

## $n$ -matės afininės erdvės neholonominių kompleksų diferencialinė geometrija

Kazimieras NAVICKIS (VU)

el. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

**Reziumė.** Šiame darbe nagrinėjama  $n$ -matės afininės erdvės  $A_n$  neholonominių kompleksų  $NGr(1, n, 2n - 4)$  diferencialinė geometrija.

*Raktiniai žodžiai:* afininė erdvė, tiesių kompleksas, neholonominis kompleksas.

Tarkime kad  $(\vec{A}, \vec{e}_i)$  yra judamasis reperis afininėje erdvėje  $A_n$ . Tada šio reperio infinitesimaliojo judesio diferencialinės lygtys yra tokios  $(i, j, \dots = 1, \dots, n)$ :

$$d\vec{A} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_j^i \vec{e}_j.$$

Tarkime, kad  $Gr(1, n)$  – erdvės  $A_n$  Grasmano daugdara. Nagrinėsime glodų  $(2n - 4)$ -matį Grasmano daugdaros  $Gr(1, n)$  padaugdarį  $Gr(1, n, 2n - 4)$ . Jis vadinamas afininės erdvės  $A_n(2n - 4)$ -mačiu tiesių kompleksu. Tarkime, kad  $l$ -daugdaros  $Gr(1, n)$  sudaromas elementas. Judamąjį reperį  $\{\vec{A}, \vec{e}_i\}$  parinksime taip, kad  $l = (A, \vec{e}_1)$ . Kompleksą  $Gr(1, n, 2n - 4)$  apibrėšime diferencialinėmis lygtimis

$$\begin{cases} \lambda_J^{(1)} \omega^J + \mu_J^{(1)} \omega_1^J = 0, \\ \lambda_J^{(2)} \omega^J + \mu_J^{(2)} \omega_1^J = 0, \end{cases} \quad (1)$$

čia  $I, J, \dots = 2, 3, \dots, n$ . Visos tiesės, einančios per tašką

$$\vec{M}(t) = \vec{A} + t\vec{e}_1$$

ir priklausančios kompleksui  $Gr(1, n, 2n - 4)$ , sudaro  $(n - 2)$ -matį kūgį  $\Gamma_{n-2}(t)$ . Šio  $(n - 2)$ -mačio kūgio  $(n - 2)$ -matė liečiaqmoji plokštuma  $T_{M(t)}(\Gamma_{n-2}(t))$  taške  $\vec{M}(t)$  išilgai sudaromosios  $l$  yra aprašoma lygtimis

$$\begin{cases} (\mu_J^{(1)} - t\lambda^{(1)J} x^J) = 0, \\ \mu_J^{(2)} - t\lambda_J^{(2)} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Kad būtų paprasčiau, šią  $(n - 2)$ -matę plokštumą žymėsime  $\Pi_{n-2}(t)$  ir vadinsime asocijuota taškui  $\vec{M}(t)$ . Atitiktį

$$K(l): \vec{M}(t) \leftrightarrow \Pi_{n-2}(t) \quad (3)$$

vadinsime komplekso  $Gr(1, n, 2n - 4)$  pagrindine atitiktimi. Afininės erdvės  $A_n$  neholonominių kompleksų  $NGr(1, n, 2n - 4)$  vadinsime Grasmano daugdarą  $Gr(1, n)$  su joje apibrėžtu (3) atitikčių lauku.

Nagrinėsime matricą

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_2^{(1)} & \mu_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} & \mu_2^{(2)} \\ \lambda_3^{(1)} & \mu_3^{(1)} & \lambda_3^{(2)} & \mu_3^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^{(1)} & \mu_n^{(1)} & \lambda_n^{(2)} & \mu_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Aišku, kad matricos  $\Lambda$  rangas  $rg \Lambda$  tenkina nelygybę

$$2 \leq rg \Lambda \leq 4.$$

**1 atvejis.**  $rg \Lambda = 4$ .

Šiuo atveju atitinkamą (1) kompleksą žymėsime  ${}^{(4)}Gr(1, n, 2n - 4)$ . Nagrinėjamu atveju iš (2) lygčių išplaukia lygtys ( $p, q, \dots = 1, 2$ )

