*Liet. matem. rink,* **47**, *spec. nr.,* 2007, 508–516

# Agreguotų AR(1) procesų autoregresijos parametro tankio vertinimo metodų palyginimas

Dmitrij CELOV (VU), Remigijus LEIPUS (VU, MII), Virmantas KVEDARAS (VU)
el. paštas: dcelov@ktl.mii.lt, vkved@takas.lt, remigijus.leipus@mif.vu.lt

## 1. Deagregavimo uždaviniai bei nagrinėjami jų sprendimo metodai

Įvairiose srityse (pavyzdžiui, astronomijos, hidrologijos, makroekonomikos, sociologijos ir pan.) dažnai yra susiduriama su agreguotais duomenimis, kur stebimos tik agreguotos, o ne atskirų objektų ar subjektų charakteristikos. Agreguoti duomenys negali būti tokie pat informatyvūs apie individualių (mikro) procesų savybes, tačiau iš agreguotų duomenų tam tikrais atvejais galima atkurti bent dalį agregavimo metu prarastos informacijos. Pavyzdžiui, tai įmanoma darant prielaidą, kad agreguoti duomenys gauti iš nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių „elementarių“ dydžių su žinoma struktūra. Uždaviniai, kurių tikslas – iš agreguotos laiko eilutės atstatyti individualių procesų savybes, vadinami deagregavimo uždaviniais.

Toliau nagrinėjamame deagregavimo uždavinyje mikro lygmens laiko eilutės apibrėžiamos dvigubu stochastiniu procesu, kuriame ne tik triukšmo (inovacijų) komponentė, bet ir proceso parametrai yra atsitiktiniai. Uždavinio esmė – stebint *tik agreguotus duomenis*, įvertinti atsitiktinių parametrų bendrą skirstinį. Įvairius šio uždavinio aspektus nagrinėjo Dacunha–Castelle, Oppenheim (2001), Leipus ir kt. (2006) (LOPV), Chong (2006), Celov ir kt. (2007). Glaustą tipinių tokių agregavimo, deagregavimo uždavinių bei su jais susijusių tolimos priklausomybės sekų savybių apžvalgą galima rasti Celov ir Leipaus (2006) darbe.

Minėtuose darbuose nagrinėjamas individualių AR(1) procesų

$$Y_t^{(j)} = a^{(j)} Y_{t-1}^{(j)} + \eta_t + \varepsilon_t^{(j)}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

agregavimas[1], kuriuose $Y_t^{(j)}$ – $j$-ojo individo charakteristika, $\eta_t$ – individualiems procesams bendros inovacijos, $\varepsilon_t^{(j)}$ – individualios mikrolygmens inovacijos, sudarančios stipriąją balto triukšmo seką[2], $a^{(j)}$ – absoliučiai tolydus atsitiktinis parametras su nežinoma tankio funkcija $\varphi(x)$. Laikoma, kad dydžiai $a^{(j)}$, $\varepsilon_t^{(j)}$ ir $\eta_t$ yra neprik-

[1] Bendresnis modelio variantas yra nagrinėjamas, pavyzdžiui, Zaffaroni (2004), kuomet bendros inovacijos nusakomos $\rho^{(j)}\eta_t$, taip atsižvelgiant į heterogeninšką individų reakciją į bendruosius impulsus.

[2] Stipriuoju baltu triukšmu vadinama vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka $\varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$ su vidurkiu $E\varepsilon_t = 0$ ir dispersija $E\varepsilon_t^2 = 1$.

lausomi. Paprastumo dėlei (1.1) sekų agregavimo schemoje daroma prielaida, kad $\varepsilon_t^{(j)} = 0, \forall t < 0$ (Linden (1999), Chong (2006)).

Straipsnyje nagrinėjami ir palyginami du alternatyvūs deagregavimo metodai.

Pirmasis Chong (2006) siūlomas $\varphi(x)$ vertinimo metodas remiasi prielaida, jog ieškoma tankio funkcija nusakoma $m$-os eilės polinomu, todėl vertinimui galima panaudoti baigtinį skaičių polinominio tankio empirinių momentų. Iš teigiamų metodo savybių išskirtinas jo realizavimo paprastumas, multimodalumo savybė; tarp neigiamų – prastesnė aproksimacija už tolimą priklausomybę „atsakingų" tankio taškų aplinkose. Paminėtina, kad autorius korektiškos modelio formos parinkimui pasiūlo Wald tipo testą, nors alternatyva remiasi prielaida, jog tankis iš tikrųjų yra polinominis. Kartu straipsnyje pateikiamas informacinis kriterijus optimalios polinominio skirstinio eilės $m$ parinkimui, bei parodoma vertinimo modifikacija $[0, 1)$ atramą pakeičiant intervalu $(-1, 1)$. Detaliau apie Chong siūlomą vertinimo metodą pasakojama 2 skyriuje.

