Liet. matem. rink, **47***, spec. nr.,* 2007, 389–394

Tiesinio optimizavimo modelis bimatricinio lošimo pusiausvyros situacijoms rasti

Sigutė VAKRINIENĖ (VGTU), Daina SUDŽIŪTĖ (VU)
el. paštas: sigute@micro.lt

Reziumė. Straipsnyje aptariami metodai pusiausvyrinėms strategijoms bimatriciniame lošime rasti. Siūlomas tiesinio optimizavimo modelis su papildomais binariniais kintamaisiais, leidžiantis surasti visas neišsigimusio bimatricinio lošimo pusiausvyros situacijas.

Raktiniai žodžiai: bimatricinis lošimas, pusiausvyrinės strategijos, dalinai sveikaskaitis tiesinis programavimas.

Įvadas

Paprasčiausias nekooperatinių lošimų teorijos modelis yra bimatricinis lošimas. Tai dviejų asmenų lošimas, kuriame kiekvienas lošėjas turi baigtines grynųjų strategijų aibes, o dvi matricos apibrėžia abiejų lošėjų išlošius kiekvienai galimai pasirinktų strategijų porai. Nešo pusiausvyra yra pagrindinė bimatricinio lošimo sprendinio sąvoka. Nešo pusiausvyra visada egzistuoja, bendru atveju – kaip mišriųjų strategijų pora.

Pusiausvyros situacijų suradimas yra sudėtingas uždavinys, ypač didelių matricų lošimams. Standartinis, daugiausiai žinomas metodas yra Lemke ir Howson [1] sukurtas algoritmas (LH) vienai pusiausvyrinei porai surasti.

Rahul Savani ir Bernard von Stengel [2] pristato kvadratinių bimatricinių lošimų klasę, kuriai šis metodas reikalauja eksponentinio matricos eilės atžvilgiu žingsnių skaičiaus

Audet “Enumeration of All Extreme Equilibria of Bimatrix Games” (EEE) algoritmas [3] naudoja Nash pusiausvyros geriausio atsako sąlygą ieškojimo medžiui, kuriame grynos strategijos yra arba geriausias atsakas arba nenaudojamos, sudaryti.

Igal Milchtaich ir Tadeusz Ostrowski [4] pateikia būtinas ir pakankamas sąlygas vienintelei pilnai mišriai pusiausvyrai egzistuoti ir paprastas formules jai rasti. Vorobjov [5], Bernard von Stengel [6], [7] modeliavo bei tobulino pusiausvyrų skaičiavimo metodus, surado būtinas ir pakankamas sąlygas tam, kad strategijų pora būtų pusiausvyrinė.

Šiame darbe nagrinėjamos dar vienos būtinos ir pakankamos sąlygos pusiausvyrinei porai bei galimybės panaudoti jas pusiausvyrų skaičiavimui (suradimui).

Stengel [6] būtinas ir pakankamas sąlygas pakeitus ekvivalenčiomis tiesinėmis sąlygomis gaunamas dalinai sveikaskaitis tiesinio programavimo uždavinys, leidžiantis surasti visas pusiausvyros situacijas neišsigimusiam lošimui. Tai atliekama keičiant tikslo funkcijos gradientą arba (ir) įvedant tiesinius apribojimus pusiausvyriniams išlošiams. Idėja pusiausvyrų skaičiavimui panaudoti optimizavimo modelį nėra nauja, dar 1964m O.L. Mangasarian [8] pasiūlė netiesinio optimizavimo uždavinį vienai pusiausvyrai surasti.

Būtinos ir pakankamos sąlygos

Turime bimatricinį lošimą

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

kuriame mišrios lošėjų strategijos apibrėžiamos sekančiu būdu:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

APIBRĖŽIMAS. Mišrių strategijų pora $(\overline{X}, \overline{Y})$ vadinama pusiausvyros situacija, kai visiems X ir Y teisingos nelygybės:

$$\overline{X}^T A \overline{Y} \geqslant X^T A \overline{Y} \quad \text{ir} \quad \overline{X}^T B \overline{Y} \geqslant \overline{X}^T B Y.$$

Grynųjų strategijų (eilučių) aibės poaibis I yra mišrios strategijos X spektras, jei $x_i > 0$, kai $i \in I$, ir $x_i = 0$, kai $i \notin I$. Analogiškai apibrėžiamas strategijos Y spektras J.

$A(I, J)$ ir $B(I, J)$ pažymėkime matricas, kurios gaunamos iš A ir B, išbraukus eilutes nepriklausančias I ir stulpelius nepriklausančius J.