$$\Pi_{n-4}: \lambda_J^{(p)} x^J = 0, \quad \mu_J^{(p)} x^J = 0,$$

apibrėžiančios  $(n - 4)$ -matę plokštumą  $\Pi_{n-4}$ . Visos  $(n - 2)$ -matės plokštumos  $\Pi_{n-2}(t)$  gaubia antrosios eilės hiperkūgį  $K_{n-1}$ , apibrėžiamą lygtimi

$$K_{n-1}: \lambda_{IJ} x^J x^J = 0;$$

čia

$$\lambda_{IJ} = \lambda_I^{(1)} \mu_J^{(2)} - \lambda_I^{(2)} \mu_J^{(1)}.$$

Komplekso  ${}^{(4)}Gr(1, n, 2n - 4)$  diferencialines lygtis galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = a\omega^{n-1} + b\omega^n, \\ \omega_1^3 = c\omega^{n-1} + e\omega^n. \end{cases} \quad (4)$$

Aptariamam atveju

$$\begin{aligned} \Pi_{n-2}(t): & \begin{cases} x^2 + t(a \cdot x^{n-1} + b \cdot x^n) = 0, \\ x^3 + t(c \cdot x^{n-1} + e \cdot x^n) = 0. \end{cases} \\ K_{n-1}: & x^2(cx^{n-1} + ex^n) - x^3(ax^{n-1} + bx^n) = 0; \\ \Pi_{n-4}: & \begin{cases} x^2 = 0, x^3 = 0, ax^{n-1} + bx^n = 0, \\ cx^{n-1} + ex^n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Jei nagrinėsime fiksaciją

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad e = -1,$$

komplekso  ${}^{(4)}Gr(1, n, 2n - 4)$  lygtys atrodys taip:

$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega^{n-1} = 0, \\ \omega_1^3 + \omega^n = 0; \end{cases}$$

be to,

$$\Pi_{n-2}(t): \begin{cases} x^2 - tx^{n-1} = 0, \\ x^3 - tx^n = 0; \end{cases}$$

$$K_{n-1}: x^2x^n - x^3x^{n-1} = 0;$$

$$\Pi_{n-4}: x^3 = 0, \quad x^4 = 0, \quad x^{n-1} = 0, \quad x^n = 0.$$

Matome, kad hiperkūgio  $K_{n-1}$  viršūnė yra  $(n-4)$ -matė plokštuma

$$\Pi_{n-4} = (M, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \dots, \vec{e}_{n-2}).$$

Hiperkūgis  $K_{n-1}$  turi dvi šeimas sudaromųjų:

$$L_{n-2}^{(1)}(n): x^2 - ux^3 = 0, \quad x^{n-1} + ux^n = 0;$$

$$L_{n-2}^{(2)}(v): x^2 - vx^{n-1} = 0, \quad x^3 + vx^n = 0.$$

Afininės erdvės  $A_n$  neholonominiu kompleksu  ${}^{(4)}NGr(1, n, 2n-4)$  vadinsime Grasmano daugdarą  $Gr(1, n)$  su joje apibrėžtu atitikčių lauku

$$K(l): \vec{M}(t) = \vec{A} + t\vec{e}_1 \Leftrightarrow \Pi_{n-2}(t): \begin{cases} x^2 - tx^{n-1} = 0, \\ x^3 - tx^n = 0. \end{cases}$$

**2 atvejis.**  $rg \Lambda = 3$ .

Šiuo atveju atitinkamą (1) kompleksą žymėsime  ${}^{(3)}Gr(1, n, 2n-4)$ . Jo diferencialines lygtis galima užrašyti taip:

$$\omega_1^2 = a\omega^3 + b\omega^4, \quad \omega_1^3 = c\omega^3 + e\omega^4. \quad (5)$$

Tokio komplekso pagrindinė atitiktis atrodo taip:

$$K(l): \vec{M}(t) = \vec{A} + t\vec{e}_1 \Leftrightarrow \Pi_{n-2}(t): x^2 + t(ax^3 + bx^4) = 0, \quad (1 + c \cdot t)x^3 + t \cdot ex^4 = 0.$$

