Kovariantiškumas ir kodiferencija sudarant optimalų vertybinių popierių portfelį

Igoris Belovas

Vilniaus Gedimino technikos universiteto docentas, daktaras
Vilnius Gediminas Technical University, Assoc. Prof., PhD
Saulėtekio al.11, LT-10223 Vilnius
El. paštas: rastine@adm.vtu.lt

Leonidas Sakalauskas

Vilniaus Gedimino technikos universiteto profesorius, hab. daktaras
Vilnius Gediminas Technical University, Prof., Hab. Dr.
Saulėtekio al.11, LT-10223 Vilnius
El. paštas: rastine@adm.vtu.lt

Audrius Kabašinskas

Matematikos ir informatikos instituto doktorantas
Institute of Mathematics and Informatics, PhD student
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
El. paštas: mathematica@ktl.mii.lt

Formuojant vertybinių popierių portfelį svarbu nustatyti ryšius tarp atskirų akcijų grąžų. Tačiau laikantis stabilumo prielaidos (modeliuojant akcijų grąžų sekas stabiliaisiais dėsniais) klasikiniai ryšio matai (kovariacija, koreliacija) negali būti taikomi. Todėl apibendrintasis Markovitzo uždavinys yra sprendžiamas su apibendrintais ryšio matais (kovariantiškumas, kodiferencija). Parodyta, kad kodiferencijos tarp atskirų finansinių instrumentų koeficientas gerokai supaprastina portfelio formavimą. Buvo sudaryti Baltijos šalių dešimties vertybinių popierių optimalūs portfeliai.

Ryšio tarp atskirų akcijų grąžų nustatymas yra viena iš esminių problemų, kylančių formuojant vertybinių popierių portfelį. Klasikinėje ekonomikoje ir statistikoje (kai empiriniai duomenys turi pirmąjį ir antrąjį momentus) ryšį tarp dviejų atsitiktinių dydžių (grąžų) apibrėžia kovariacija arba koreliacija. Laikantis akcijų grąžų (a.d.) stabilumo prielaidos kovariacijos ir koreliacijos (Pirsono koreliacijos koeficientas) skaičiuoti negalima: kai stabilumo parametras α atitinkamai mažesnis už 1 ir 2, nes tuomet atitinkamai neegzistuoja vidurkis ir dispersija (Belovas, Kabašinskas, Sakalauskas, 2005). Tokiais atvejais turėtų tikti ranginiai koreliacijos koeficientai (pvz., Spirmeno, Kendalo ir pan. (Kruopis 1993)) arba kontingencijos (Kobzar, 1978, p.175; Kendall, Stuart 1967) koeficientas, kuris parodo, ar sekų elgsena panaši ar ne. Kita vertus, tikslinga taikyti apibendrintus kovariacijos koeficientus – kovariantiškumą arba kodiferenciją. Ryšio matai yra apskaičiuojami laikantis stabilumo prielaidos – grąžos pasiskirsčiusios pagal stabilųjį dėsnį (Belovas, Kabašinskas, Sakalauskas, 2006). Įvertinę stabiliojo dėsnio parametrus ir apskaičiavę kodiferenciją ar kovariantiškumą, sprendžiame apibendrintąjį Markovitzo uždavinį.

Modelis ir duomenys

Nagrinėsime Baltijos šalių finansines sekas (paprastų vardinių akcijų kainų grąžas). Buvo nagrinėtas einamasis (Baltic I-list) ir oficialusis sąrašai (Baltic Main list) (Bendros Baltijos šalių vertybinių popierių rinkos biržos puslapis). Iš šių sąrašų buvo išrinkta 10 likvidžiausių sekų nuo 2000 m. sausio iki 2007 m. sausio. Mes naudojome biržos uždarymo metu nustatytą kainą (uždarymo kainą). Atlikdami analizę akcijų kainas keičiame grąžomis (tolydus atsitiktinis dydis):

$$X_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{P_i};$$

čia $\{P_i\}$ yra akcijų kainų seka. Atlikę šią transformaciją maksimalaus tikėtinumo metodu įvertiname stabiliųjų dėsnių parametrus: α, β, μ, σ. Gauti rezultatai pateikiami 1 lentelėje.

