),$$

čia $f_i(\lambda)=(2\pi)^{-1}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_i(x)}{|1-xe^{i\lambda}|^2}\,\mathrm{d}x$, $i=1,2$, o maišantieji tankiai $\varphi_i(x)$ tenkina (2.3). *Tarkime, kažkuriam $0<p\leqslant 2$ galioja:*

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(x)}{(1-x^2)(1-|x|^p)}\,\mathrm{d}x<\infty. \tag{3.3}$$

Tuomet teisinga:

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(y)}{(1-y/x)(1-xy)}\,\mathrm{d}y+\varphi_2(x)\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(y)}{(1-y/x)(1-xy)}\,\mathrm{d}y. \tag{3.4}$$

3.1 pastaba. Teiginio rezultatas lieka teisingas, pakeitus (3.3) alternatyvia sąlyga

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_i(x)}{(1-x^2)^{3/2}}<\infty,\quad i=1,2.$$

(3.3) sąlygos atvejis $p=2$ reiškia, kad $f_1(\lambda)$ yra artimos priklausomybės sekos spektrinis tankis (žr. (2.5)).

3.2 pastaba. Tuo atveju, kai maišantieji tankiai $\varphi_1(x)$ ir $\varphi_2(x)$ yra semiparametrinio pavidalo

$$\varphi_i(x)=(1-x)^{d_{i1}}(1+x)^{d_{i2}}\psi_i(x),\quad d_{ij}>0,\ \ i,j=1,2,$$

remiantis lygybe

$$\frac{1}{(1-y/x)(1-xy)}=\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-y/x}+\frac{x^2}{x^2-1}\frac{1}{1-xy} \tag{3.5}$$

ir keitiniu $(1+y)/2=v$, atitinkamas integralas gali būti perrašytas taip

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_i(y)}{(1-y/x)(1-xy)}\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{(1-y)^{d_{i1}}(1+y)^{d_{i2}}\psi_i(y)}{(1-y/x)(1-xy)}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2^{d_{i1}+d_{i2}+1}x}{(1-x^2)(x+1)} \int_0^1 \frac{(1-v)^{d_{i1}} v^{d_{i2}} \psi_i(2v-1)}{1-(2/(x+1))v} \, \mathrm{d}v$$
$$+ \frac{2^{d_{i1}+d_{i2}+1}x^2}{(x^2-1)(x+1)} \int_0^1 \frac{(1-v)^{d_{i1}} v^{d_{i2}} \psi_i(2v-1)}{1-(2x/(x+1))v} \, \mathrm{d}v.$$

Paprasčiausiais atvejais (pavyzdžiui, kai $\psi_i(x) = C_i$) pastarasis integralas gali būti išreikštas hipergeometrinėmis funkcijomis, taigi maišantysis tankis $\varphi(x)$ gali būti užrašytas patogesne forma.

Iliustracijai pateiksime pavyzdį.

3.1 pavyzdys. Nagrinėkime stacionarų procesą X_t (kurį vadinsime FARUMA$(0, d_1, d_2, 0)$) su nuliniu vidurkiu ir spektriniu tankiu

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |1 - \mathrm{e}^{i\lambda}|^{d_1-1} |1 + \mathrm{e}^{i\lambda}|^{d_2-1}, \quad 0 < d_1, d_2 < 1.$$

Mūsų tikslas – išreikšti šio proceso maišantįjį tankį per atitinkamų FARIMA procesų maišančiuoius tankius, nusakytus (3.1) bei (3.2) lygybėmis, t.y.

$$\varphi_1(x) = (1-x)^{d_1} \psi_1(x), \quad \varphi_2(x) = (1+x)^{d_2} \psi_2(x),$$