Matome, kad  $n-2$ -matės plokštumos  $\Pi_{n-2}(t)$  gaubia antrosios eilės hiperkūgį

$$K_{n-1}: c \cdot x^2x^3 + e \cdot x^2x^4 - bx^3x^4 - a \cdot (x^3)^2 = 0.$$

$(n-2)$ -mačių plokštumų  $\Pi_{n-2}(t)$  pluošto ašimi yra  $(n-3)$ -matė plokštuma

$$\Pi_{n-3}: x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \quad x^4 = 0.$$

Bendruoju atveju komplekso  ${}^{(3)}Gr(1, n, 2n-4)$  diferencialines lygtis galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega^3 = 0, \\ \omega_1^3 + \omega^4 = 0. \end{cases}$$

Šiuo atveju

$$\Pi_{n-2}(t): \begin{cases} x^2 - tx^3 = 0, \\ x^3 - tx^4 = 0; \end{cases}$$

$$K_{n-1}: x^2x^4 - (x^3)^2 = 0.$$

Neholonominių kompleksų  $(^3)NGr(1, n, 2n - 4)$  vadinsime Grasmano daugdarą  $Gr(1, n)$  su joje apibrėžtu atitikčių lauku

$$K(l): \vec{M}(t) = \vec{A} + t\vec{e}_1 \leftrightarrow \Pi_{n-2}(t): \begin{cases} x^2 - tx^3 = 0, \\ x^3 - tx^4 = 0. \end{cases}$$

Dvi  $(n - 2)$ -matės plokštumos  $\Pi(t_1)$  ir  $\Pi(t_2)$ , asocijuotos taškams

$$\vec{M}(t_1) = \vec{A} + t_1\vec{e}_1 \quad \text{ir} \quad \vec{M}(t_2) = \vec{A} + t_2\vec{e}_1,$$

apibrėžia hiperplokštumą

$$\Pi_3(t_1, t_2): x^2 - (t_1 + t_2)x^3 + t_1t_2x^4 = 0.$$

Vadinasi, atitktis  $K(l)$  indukuoja kitą atitiktį

$$\tilde{K}(l): \vec{M}(t_1) = \vec{A} + t\vec{e}_1 \leftrightarrow \Pi_{n-1}(t): x^2 - 2tx^3 + t^2x^4 = 0.$$

Hiperkūgio  $K_{n-1}$  stacionarumo sąlygos

$$\theta_{1111} \equiv \omega_4^2 = 0;$$

$$4\theta_{1112} \equiv \omega_3^2 - 2\omega_4^3 = 0,$$

$$6\theta_{1122} \equiv \omega_2^2 - 2\omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,$$

$$4\theta_{1222} \equiv \omega_3^4 - 2\omega_2^3 = 0,$$

$$\theta_{2222} \equiv \omega_2^4 = 0;$$

$$\Phi_1 \equiv \omega_1^2 + \omega^3 = 0, \quad -\Phi_2 \equiv \omega_1^3 + \omega^4 = 0;$$

$$\varphi_{111} \equiv \omega^2 = 0, \quad 3\varphi_{112} \equiv \omega_1^1 - \omega^3 = 0;$$

$$3\varphi_{122} \equiv \omega^4 - 2\omega_4^3 = 0, \quad \varphi_{222} \equiv \omega_1^4 - \omega^3 = 0;$$

$$\theta_{a11} \equiv \omega_a^2 = 0, \quad \theta_{a12} \equiv -\omega_a^3 = 0,$$

$$\theta_{a22} \equiv \omega_a^4 = 0, \quad (a, b, \dots = 5, \dots, n)$$

sudaro pilnai integruojamą diferencialinių lygčių sistemą. Pažymėkime

$$4\theta_{11} = 4\omega^1 - \omega_3^2 - 2\omega_4^3,$$

$$4\theta_{12} = 2\omega_1^1 - \omega_2^2 + 2\omega_4^4,$$

$$4\theta_{22} = 2\omega_2^3 + \omega_3^4.$$

Dabar neholonominio komplekso  $(^3)NGr(1, n, 2n - 4)$  diferencialines lygtis galima užrašyti taip ( $p_1, p_2, \dots = 1, 2$ )