Nesunku matyti (žr., pvz., Granger (1980)), kad sumuojant $N$ (1.1) procesų, dominuoja bendrų inovacijų komponentė $N\eta_t$, kurios dispersija auga kaip $\mathrm{O}(N^2)$. Nesant šiam bendrajam nariui, agreguotas procesas būtų kitoks – individualių inovacijų dispersija didėtų eile $\mathrm{O}(N)$. Pastarasis atvejis nagrinėjamas, pavyzdžiui, Leipaus ir kt. (2006) darbe, kuriame siūloma deagregavimo schema, besiremianti AR(1) parametro skirstinio tankio aproksimavimu ortogonaliaisiais Gegenbauerio (ultrasferiniais) polinomais. Leipaus ir kt. (2006), Celov ir Leipaus (2006), Celov, Leipaus ir Philippe (2007) darbuose nagrinėjama individualių procesų lygtis, nusakoma tokiu AR(1) procesu su atsitiktiniu parametru:

$$Y_t^{(j)} = a^{(j)} Y_{t-1}^{(j)} + \varepsilon_t^{(j)}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{1.2}$$

Čia $a^{(j)}$ tankis turi semiparametrinį pavidalą

$$\varphi(x) = (1-x)^{d_1}(1+x)^{d_2}\psi(x), \quad d_1 > 0,\ d_2 > 0, \tag{1.3}$$

kur $\psi(x)$ yra tolydi $[-1; 1]$ intervale funkcija. Pastebėtina, kad lyginant su polinomine tankio funkcija, $\varphi(x)$ yra tinkamesnė nagrinėti spektrinio tankio ypatingų taškų aplinką. Tankio vertinimas remiasi tuo, kad individualių procesų bei agreguotos laiko eilutės autokovariacinės struktūros sutampa. Taigi, vertinant tankį, naudojami ne įprastiniai momentai, o autokovariacijos. (1.2) modelio vertinimas trumpai aprašytas 3 skyriuje.

4 šio straipsnio skyriuje šie du metodai palyginti taikant Monte Karlo modeliavimą ir aptartos abiejų metodų stipriosios bei silpnosios pusės. 5 skyriuje pateiktos baigiamosios pastabos.

## 2. Polinominio maišančio tankio vertinimas Chong metodu

Kaip minėta, Chong (2006) nagrinėjo atvejį, kuomet (1.1) modelio parametro $a \in [0; 1)$ tankis $\varphi(x)$ turi polinominį pavidalą:

$$\varphi(x) = \sum_{s=0}^{m} c_s x^s \mathbf{1}_{[0;1)}(x), \quad \varphi(x) \geqslant 0, \qquad \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{s=0}^{m} \frac{c_s}{s+1} = 1. \tag{2.1}$$

Vertinant Chong metodu, remiamasi $r$-ųjų momentų išraiška

$$E(a^r) = \sum_{s=0}^{m} \frac{c_s}{s+r+1}, \quad r = 0, \ldots, m. \tag{2.2}$$

Agreguojant (1.1) lygtis ir turint galvoje, kad $Y_{-1}^{(j)} = 0$, gaunama, kad $N$ individualių procesų empirinis vidurkis $\bar{Y}_t^{(N)} = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} Y_t^{(j)}$ turi pavidalą

$$\bar{Y}_t^{(N)} = \sum_{r=0}^{t} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (a^{(j)})^r \eta_{t-r} + \sum_{r=0}^{t} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (a^{(j)})^r \varepsilon_{t-r}^{(j)}.$$

Todėl, pagal tikimybę,

$$\bar{Y}_t^{(N)} \to \sum_{r=0}^{t} E(a^r) \eta_{t-r} =: \bar{Y}_t, \quad N \to \infty.$$

Papildomai darant prielaidą, kad aukščiau nusakytas procesas $\bar{Y}_t$ yra apgręžiamas, gaunama jo AR($\infty$) reprezentacija

$$\bar{Y}_t = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \bar{Y}_{t-j} + \eta_t, \quad \sum_{j=1}^{\infty} A_j L^j = 1 - \Big( \sum_{r=0}^{t} E(a^r) L^r \Big)^{-1}, \tag{2.3}$$

kurioje $L$ žymi pavėlinimo operatorių ($L\bar{Y}_t = \bar{Y}_{t-1}$). Koeficientai $A_j$ išreiškiami rekurentiškai per polinominio tankio momentus[3] ir atvirkščiai, momentai atstatomi iš AR($\infty$) koeficientų