čia $\psi_1(x) = \bar{C}(d_1) x^{-(1+d_1)/2} (1+x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $\psi_2(x) = \bar{C}(d_2) |x|^{-(1+d_2)/2} (1-x) \mathbf{1}_{[-1,0]}(x)$, $\bar{C}(d_i) := C((1-d_i)/2) = \cos(\pi d_i/2)\pi^{-1}$, $i = 1, 2$. Norint rasti X_t maišančiojo tankio $\varphi(x)$ išraišką, pakanka užrašyti kovariacinę funkciją

$$\begin{aligned}
\sigma_X(h) &= \int_{-1}^1 \frac{x^{|h|}}{1-x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(x) x^{|h|}}{1-x^2} \Big(\int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(y) \, \mathrm{d}y}{(1-y/x)(1-xy)} \Big) \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(y) y^{|h|}}{1-y^2} \Big(\int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(x) \, \mathrm{d}x}{(1-x/y)(1-xy)} \Big) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^1 \frac{x^{|h|}}{1-x^2} \big(\varphi_2(x) F_1(x, d_1) + \varphi_1(x) F_2(x, d_2) \big) \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

kur

$$F_i(x) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi_i(y) \, \mathrm{d}y}{(1-y/x)(1-xy)}, \quad i = 1, 2.$$

Taigi, maišantysis tankis $\varphi(x)$ turi pavidalą

$$\varphi(x) = \varphi_2(x) F_1(x, d_1) + \varphi_1(x) F_2(x, d_2),$$

kur, remiantis lygybe

$$B(b, c-b) F(a, b, c; z) = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} \, \mathrm{d}t,$$

(čia $B(p,q)$ – beta funkcija, $F(a,b,c;z)$ – hipergeometrinė funkcija) ir (3.5),

$$\begin{aligned}
F_1(x,d_1) &= \int_{-1}^{1} \frac{(1-y)^{d_1}\psi_1(y)}{(1-y/x)(1-xy)}\,\mathrm{d}y \\
&= \bar{C}(d_1)\int_0^1 \frac{(1-y)^{d_1}(1+y)}{y^{(1+d_1)/2}(1-y/x)(1-xy)}\,\mathrm{d}y \\
&= \bar{C}(d_1)\bigg(\frac{1}{1-x}\int_0^1 \frac{(1-y)^{d_1}}{y^{(1+d_1)/2}(1-y/x)}\,\mathrm{d}y + \frac{x}{x-1}\int_0^1 \frac{(1-y)^{d_1}}{y^{(1+d_1)/2}(1-xy)}\,\mathrm{d}y\bigg) \\
&= \bar{C}(d_1)B\big((1-d_1)/2, 1+d_1\big)(1-x)^{-1}G(x,d_1) \\
&= \frac{2^{d_1}\Gamma(1+d_1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((3+d_1)/2)}\,\frac{G(x,d_1)}{1-x},
\end{aligned}$$

čia $G(x,d_1) = F(1,(1-d_1)/2,(3+d_1)/2;1/x) - xF(1,(1-d_1)/2,(3+d_1)/2;x)$.

Analogiškai

$$F_2(x,d_2) = F_1(-x,d_2),$$

ir todėl turime:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = {} & \frac{\bar{C}(d_2)(1+x)^{d_2}}{(-x)^{(1+d_2)/2}}\,\frac{2^{d_1}\Gamma(1+d_1/2)}{\sqrt{\pi}(1-x)\Gamma((3+d_1)/2)}\,G(x,d_1)\mathbf{1}_{[-1,0)}(x) \\
& + \frac{\bar{C}(d_1)(1-x)^{d_1}}{x^{(1+d_1)/2}}\,\frac{2^{d_2}\Gamma(1+d_2/2)}{\sqrt{\pi}(1+x)\Gamma((3+d_2)/2)}\,G(-x,d_2)\mathbf{1}_{[0,1]}(x).
\end{aligned}$$

Pastebėsime, kad nulio aplinkoje tankio funkcija $\varphi(x)$ elgiasi kaip $O(|x|^{(d_1+d_2)/2})$, taigi yra integruojama šio ypatingo taško aplinkoje. Taškų -1 bei 1 aplinkose maišantysis tankis elgiasi atitinkamai kaip $\varphi_2(x)$ ir $\varphi_1(x)$. Kitų ypatingų taškų nėra.

