

Aukštesniųjų eilių glaustiniai paraboloidai

Kazimieras NAVICKIS (VU)

el. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Reziumė. Šiame darbe nagrinėjami paviršiaus aukštesniųjų eilių glaustiniai paraboloidai afininėje koordinatinių sistemoje. Tokių glaustinių paraboloidų panaudojimas leidžia analizuoti ir vizualizuoti duotojo paviršiaus lokalines savybes, kurios priklauso nuo aukštesniųjų eilių dalinių išvestinių.

Raktiniai žodžiai: paviršius, glaustinis paviršius, glaustinis paraboloidas, afininė diferencialinė geometrija.

Tarkime, kas S – paviršius trimatėje Euklido erdvėje, apibrėžtas išreikštine lygtimi $(\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2)$

$$S: x^3 = f(x^\alpha); \quad (1)$$

čia f yra tolydinė funkcija, turinti tolydines dalines išvestines taške $(x_0^1; x_0^2)$ iki eilės $r + 1$; $r \in \mathbb{N}$. Paviršių S nagrinėsime jo taško $M_0(x_0^1; x_0^2; x_0^3)$ aplinkoje; čia $x_0^3 = f(x_0^1, x_0^2)$. Pažymėkime

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \frac{\partial^p f}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_p}},$$

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \Big|_{M_0};$$

čia $\alpha_1, \dots, \alpha_p = 1, 2$. Iš paviršiaus S lygties

$$S: \vec{r} = \{x^1; x^2; f(x^1, x^2)\}$$

randame, kad

$$\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} = \{1; 0; f_1\},$$

$$\vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} = \{0; 1; f_2\},$$

$$\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \{-f_1; -f_2; 1\}.$$

Pažymėkime

$$E = 1 + (f_1)^2, \quad W = \sqrt{1 + (f_1)^2 + (f_2)^2};$$

$$E_0 = 1 + (a_1)^2, \quad W_0 = \sqrt{1 + (a_1)^2 + (a_2)^2}.$$

Paviršiaus S taške M_0 turime tris ortus:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{E_0}} \{1; 0; a_1\} = \{l_1^1; l_2^1; l_3^1\},$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{W_0} \{-a_1; -a_2; 1\} = \{l_3^1; l_3^2; l_3^3\},$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \frac{1}{W_0 \sqrt{E_0}} \{-a_1 a_2; 1 + (a_1)^2; (a_2)^2\} = \{l_2^1; l_2^2; l_2^3\}.$$

Bet kurio erdvės taško $M(x^1; x^2; x^3)$ koordinatės bazės $\{\vec{e}_i\}$ ($i, j, k, \dots = 1, 2, 3$) atžvilgiu žymėsime X^1, X^2, X^3 . Tada

$$X = X_0 + X_{(1)} \cdot R^t; \quad (2)$$

čia

$$X = (x^1 \ x^2 \ x^3),$$

$$X_0 = (x_0^1 \ x_0^2 \ x_0^3),$$

$$X_{(1)} = (X^1 \ X^2 \ X^3),$$

$$R = \| l_j^i \|$$

(i – eilutės numeris, j – stulpelio numeris), R^t – transponuota matrica R . Paviršiaus S lygtis, atlikus (2) koordinačių transformaciją, bus tokia:

$$S: g(X^1, X^2, X^3) \equiv f(x_0^\alpha + l_i^\alpha X^i) - (x_0^3 + l_i^3 X^i) = 0. \quad (3)$$