1 lentelė. ***Stabiliųjų sekų parametrų įverčiai***

Akcija	α	β	μ	σ
ETLAT	1,5309	-0,0649	0,0004	0,0067
GZE1R	1,2656	0,0559	0,0019	0,0091
LDJ1L	1,6094	0,1585	0,0019	0,0133
MKO1T	1,6313	0,1252	0,0030	0,0118
MNF1L	1,6283	0,1310	0,0020	0,0162
NRM1T	1,6158	0,0171	0,0008	0,0071
SNG1L	1,2872	0,3317	0,0059	0,0093
TEO1L	1,7832	0,0354	0,0000	0,0107
VNF1R	1,6789	0,2737	0,0028	0,0161
VNG1L	1,5384	0,1209	0,0025	0,0133

Ryšio tarp atskirų akcijų grąžų nustatymas

Nustatę ryšius tarp akcijų galime apibūdinti pačią rinką, deja, klasikiniai ryšio nustatymo metodai (koreliacija) čia netinka, nes mišrusis – stabilusis skirstinys neturi antrojo momento (dispersijos), be to, duomenys yra gana asimetriški, tad reikia kitokių, naujoviškų ryšio nustatymo būdų.

Samorodnitsky ir Taqqu (2000) siūlo neblogą alternatyvą, kai neegzistuoja pirmieji momentai (vidurkis, dispersija). Jie įveda du kovariacijos (angl. *covariance*) pakaitalus:

- kovariantiškumą (angl. *covariation*),
- kodiferenciją (angl. *codifference*).

Jei X_1 ir X_2 yra simetriniai stabilieji a.d. su vienodais parametrais α, tai kovariantiškumas apibrėžiamas taip:

$$\left[X_1, X_2\right]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{\langle\alpha-1\rangle}\Gamma(ds).$$

Tuomet a.d. X_1 skalės parametras $\sigma_{X_1}^{\alpha}$ apskaičiuojamas iš formulės $\left[X_1, X_1\right]_\alpha = \sigma_{X_1}^{\alpha}$;

čia α>1, $y^{\langle\alpha\rangle} = |y|^\alpha \operatorname{sign}(\alpha)$, Γ – atsitiktinio vektoriaus (X_1, X_2) spektrinis tankis.

Kai $\alpha = 2$, tai

$$\left[X_1, X_2\right]_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$$

ir

$\left[X_1, X_1\right]_2 = \sigma_{X_1}^2$ yra a.d. X_1 dispersija.

Tuomet galime apibrėžti tam tikrą a.d. $X \in S_\alpha$ (α>1) kovariantiškumo normą $\|X\| = \left(\left[X, X\right]_\alpha\right)^{1/\alpha}$ ir, jei $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$, tai norma sutampa su skalės parametru $\|X\|_\alpha = \sigma$.

Kodiferencija bendru atveju apibrėžiama charakteristinėmis funkcijomis (Nowicka-Zagrajek, Wylomanska, 2006):

$$cod_{X,Y} = \ln\left(E\exp\{i(X-Y)\}\right) - \ln\left(E\exp\{iX\}\right) -$$
$$-\ln\left(E\ \exp\{-iY\}\right) =$$
$$= \ln\left(\frac{E\exp\{i(X-Y)\}}{E\exp\{iX\}\cdot E\exp\{-iY\}}\right) =$$
$$= \ln\left(\frac{\phi_{X-Y}}{\phi_X \cdot \phi_{-Y}}\right),$$

ir empirinėmis charakteristinėmis funkcijomis

$$cod_{X,Y} = \ln\left(\frac{n \cdot \sum_{j=1}^{n} e^{i(X_j - Y_j)}}{\sum_{j=1}^{n} e^{iX_j} \cdot \sum_{j=1}^{n} e^{-iY_j}} \right).$$

Dviejų simetrinių (*SαS*) a.d. *X* ir *Y* ($0 < \alpha \le 2$) kodiferencija yra apibrėžiama remiantis skalės parametrais

$$cod_{X,Y} = \|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha - \|X - Y\|_\alpha^\alpha .$$

Kai $\alpha = 2$, tai $cod_{X,Y} = \mathrm{Cov}(X,Y)$.