$$E(a^s) = \sum_{r=0}^{s-1} E(a^r) A_{s-r}. \tag{2.4}$$

Turint „nupjautos“ AR($H$) lygties įverčius $\widehat{A}_j$, $j = 1, \ldots, H$ ir remiantis empiriniu (2.4) lygties analogu $\hat{\mu}_s = \sum_{r=0}^{s-1} \hat{\mu}_r \widehat{A}_{s-r}$, galima rasti momentų $\mu_s := E(a^s)$ įverčius $\hat{\mu}_s$. Čia $H$ turi pavidalą $H = \lambda n^{\beta}$, $1/2 < \beta < 1$, $\lambda > 0$, kur $n$ yra agreguotos sekos ilgis. Kadangi polinominis tankis nusakomas savo koeficientų vektoriumi $C = (c_0, c_1, \ldots, c_m)'$, tai žinant empirinių momentų vektorių $\widehat{\Lambda} = (1, \hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_m)'$

[3] Apgręžiant lygtį $\bar{Y}_t = \theta(L)\eta_t$ lygtį, čia $\theta(L) := 1 + \sum_{j=1}^{t} \theta_j L^j$, reikia išspręsti lygtį $\pi(L) := \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j L^j = 1/\theta(L)$ nežinomų parametrų $\pi_j$ (arba $\theta_j$) atžvilgiu. Ieškomi koeficientai yra atitinkamai $\pi_0 = 1$; $\pi_j = -\sum_{k=1}^{j} \theta_k \pi_{j-k}$, $0 < j \leqslant t$; $\pi_j = -\sum_{k=1}^{t} \theta_k \pi_{j-k}$, $j > t$ arba $\theta_0 = 1$; $\theta_j = -\sum_{k=1}^{j} \pi_k \theta_{j-k}$, $0 < j \leqslant t$; $\theta_j = 0$, $j > t$.

bei apibrėžiant pagalbinę matricą

$$\Omega = \begin{cases} \left(\frac{1}{s+r+1}\right)_{s,r=0}^{m}, & \operatorname{supp} a = [0;1); \\ \left(\frac{1-(-1)^{s+r+1}}{s+r+1}\right)_{s,r=0}^{m}, & \operatorname{supp} a = (-1,1), \end{cases}$$

iš lygybės $\Lambda = \Omega C$ nesunku rasti ieškomus įverčius $\widehat{C} = \Omega^{-1}\widehat{\Lambda}$.

**2.1 pastaba.** Polinomo eilės $m$ parinkimui Chong (2006) siūlo informacinį kriterijų, pagal kurį $\widehat{m} = \arg\min Q(m)$, čia $Q(m)$ yra atstumas tarp empirinių agreguoto proceso autokoreliacijų ir teorinių autokoreliacijų, kuriose vietoj teorinių polinominio tankio koeficientų įstatomi įverčiai $\widehat{C}$.

**2.2 pastaba.** Chong (2006) taip pat parodo, kad tolimos priklausomybės savybė[4] $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\sigma_{\bar{Y}}(h)| = \infty$ polinominio tankio atveju yra išpildyta tuomet, kai $\varphi(\pm 1) > 0$. Polinominis tankis blogai „veikia“ singuliarumo taškų 1 ir $-1$ aplinkose ir neapima Beta šeimos tankių, kurie lanksčiau aprašo tolimos priklausomybės parametrą.

## 3. Semiparametrinio maišančio tankio vertinimas LOPV metodu

Leipaus ir kt. (2006) (toliau LOPV) darbe nusakyta AR(1) procesų deagregavimo schema remiasi įvade apibrėžtomis prielaidomis, bei papildoma sąlyga, kad $E[1/(1-a^2)] < \infty$. Iš šių sąlygų išplaukia, kad (1.2) lygtys turi stacionarų sprendinį. Be to, remiantis Oppenheim ir Viano (2004), dalinių sumų seka $X_t^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} Y_t^{(j)}$, $t \in \mathbb{Z}$ silpnai konverguoja į stacionarų Gauso procesą $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, kai $N \to \infty$. Šis procesas vadinamas *agreguotu* procesu.

Laikoma, kad atsitiktinio dydžio $a$ tankis $\varphi(x)$ turi (1.3) semiparametrinę formą, kurioje $\psi(x)$, $x \in [-1;1]$ yra neneigiama ir tolydi taškuose $\pm 1$ funkcija, tokia kad $\psi(\pm 1) \neq 0$.