4. Baigiamosios pastabos

Tiek agregavimo, tiek ir deagregavimo uždaviniai yra perspektyvi laiko eilučių tematika. Svarbu yra tai, kad plačią klasę tolimos priklausomybės procesų, atsirandančių tokiose mokslo šakose kaip makroekonomika, hidrologija, sociologija, galima gauti, agreguojant artimos priklausomybės procesus su atsitiktiniais koeficientais, pavyzdžiui AR(1) procesus. Nagrinėjant šiuos uždavinius, svarbu žinoti ne tik, kad duotas procesas yra teoriškai deagreguojamas į tam tikrą klasę idiosinkratinių elgsenos procesų, bet ir mokėti konstruoti pastarųjų procesų atsitiktinių parametrų maišančiuosius tankius. 3.1 teiginyje formuluojamas rezultatas iš dalies leidžia tai padaryti. Jame parodyta, kad procesams agreguotiems pagal AR(1) schemą maišantieji tankiai gali būti gauti iš paprastesnių arba anksčiau nusakytų agreguotų pagal tą pačią AR(1) schemą maišančiųjų tankių.

Tiek tiesioginis (agregavimo), tiek ir atvirkštinis (deagregavimo) uždaviniai turi daug neišspręstų klausimų, vieni svarbiausių iš kurių yra susiję su asimptotinėmis maišančiųjų tankių įverčių savybėmis.

Literatūra

1. V.V. Anh, V.P. Knopova, N.N. Leonenko, Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence, *Austral. N. Z. J. Statist.*, **46**, 275–296 (2004).
2. O.E. Barndorff–Nielsen, Superposition of Ornstein–Uhlenbeck processes, *Theory Probab. Appl.*, **45**, 175–194 (2001).
3. T.T.L. Chong, The polynomial aggregated AR(1) model, *Econometrics Journal*, **9**, 98–122 (2006).
4. D. Dacunha–Castelle, G. Oppenheim, Mixtures, aggregations and long memory, *Preprint*, **2001-72**, Université de Paris-Sud, Mathematiques (2001).
5. C.W.J. Granger, Long memory relationships and the aggregation of dynamic models, *J. Econometrics*, **14**, 227–238 (1980).
6. R. Leipus, G. Oppenheim, A. Philippe, M.-C. Viano, Orthogonal series density estimation in a disaggregation scheme, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 2547–2571 (2006).
7. G. Oppenheim, M.-C. Viano, Aggregation of random parameters Ornstein–Uhlenbeck or AR processes: some convergence results, *Journal of Time Series Analysis*, **25**, 335–350 (2004).
8. M.H. Pesaran, *On aggregation of linear dynamic models*, *Preprint*, University of Cambridge (1999).
9. P. Robinson, Statistical inference for a random coefficient autoregressive model, *Scand. J. Statist.*, **5**, 169–172 (1978).
10. P. Zaffaroni, Contemporaneous aggregation of linear dynamic models in large economies, *J. Econometrics*, **120**, 75–102 (2004).

SUMMARY

D. Celov, R. Leipus. Time series aggregation, disaggregation and long memory

Large-scale aggregation and its inverse, disaggregation, problems are important in many fields of studies like macroeconomics, astronomy, hydrology and sociology. It was shown in Granger (1980) that a certain aggregation of random coefficient AR(1) models can lead to long memory output. Dacunha-Castelle and Oppenheim (2001) explored the topic further, answering when and if a predefined long memory process could be obtained as the result of aggregation of a specific class of individual processes. In this paper, the disaggregation scheme of Leipus et al. (2006) is briefly discussed. Then disaggregation into AR(1) is analyzed further, resulting in a theorem that helps, under corresponding assumptions, to construct a mixture density for a given aggregated by AR(1) scheme process. Finally the theorem is illustrated by FARUMA mixture densityÆs example.

Keywords: mixture density, disaggregation, AR(1) aggregation, long memory.