Samorodnitsky ir Taqqu (2000) parodo, kad galioja

$$\left(1 - 2^{\alpha-1}\right)\left(\|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha\right) \le cod_{X,Y} \le$$

$$\le \|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha;$$

čia $1 \le \alpha \le 2$, tuomet sunormavę abi puses (padaliję iš $\|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha$) gausime koreliacijos koeficientą

$$\left(1 - 2^{\alpha-1}\right) \le corr_{X,Y} \le 1 .$$

Bendru atveju

$$\left(1 - 2^{\alpha-1}\right)\ln\left(\frac{1}{E\exp\{iX\} \cdot E\exp\{-iY\}}\right) \le cod_{X,Y} =$$

$$= \ln\left(\frac{E\exp\{i(X - Y)\}}{E\exp\{iX\} \cdot E\exp\{-iY\}}\right) \le \qquad ,$$

$$\le \ln\left(\frac{1}{E\exp\{iX\} \cdot E\exp\{-iY\}}\right),$$

tuomet sunormavę gausime, kad koreliacija tenkina sistemą

$$\left(1 - 2^{\alpha-1}\right) \le corr_{X,Y} = \frac{\ln\left(\dfrac{E\exp\{iX\} \cdot E\exp\{-iY\}}{E\exp\{i(X - Y)\}}\right)}{\ln\left(E\exp\{iX\} \cdot E\exp\{-iY\}\right)} \le 1 \cdot$$

Kai $\alpha = 2, \beta = 0$, tuomet $-1 \le corr_{X,Y} = \rho_{X,Y} \le 1$ sutampa su Pirsono koreliacijos koeficientu, o kai $0 < \alpha \le 1$, tai šis koreliacijos koeficientas gali būti tik neneigiamas.

Čia iškyla problema – nėra sukurta testų, kurie leistų patikrinti hipotezę apie normuotos kodiferencijos lygybę nuliui, tad hipotezei tikrinti taikome butstrapo (angl. *bootstrap method*) metodą (vieną iš Monte Karlo tipo metodų).

Norėdami nustatyti, ar Pirsono koreliacijos koeficientas lygus nuliui, naudojame Fišerio skirstinį, Spirmeno – atitinkamai Stjudento, o Kendalo – statistiką, kuri pasiskirsčiusi pagal Gauso dėsnį (Kruopis, 1993). Tikrinant hipotezę apie normuotos kodiferencijos ar apibendrintos koreliacijos koeficiento lygybę nuliui iškyla teorinių problemų. Todėl siūlomas toks algoritmas:

- Įvertiname visų empirinių sekų stabiliuosius parametrus (α, β, σ ir μ) ir stagnavimo tikimybę p;
- Sudarome atitinkamo (normuotos kodiferencijos ar kovariantiškumo) ryšio matricą ρ;
- Butstrapo metodu tikriname hipotezę apie $\rho_{i,j}$ lygybę nuliui:
  - poromis generuojame sekas (su įvertintais parametrais), pereiname į paskesnį punktą;
  - įvertiname ryšio koeficientą $\hat{\rho}_{i,j}^{k}$ tarp sekų *i* ir *j*, grįžtame į prieš tai buvusi punktą ir kartojame *N* (=10000) kartų;
  - sudarome gautų įverčių variacinę eilutę $\hat{\rho}_{i,j}^{(k)}$;
  - jei $\hat{\rho}_{i,j}^{([N \cdot 0{,}025])} \le \rho_{i,j} \le \hat{\rho}_{i,j}^{([N \cdot 0{,}975])}$, tai hipotezės apie $\rho_{i,j}$ lygybę nuliui atmesti negalime su pasikliovimo lygmeniu 0,05.

Apskaičiuokime kovariantiškumą ir kodiferenciją dešimčiai ilgiausias sekas turinčių akcijų (MNF1L, LDJ1L, VNF1R, NRM1T, MKO1T, GZE1R, ETLAT, VNG1L, SNG1L, TEO1L) ir sudarykime koreliacijų (2–3 lentelės) lenteles (sekų ilgiai suvienodinti ir yra 1427). Kita vertus, portfelio teorijoje reikalinga kovariacija arba jos atitikmuo, todėl pateikiame ir apibendintų kovariacijų lenteles (4–5 lentelės).

2 lentelė. ***Apibendrintas koreliacijos koeficientas (simetrinis) (visi reikšmingi su pasikliovimo lygmeniu, didesniu už 0,006)***