Pažymėkime

$$g_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial^p g}{\partial X^{i_1} \dots \partial X^{i_p}},$$

$$b_{i_1 \dots i_p} = q_{i_1 \dots i_p} |_{M_0}.$$

Aišku,

$$g_{i_1} = f_{\alpha_1} l_{i_1}^{\alpha_1} - l_{i_1}^3,$$

$$g_{i_1 i_2} = f_{\alpha_1 \alpha_2} l_{i_1}^{\alpha_1} l_{i_2}^{\alpha_2},$$

$$g_{i_1 \dots i_p} = f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} l_{i_1}^{\alpha_1} \dots l_{i_p}^{\alpha_p},$$

ir todėl

$$b_{i_1 \dots i_p} = a_{\alpha_1 \dots \alpha_p} l_{i_1}^{\alpha_1} \dots l_{i_p}^{\alpha_p},$$

kai $p \geq 2$. Kadangi

$$b_\alpha = 0, b_3 = -W_0 \neq 0,$$

tai funkcija g apibrėžia funkcija

$$X^3 = h(X^1, X^2).$$

Pažymėkime

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \frac{\partial^p X^3}{\partial X^{\alpha_1} \dots \partial X^{\alpha_p}},$$

$$C_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} |_{M_0}.$$

Diferencialinių operatorių

$$\partial_\alpha^\# = \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + A_\alpha \frac{\partial}{\partial X^3}$$

pagalba gauname naujus diferencialinius operatorius

$$\partial_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^\# = \partial_{\alpha_p}^\# \circ \dots \circ \partial_{\alpha_1}^\#.$$

Pažymėkime

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \partial_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^\# g.$$

Lygčių sistema

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_p} |_{C_\beta=0} = 0,$$

t.y. sistema

$$b_{\alpha\beta} + b_3 C_{\alpha\beta} = 0,$$

$$b_{\alpha\beta\gamma} + 3C_{(\alpha\beta} b_{\gamma)3} + C_{\alpha\beta\gamma} b_3 = 0,$$

$$b_{\alpha\beta\gamma\epsilon} + 6C_{(\alpha\beta} b_{\gamma\epsilon)3} + 4C_{\alpha\beta\gamma} b_{\epsilon 3} + 3C_{\alpha\beta} C_{\gamma\epsilon} b_{\epsilon 3} + C_{\alpha\beta\gamma\epsilon} b_3 = 0,$$

.....

yra išsprendžiama dydžių $C_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ atžvilgiu. Pažymėkime

$$\varphi_p = \frac{1}{p!} C_{\alpha_1 \dots \alpha_p} X^{\alpha_1} \dots X^{\alpha_p}.$$

Lygtis

$$O_{M_0}^{(r)}(S): X^3 = \sum_{p=z}^r \varphi_p$$

apibrėžia r -osios eilės paviršių $O_{M_0}^{(r)}(S)$, kuris turi r -sios eilės kontaktą taške M_0 su duotuoju paviršiumi S ir kuris vadinamas paviršiaus S r -osios eilės glaustiniu paraboloidu taške M_0 .

Pasirinkime kitą koordinačių sistemą. Trys vektoriai

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{E}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{E}_3 = a^\alpha E_\alpha + \vec{e}_3,$$

kai $a^\alpha \in \mathbb{R}$ yra fiksuoti skaičiai, nustato tris krypčių vektorius afininėje koordinačių sistemoje, kurios pradžios taškas yra M_0 . Tarkime, kad $(u^1; u^2; F(u^1, u^2))$ yra paviršiaus S taško koordinatės šios sistemos atžvilgiu. Tada

$$S: \begin{cases} X^\alpha = u^\alpha + a^\alpha F(u^\beta), \\ X^3 = F(u^\beta). \end{cases}$$

Pažymėkime

$$\begin{aligned} F_{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= \frac{\partial^p F}{\partial u^{\alpha_1} \dots \partial u^{\alpha_p}}, \\ d_{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= F_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \Big|_{M_0}, \\ \psi_p &= \frac{1}{p!} d_{\alpha_1 \dots \alpha_p} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_p}. \end{aligned}$$

Lygtis

$$Osc_{M_0}^{(r)}(S): X^3 = \sum_{p=z}^r \psi_p$$

apibrėžia r -osios eilės glaustinį paraboloidą taške M_0 afininėje koordinačių sistemoje.