$$\theta_{p_1 p_2} = \lambda_{p_1 p_2} I \omega^I + \mu_{p_1 p_2} I \omega_1^I + \lambda_{p_1 p_2 a} \omega^a + \mu_{p_1 p_2 a} \omega_1^a,$$

$$\begin{aligned}\theta_{p_1\dots p_4} &= \lambda_{p_1\dots p_4} I \omega^I + \mu_{p_1\dots p_4} I \omega_1^I + \lambda_{p_1\dots p_4 a} \omega^a + \mu_{p_1\dots p_4 a} \omega_1^a, \\ \theta_{p_1 p_2 a} &= \lambda_{p_1 p_2 a} I \omega^I + \mu_{p_1 p_2 a} I \omega_1^I + \lambda_{p_1 p_2 a b a} \omega^b + \mu_{p_1 p_2 a b} \omega_1^b.\end{aligned}$$

Pirmasis fundamentalusis diferencialinis-geometrinis objektas

$$H^{(1)}({}^3NGr(1, n, 2n - 4)) = \{\lambda_{1_1 p_2 I}, \dots, \mu_{p_1 p_2 a b}\}$$

algebriskai panašus į tokį diferencialinį-geometrinį objektą:

$$\begin{aligned}\{ & B_{p_1\dots p_7}, B_{p_1\dots p_5}, B_{p_1 p_2 p_3}, B_p, \\ & C_{p_1\dots p_5}, C_{p_1 p_2 p_3}, B_{a p_1\dots p_5}, \\ & B_{a p_1 p_2 p_3}, A_{p_1\dots p_5}, A_{a p_1 p_2 p_3}, \tilde{A}_p, \\ & \tilde{C}_{a p_1 p_2 p_3}, C_p, A_{a p_1 p_2 p_3}, A_{a p}, \\ & E_{a p_1\dots p_5}, E_{a p_1 p_2 p_3}, E_{a p}, \\ & C_{a p_1 p_2 p_3}, C_{a p}, E_{a a p_1 p_2 p_3}, E_{a b p} \}.\end{aligned}$$

Šio objekto komponentės apibrėžia visas geometrines neholonominio komplekso  $({}^3)NGr(1, n, 2n - 4)$  savybes.

**3 atvejis.**  $rg \Lambda = 2$ .

Šiuo atveju atitinkamą (1) kompleksą žymėsime  $({}^2)Gr(1, n, 2n - 4)$ . Nagrinėjamu atveju kompleksą  $({}^2)Gr(1, n, 2n - 4)$  galima apibrėžti tokiomis diferencialinėmis lygtimis:

$$1) \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 + \omega^3 = 0; \quad (6)$$

arba

$$2) \omega_1^2 + \omega^3 = 0, \quad \omega_1^3 = 0; \quad (7)$$

arba

$$3) \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0. \quad (8)$$

Matome, kad tašką  $\vec{M}(t)$  atitinka  $(n - 2)$ -matė plokštuma

$$\Pi_{n-2}: \begin{cases} x^2 = 0, \\ x^3 = 0. \end{cases}$$

Mes įrodėme tokią teoremą.

**TEOREMA.** *Egzistuoja trys neholonominių kompleksų  $NGr(1, n, 2n - 4)$  tipai. Jų diferencialinės lygtys, parinkus judamąjį reperį, yra (4), (5), arba (6)–(8) pavidalo atitinkamai.*

Šiame darbe detalai nagrinėjami minėti 3 atvejai, pateikiamos atitinkamos geometrinės interpretacijos, kurių pagalba randami įvairūs algebriniai paviršiai.

SUMMARY

***K. Navickis. Differential geometry of nonholonomic complexes  $NGr(1, n, 2n - 4)$  in  $n$ -dimensional affine space***

In this article the differential geometry of the nonholonomic complex  $NGr(1, n, 2n - 4)$  in the  $n$ -dimensional affine space is studied. The classification of such complexes and geometric interpretations are given.

*Keywords:* affine space, complex, nonholonomic complex.