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
TEO1L	1	0,104	0,1466	0,3269	0,1344	0,4468	0,1613	0,2519	0,1522	0,1351
SNG1L	0,104	1	0,157	0,1269	0,1442	0,1219	0,1471	0,1271	0,1784	0,1322
VNG1L	0,1466	0,157	1	0,1587	0,2365	0,1599	0,1951	0,2277	0,1648	0,2056
	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
ETLAT	0,3269	0,1269	0,1587	1	0,1583	0,3423	0,17	0,179	0,1544	0,1556
GZE1R	0,1344	0,1442	0,2365	0,1583	1	0,1464	0,1862	0,2013	0,1546	0,1874
MKO1T	0,4468	0,1219	0,1599	0,3423	0,1464	1	0,1681	0,1873	0,1333	0,1512
NRM1T	0,1613	0,1471	0,1951	0,17[c]	0,1862	0,1681	1	0,2054	0,1943	0,1962
VNF1R	0,2519	0,1271	0,2277	0,179	0,2013	0,1873	0,2054	1	0,1584	0,1701
LDJ1L	0,1522	0,1784	0,1648	0,1544	0,1546	0,1333	0,1943	0,1584	1	0,18
MNF1L	0,1351	0,1322	0,2056	0,1556	0,1874	0,1512	0,1962	0,1701	0,18	1

3 lentelė. ***Kodiferencijos normos koeficientas (visi reikšmingi)***

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
TEO1L	1	0,0065	0,0088	0,34	0,011	0,8072	0,0081	0,0569	0,0155	0,0024
SNG1L	0,0065	1	0,0396	0,0021	0,0299	0,001	0,0042	0,0044	0,0033	0,0044
VNG1L	0,0088	0,0396	1	0,0115	0,1016	0,0172	0,0312	0,0442	0,0174	0,0848
ETLAT	0,34	0,0021	0,0115	1	0,019	0,3744	0,0136	0,02	0,0092	0,0082
GZE1R	0,011	0,0299	0,1016	0,019	1	0,0185	0,0246	0,0266	0,0085	0,0296
MKO1T	0,8072	0,001	0,0172	0,3744	0,0185	1	0,015	0,0267	0,0078	0,0111
NRM1T	0,0081	0,0042	0,0312	0,0136	0,0246	0,015	1	0,0231	0,0281	0,0447
VNF1R	0,0569	0,0044	0,0442	0,02	0,0266	0,026	0,0231	1	0,0017	0,0151
LDJ1L	0,0155	0,0033	0,0174	0,0092	0,0085	0,0078	0,0281	0,0017	1	0,0307
MNF1L	0,0024	0,0044	0,0848	0,0082	0,0296	0,0111	0,0447	0,0151	0,0307	1

4 lentelė. ***Kovariantiškumo koeficientas***

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
TEO1L	0,0031	0,0008	0,0012	0,0028	0,0013	0,0029	0,0013	0,0017	0,0014	0,0011
SNG1L	0,0008	0,0084	0,0014	0,0012	0,0015	0,0009	0,0014	0,001	0,0017	0,0012
VNG1L	0,0012	0,0014	0,0091	0,0016	0,0026	0,0012	0,0019	0,0018	0,0017	0,0019

*4 lentelė. **Kovariantiškumo koeficientas** (tęsinys)*

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
ETLAT	0,0028	0,0012	0,0016	0,0103	0,0018	0,0028	0,0018	0,0016	0,0017	0,0015
GZE1R	0,0013	0,0015	0,0026	0,0018	0,0125	0,0014	0,0021	0,002	0,0018	0,002
MKO1T	0,0029	0,0009	0,0012	0,0028	0,0014	0,0063	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012
NRM1T	0,0013	0,0014	0,0019	0,0018	0,0021	0,0013	0,0088	0,0017	0,0021	0,0019
VNF1R	0,0017	0,001	0,0018	0,0016	0,002	0,0013	0,0017	0,0071	0,0014	0,0014
LDJ1L	0,0014	0,0017	0,0017	0,0017	0,0018	0,0012	0,0021	0,0014	0,011	0,0018
MNF1L	0,0011	0,0012	0,0019	0,0015	0,002	0,0012	0,0019	0,0014	0,0018	0,0091