Šiame darbe įrodoma teorema, kurioje nustatomi ryšiai tarp p -formų φ_p ir ψ_p . Atskiruoju atveju ją galima formuluoti taip.

TEOREMA. *Tarkime, kad*

$$\begin{aligned} g(z) &= a_{\alpha_1 \alpha_2} a^{\alpha_1} u^{\alpha_2}, \\ g(3) &= a_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} a^{\alpha_1} u^{\alpha_2} u^{\alpha_3}, \\ g(4) &= a_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} a^{\alpha_1} u^{\alpha_2} u^{\alpha_3} u^{\alpha_4}, \\ h(2) &= a_{\alpha_1 \alpha_2} a^{\alpha_1} a^{\alpha_2}, \\ h(3) &= a_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} a^{\alpha_1} a^{\alpha_2} u^{\alpha_3}. \end{aligned}$$

Tada

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{1}{2} a_{\alpha_1 \alpha_2} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2}, \\ \psi_3 &= \frac{1}{6} a_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} u^{\alpha_3} + g(2) \psi_2, \\ \psi_4 &= \frac{1}{24} a_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} u^{\alpha_3} u^{\alpha_4} + \frac{1}{2} g(3) \psi_2 + \left(\frac{1}{3} \psi_3 + g(2) \psi_2 \right) + \frac{1}{2} h(2) (\psi_2)^2, \end{aligned}$$

$$\psi_5 = \frac{1}{5!} a_{\alpha_1 \dots \alpha_5} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_5} + \frac{1}{6} g_{(4)} \psi_2 + \frac{1}{2} g_{(3)} \psi_3 + \frac{1}{2} h_{(3)} (\psi_2)^2 + h_{(2)} \psi_4 + h_{(2)} \psi_2 + \psi_3.$$

Glaustinis paraboloidas $Osc^z(S)$ duotąjį paviršių S kerta kreive

$$\begin{cases} \psi_3 + \psi_4 + \dots = 0, \\ X^3 = 0. \end{cases}$$

Sankirtos kreivė bendruoju atveju turi trigubą tašką M_0 , kuriame trys liečiamosios anuliuoja kubinę formą ψ_3 . Jos vadinamos paraboloido glaustinėmis liečiamosiomis.

Nagrinėsime visus glaustinius paraboloidus $Osc_{M_0}^{(2)}$, einančius per fiksuotą liečiamąją $(\lambda v^1; \lambda v^2; 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Visų šių paraboloidų ašys sudaro plokštumą

$$(3a_{\alpha\epsilon} X^\epsilon a_{\beta\gamma} + a_{\alpha\beta\gamma} X^3) v^\alpha v^\beta v^\gamma = 0,$$

kuri yra vadinama Transono plokštuma. Pažymėkime

$$m_{\alpha\beta\gamma} = 3a_{\alpha\epsilon} a_{\beta\gamma} X^\epsilon + a_{\alpha\beta\gamma} X^3.$$

Visos Transono plokštumos

$$m_{\alpha\beta\gamma} v^\alpha v^\beta v^\gamma = 0$$

gaubia kūgį

$$\begin{vmatrix} m_{111} & 2m_{112} & m_{122} & 0 \\ 0 & m_{111} & 2m_{112} & m_{122} \\ m_{112} & 2m_{122} & m_{222} & 0 \\ 0 & m_{112} & 2m_{122} & m_{222} \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

kuris bendruoju atveju yra 4 eilės paviršius. Jis vadinamas B . Su kūgiu.

Literatūra

1. G. Scheffers, Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf die Geometrie, Zweiter Band, Leipzig, Verlag von Veit & Comp. (1902).

SUMMARY

K. Navickis. Osculating paraboloid

Osculating paraboloid of second order have been studied in classical differential geometry. In this article we generalize this concept to osculating paraboloids of higher order. This yields a visualization of the local properties of a given surface which depend on the derivatives of higher order.

Keywords: surface, osculating surface, osculating paraboloid.