TEOREMA. *Strategijų pora (X, Y) yra neišsigimusio bimatricinio lošimo pusiausvyra su išlošiais U ir V tada ir tik tada, kai*

$$x_i = \frac{\sum_{j\in J} B_{ij}}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} B_{ij}}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$y_j = \frac{\sum_{i\in I} A_{ij}}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} A_{ij}}, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij} y_j < U \ \textit{ visiems } \ i \notin I \ \textit{ ir } \ \sum_{i\in I} b_{ij} x_i < V \ \textit{ visiems } \ j \notin J.$$

Čia $U = \frac{\det(A(I,J))}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} A_{ij}}$ *ir* $V = \frac{\det(B(I,J))}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} B_{ij}}$, *o* A_{ij} *ir* B_{ij} *yra matricų* $A(I,J)$ *ir* $B(I,J)$ *adjunktai.*

Pusiausvyros situacijų būtų galima ieškoti išbandant visus galimus spektrų porų (I,J) atvejus. Neišsigimusio lošimo atveju, kai spektrai vienodo dydžio, o sąlygose esančios nelygybės yra griežtos, norint surasti visas mišriąsias pusiausvyras, šias sąlygas tektų tikrinti $(C_n^m + C_n^{m-1}C_m^{m-1} + C_n^{m-2}C_m^{m-2} + \cdots + C_n^2 C_m^2)$ kartų.

BERNARDO VON STENGELIO TEOREMA (2002 M.) *X ir Y yra bimatricinio lošimo (A,B) pusiausvyrinė pora tada ir tik tada, kai X, Y kartu su kokiais nors U ir V yra sprendiniai netiesinės sistemos*:

$$
\begin{aligned}
& U - AY \geqslant 0, \quad V - B^T X \geqslant 0, \\
& X^T(U - AY) = 0, \quad Y^T(V - B^T X) = 0, \\
& \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0, \ \ i = 1,2,\dots,m, \\
& \sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad y_j \geqslant 0, \ \ j = 1,2,\dots,n.
\end{aligned}
$$

Čia $U = \begin{bmatrix} U \\ U \\ \dots \\ U \end{bmatrix}$ *turi m komponenčių, o* $V = \begin{bmatrix} V \\ V \\ \dots \\ V \end{bmatrix}$ *– n komponenčių.*

LEMA. *Netiesinės sąlygos*:

$$
\begin{aligned}
& \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - U\Big) x_i = 0, \quad i = 1,2,\dots,m, \\
& \Big(\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i - V\Big) y_j = 0, \quad j = 1,2,\dots,n,
\end{aligned}
$$

kartu su tiesiniais apribojimais

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\dots,m, \ \ y_j \geqslant 0, \ \ j = 1,2,\dots,n,$$

yra ekvivalenčios tiesiniams apribojimams su binariniais kintamaisiais $s_i \in \{0,1\}$ ir $t_j \in \{0,1\}$:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - U = z_i, \quad i = 1,2,\dots,m, \\
& \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i - V = w_j, \quad j = 1,2,\dots,n,
\end{aligned}
$$

$$z_i \leqslant \mu s_i, \quad z_i \geqslant \varepsilon s_i, \quad s_i + x_i \leqslant 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$w_j \leqslant \mu t_j, \quad w_j \geqslant \varepsilon t_j, \quad t_j + y_j \leqslant 1, \quad y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Čia ε yra labai mažas teigiamas skaičius, o μ – labai didelis teigiamas skaičius.

TEOREMA. *Visas neišsigimusio bimatricinio lošimo pusiausvyros situacijas galima surasti keičiant tikslo funkcijos gradientą (a, b) taip pat įvedant papildomus tiesinius apribojimus išlošiams U ir V dalinai sveikaskaičiame tiesinio programavimo uždavinyje:*

$$\max(aU + bV),$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - U \leqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - U = z_i,$$
$$z_i \leqslant \mu s_i, \quad z_i \geqslant \varepsilon s_i, \quad s_i + x_i \leqslant 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i - V \leqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i - V = w_j,$$
$$w_j \leqslant \mu t_j, \quad w_j \geqslant \varepsilon t_j, \quad t_j + y_j \leqslant 1, \quad y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad s_i \in \{0, 1\}, \quad t_j \in \{0, 1\}.$$

Papildomi apribojimai gali būti tokie:

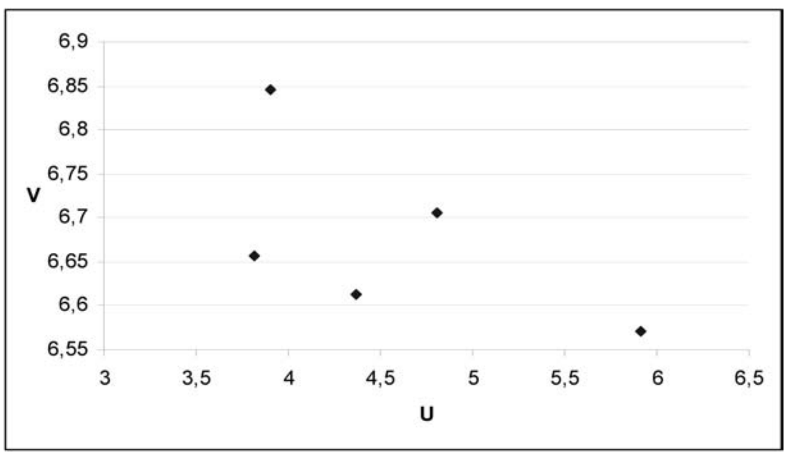
$C_1 \leqslant U + V \leqslant C_2$ arba $d_1 \leqslant U \leqslant d_2$ ir $h_1 \leqslant V \leqslant h_2$ (arba kitokie). Jei pasirinktoje juostoje arba stačiakampyje pusiausvyrinių išlošių poros nėra, uždavinio sprendimo procedūra (pavyzdžiui, SAS/OR procedūra LP) praneša – "problem infeasible". Tada reikia tikrinti sekančią suplanuoto „tinklo akutę". Jei „akutės" nėra pakankamai mažos, gali likti nesurastos pusiausvyros situacijos, kurios išlošių prasme labia nedaug skiriasi nuo surastųjų. Praktiniuose pritaikymuose tokios situacijos nėra svarbios.

PAVYZDYS. Surastos penkios mišrios pusiausvyros situacijos 10×10 bimatriciniam lošimui (A, B), kuris grynųjų pusiausvyrų neturi.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 4 & 6 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & 6 & 2 & 6 & 7 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 3 & 1 & 8 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 7 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 7 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 7 & 8 & 4 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 8 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 8 & 1 & 7 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 7 & 3 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

U	**V**	**U**	**V**	**U**	**V**
5,9143	6,5714	3,902	6,8462	3,8176	6,6566
X	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**
0	0	0	0	0	0
0	0,2	0,0769	0,1569	0,1369	0,2013
0	0	0	0,098	0	0,0692
0	0	0	0,4314	0	0,3836
0,1429	0,6857	0,2308	0	0,1462	0
0	0	0,0769	0	0,0951	0
0	0	0	0	0	0
0	0,1143	0	0,3137	0	0,2893
0,5714	0	0	0	0,0139	0,0566
0,2857	0	0,6154	0	0,6079	0

U	**V**	**U**	**V**
4,8098	6,7059	4,3678	6,6122
X	**Y**	**X**	**Y**
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0,3926	0	0,2871
0	0,1595	0	0,3079
0,3529	0,3067	0,4082	0,1364
0,2354	0	0,0408	0
0,0882	0,1411	0,0306	0,0744
0	0	0	0,1942
0	0	0,1224	0
0,3235	0	0,398	0



1 pav. Pusiausvyrinių išlošių poros bimatriciniame lošime (A, B).

Literatūra

1. C.E. Lemke, J.T. Howson, JR., Equilibrium points of bimatrix games, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **12**, 413–423 (1964).
2. R. Savani, B. von Stengel, Exponentially many steps for finding a Nash equilibrium in a bimatrix game, *Research Report LSE-CDAM-2004-03*, CDAM, London School of Economics. [Extended abstract in: *Proceedings of the 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (*FOCS*), IEEE Press, New York (2004), pp. 258–267.]
3. C. Audet, P. Hansen, B. Jaumard, G. Savard, Enumeration of all extreme equilibria of bimatrix games, *SIAM Journal of Scientific Computing*, **23**(1), 323–338 (2001).
4. I. Milchtaich, Computation of completely mixed equilibrium payoffs in bimatrix games, *International Game Theory Review*, **8**, 483–487 (2006).
5. N.N. Vorob'ev, *Foundations of Game Theory*: *Noncooperative Games*, Birkhäuser, Basel (1994).
6. B. Von Stengel, Computing equilibria for two-person games, in: *Handbook of Game Theory*, vol. 3, R.J. Aumann and S. Hart (Eds.), North-Holland, Amsterdam (2002), pp. 1723–1759.
7. B.Y. Rahul Savani, B. von Stengel, Hard-to-solve bimatrix games, *Econometrica*, **74**(2), 397–429 (2006).
8. O.L. Mangasarian, Equilibrium points in bimatrix games, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **12**, 778–780 (1964).

SUMMARY

S. Vakrinienė, D. Sudžiūtė. Linear model for coputation of equilibrium point in bimatrix game

The methods for finding Nash equilibrium in bimatrix game are introduced in this paper. Linear optimization model with binary variables for coputation of all equilibrium points in nongenerate bimatrix game is proposed.

Keywords: bimatrix game, equilibria, mixed-integer linear programming.