*5 lentelė. **Kodiferencijos koeficientas***

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
TEO1L	7,4E-04	1,1E-05	1,3E-05	6,0E-04	2,1E-05	6,0E-04	1,1E-05	3,5E-05	2,6E-05	3,0E-06
SNG1L	1,1E-05	4,2E-04	2,0E-05	1,6E-06	1,7E-05	1,6E-06	2,1E-06	5,7E-06	1,6E-06	2,9E-06
VNG1L	1,3E-05	2,0E-05	4,0E-04	8,7E-06	7,2E-05	2,2E-05	1,2E-05	4,4E-05	9,1E-06	3,9E-05
ETLAT	6,0E-04	1,6E-06	8,7E-06	1,1E-03	1,7E-05	6,0E-04	1,0E-05	2,6E-05	7,3E-06	6,9E-06
GZE1R	2,1E-05	1,7E-05	7,2E-05	1,7E-05	6,4E-04	3,3E-05	1,7E-05	4,0E-05	5,3E-06	2,6E-05
MKO1T	6,0E-04	1,6E-06	2,2E-05	6,0E-04	3,3E-05	7,2E-04	1,9E-05	1,4E-05	1,2E-05	1,2E-05
NRM1T	1,1E-05	2,1E-06	1,2E-05	1,0E-05	1,7E-05	1,9E-05	3,4E-04	2,2E-05	1,4E-05	1,9E-05
VNF1R	3,5E-05	5,7E-06	4,4E-05	2,6E-05	4,0E-05	1,4E-05	2,2E-05	2,4E-04	2,1E-06	1,2E-05
LDJ1L	2,6E-05	1,6E-06	9,1E-06	7,3E-06	5,3E-06	1,2E-05	1,4E-05	2,1E-06	5,2E-04	2,0E-05
MNF1L	3,0E-06	2,9E-06	3,9E-05	6,9E-06	2,6E-05	1,2E-05	1,9E-05	1,2E-05	2,0E-05	4,0E-04

Portfelio parinkimas

Sudarykime vertybinių popierių portfelį iš n akcijų. Kiekvienos akcijos svoriui įvertinti sprendžiame optimizavimo uždavinį (Barami, 2006; Krokhmal, Palmquist, Uryasev, 2002):

minimizuoti,

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{ij}-(1-\lambda)\sum_{i}^{n}\varpi_i\mu_i$$

pagal $\varpi_i, i=1,\ldots,n,$ su salygomis (1)

$$\sum_{i}^{n}\varpi_i=1,$$

$$\omega_i>0,\quad i=1,\ldots,n;$$

čia ω_i i-osios akcijos svoris portfelyje, μ_i – i-osios akcijos grąžų sekos vidurkis (α-stabiliuoju atveju parametras μ), σ_{ij} – kovariacija tarp i-osios ir j-osios akcijos grąžų (α-stabiliuoju atveju kovariacijos atitikmuo – kodiferencija), $\lambda\in[0,1]$ – optimizavimo konstanta (mes parenkame 1/2). Pirmoji tikslo funkcijos dedamoji charakterizuoja riziką, o antroji – tikėtiną grąžą.

Kadangi α-stabilaus modelio atveju neegzistuoja nei dispersija, nei standartinis nuokrypis, taip pat ir kovariacija (išskyrus α=2), portfelio svoriams optimizuoti gali būti naudojama ir tokia tikslo funkcija (Rachev, Tokat, Schwartz, 2003):

$$F(w)=c\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\sum_{i=1}^{n}w_i\left(X_{j,i}-\mu_i\right)\right|^{\gamma}\right)^{1/\gamma}-\sum_{i=1}^{n}w_i\mu_i\,;$$

čia $\gamma=\min(\alpha_i)$, $c=1/\gamma$, μ_i – atitinkamų vertybinių popierių vidutinės pelno normos (α-stabiliuoju atveju parametras μ), $X_{j,i}$ – i-ojo vertybinio popieriaus pelno norma j-uoju momentu. Toliau sprendžiamas optimizavimo uždavinys:

minimizuoti,

$$F(w)$$

$$\text{pagal } w_i,\ i=1,\ldots,n, \text{ su salygomis} \qquad (2)$$

$$\sum_{i}^{n}w_i=1,$$

$$w_i>0,\quad i=1,\ldots,n.$$

Į lygčių sistemas (1) ir (2) įtraukus papildomą sąlygą

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot\mu_i=\mu_P\,,$$

galima rasti optimalų portfelį su norima grąža μ_P.

Pavyzdžiui, iš duotųjų akcijų galima sudaryti portfelius su tokiais optimaliais svoriais (žr. 6 lentelę).

Pastebima, kad šios dienos kursu portfelis (1) duotų didesnį pelną.

Kartu su svorių optimizavimu svarbu nagrinėti ir portfelio diversifikavimo uždavinį, nes portfelyje esant daugiau (n>2) akcijų neretai svoriai tampa nykstamai maži ir investicija į tokias akcijas yra beprasmė, o kartais ir neįmanoma (reikia įsigyti pusę akcijos ir pan.).

Išvados

Darbe buvo tiriamas ryšys tarp Baltijos šalių akcijų grąžų ir atsižvelgiant į šį ryšį sudaromas optimalus vertybinių popierių portfelis. Finansinės sekos buvo modeliuojamos stabiliaisiais dėsniais, kuriems neegzistuoja antrasis momentas ($1{,}27<\alpha<1{,}78$). Kadangi dispersija neegzistuoja, vietoje kovariacijos buvo skaičiuojami kovariantiškumo ir kodiferencijos koeficientai. Šie ryšio matai buvo naudojami sudarant Baltijos šalių dešimties vertybinių popierių optimalų portfelį.

Sprendžiant (1) sistemą (su kodiferencijų matrica) didelių optimizavimo problemų neiškyla net esant n>10 akcijų, tačiau (2) sistemos (nenaudojant kodiferencijų matricos) atveju optimizavimas yra sudėtingas net esant nedideliam akcijų skaičiui. Taigi kodiferencijos tarp atskirų finansinių instrumentų koeficientas gerokai supaprastina portfelio sudarymą.

6 lentelė. ***Optimalūs vertybinių popierių portfelio svoriai išsprendus (1) ir (2) sistemas***

	(1)	(2)
TEO1L	0,01931127121831664739	0,00000458324159077873
SNG1L	0,14748791669745869859	0,20832600703143941412
VNG1L	0,06520432421240375531	0,07441099228178453540
ETLAT	0,02316874195215026799	0,00877015050036948456
GZE1R	0,06396124707815362131	0,26926385550778603184
MKO1T	0,00856555150906847772	0,12372356319707422667
NRM1T	0,13592436635025012537	0,04210572877402151554
VNF1R	0,28168613842527678859	0,11068516003731768138
LDJ1L	0,11707050740499311270	0,07642465720903288129
MNF1L	0,13761993515192852411	0,08628530221958331803

LITERATŪRA

BARAMI, S. (2006). Portfolio Optimization with Optimal Search. Prieiga per internetą: http://www.cs.ucla.edu/~siavosh/Portfolio_Selection_final.pdf

BELOVAS, I.; KABAŠINSKAS, A.; SAKALAUSKAS, L. (2005). Vertybinių popierių rinkos stabiliųjų modelių tyrimas. Iš *Informacinės technologijos 2005:* Konferencijos pranešimų medžiaga. Kaunas: Technologija, p. 439–462.

BELOVAS, I.; KABAŠINSKAS, A.; SAKALAUSKAS, L. (2006). Returns modelling problem in the Baltic equity market. In *Proceedings of the 5th International Conference on Operational Research: Simulation and Optimization in Business and Industry*. Kaunas: Technologija, p. 3–8.

Bendros Baltijos šalių vertybinių popierių rinkos biržos puslapis. Prieiga per internetą: www.omxgroup.com [žiūrėta 2007-01-20].

KENDALL, M.G.; STUART, A. (1967). *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 2. 2nd edition. London: Griffin.

KOBZAR, A. I. (1978). *Matematiko-statisticheskie metody v elektronnoj technike* (rus.). Moskva: Nauka.

KROKHMA,L P.; PALMQUIST, J.; URYASEV, S. (2002). Portfolio optimization with conditional Value-at-Risk objective and constraints. *The Journal of Risk* 4(2), p. 11–27.

KRUOPIS, J. (1993). *Matematinė statistika*. Vilnius: Mokslas.

NOWICKA-ZAGRAJEK, J.; WYLOMANSKA, A. (2006). The dependence structure for PARMA models with α-stable innovations. *Acta Physica Polonica* B37(11), p. 3071–3081.

RACHEV, S. T.; TOKAT, Y.; SCHWARTZ, E. S. (2003). The stable non-Gaussian asset allocation: a comparison with the classical Gaussian approach. *Journal of Economic Dynamics & Control* 27, p. 937–969.

SAMORODNITSKY, G.; TAQQU, M.S. (2000). *Stable non-Gaussian random processes, stochastic models with infinite variance*. New York-London: Chapman & Hall.

ON COVARIATION AND CODIFFERENCE IN OPTIMAL PORTFOLIO CONSTRUCTION

Igoris Belovas, Audrius Kabašinskas, Leonidas Sakalauskas

S u m m a r y

Constructing an optimal portfolio it is essential to determine possible relationships between different stock returns. However, under the assumption of stability (stock returns are modelled with stable laws) accustomed relationship measures (covariance, correlation) can not be applied. Thus generalized Markowitz problem is solved with generalized relationship measures (covariation, codifference). Portfolio construction strategies with and without codifference coefficients matrix are given. We show that the codifference application strongly simplifies the construction of the optimal portfolio. Optimal stock portfolios (with 10 most realizable Baltic States stocks) with and without codifference coefficients matrix are constructed.