Remiantis $\varphi(x)$ apibrėžimu, nesunku rasti agreguoto proceso $X_t$ kovariacinę funkciją ir spektrinį tankį, kurie sutampa su $Y_t^{(j)}$ kovariacine funkcija bei spektriniu tankiu ir yra lygūs atitinkamai:

$$\sigma(h) = \int_{-1}^{1} \frac{x^{|h|}}{1-x^2}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \quad h \in \mathbb{Z};$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{|1 - x\mathrm{e}^{i\lambda}|^2}\, \mathrm{d}x, \quad \lambda \in [-\pi;\pi]. \tag{3.1}$$

[4]Kitas tolimos priklausomybės apibrėžimas siejamas su dažnio sritimi – tuomet tolima priklausomybė nusakoma spektrinio tankio elgesiu nulio aplinkoje: $f(\lambda) \sim |\lambda|^{-2d} L(\lambda)$, kai $\lambda \to 0$, $d \in (0; 0,5)$, o $L(\lambda)$ – lėtai kintanti prie 0 funkcija.

Pastebėsime, kad agreguotas procesas turi tolimos priklausomybės savybę (t.y., $\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\sigma(h)|=\infty$) tada ir tik tada, kai

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\infty. \tag{3.2}$$

Semiparametriniu atveju (1.3), šią savybę turėsime kai bent vienas iš parametrų $d_1$ ar $d_2$ yra mažesnis už 1.

Nežinomam (maišančiam) tankiui $\varphi(x)$ įvertinti, kai turimi agreguoti dydžiai $X_1,\dots,X_N$, o individualūs procesai (1.2) nestebimi, LOPV pasiūlė pasinaudoti pagalbine funkcija:

$$\zeta(x):=\frac{\varphi(x)}{(1-x^2)^\alpha},\quad \alpha>-1, \tag{3.3}$$

kuri, esant išpildytai sąlygai

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^2(x)}{(1-x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x<\infty,$$

priklauso klasei $L^2(\omega^{(\alpha)})$, kur $\omega^{(\alpha)}(x)=(1-x^2)^\alpha$ ir todėl gali būti išskleista $\alpha$-Gegenbauerio (ultrasferiniais) daugianariais $\zeta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\zeta_k G_k^{(\alpha)}(x)$ su koeficientais

$$\zeta_k=\sum_{j=0}^{k}g_{k,j}^{(\alpha)}\int_{-1}^{1}\varphi(x)x^j\,\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{k}g_{k,j}^{(\alpha)}\big(\sigma(j)-\sigma(j+2)\big),\quad k\geqslant 0. \tag{3.4}$$

Čia $g_{k,j}^{(\alpha)}$ yra $\alpha$-Gegenbauerio daugianario $G_k^{(\alpha)}(x)=\sum_{j=0}^{k}g_{k,j}^{(\alpha)}x^j$ koeficientai. Tikslias koeficientų $g_{k,j}^{(\alpha)}$ išraiškas galima rasti Leipaus ir kt. (2006) darbo B.1 priede. Tuomet maišantį tankį $\varphi(x)$ natūralu vertinti (3.4) išraiškoje $\sigma(j)$ kovariacijas pakeičiant jų empiriniais analogais $\widehat{\sigma}_n(j)=n^{-1}\sum_{i=1}^{n-j}X_iX_{i+j}$:

$$\widehat{\varphi}_n(x)=(1-x^2)^\alpha\sum_{k=0}^{K_n}G_k^{(\alpha)}(x)\sum_{j=0}^{k}g_{k,j}^{(\alpha)}\big(\widehat{\sigma}_n(j)-\widehat{\sigma}_n(j+2)\big).$$

**3.1 pastaba.** Pastarasis metodas nėra tinkamas bendresnio modelio (1.1) atveju, kadangi procesai $X_t^{(N)}$ nebekonverguoja į neišsigimusį atsitiktinį procesą. Taigi būtina nagrinėti $\bar{Y}_t^{(N)}$, tačiau ribinio proceso $\bar{Y}_t$ ir individualių procesų autokovariacinės funkcijos šiuo atveju yra skirtingos. Tam pakanka suskaičiuoti atitinkamas dispersijas. Iš tikrųjų, jei $\mathrm{D}\eta_t=\sigma_\eta^2$, $\mathrm{D}\varepsilon_t^{(j)}=\sigma_\varepsilon^2$, tuomet:

$$\mathrm{D}(Y_t^{(j)})=(\sigma_\eta^2+\sigma_\varepsilon^2)(1+\mathrm{E}a^2+\mathrm{E}a^4+\dots),$$
$$\text{tačiau }\ \mathrm{D}(\bar{Y}_t)=\sigma_\eta^2\big(1+(\mathrm{E}a)^2+(\mathrm{E}a^2)^2+\cdots\big).$$

**3.2 pastaba.** Praktiniam maišančio tankio vertinimui svarbu tinkamai parinkti Gegenbauerio polinomų skaičių $K_n$, kuris, anot Leipaus ir kt. (2006), neturėtų viršyti $(2\log(1+\sqrt{2}))^{-1}\log n$. Taip pat vertinimo kokybė priklauso nuo Gegenbauerio parametro $\alpha$ parinkimo. Leipaus ir kt. (2006) Monte Karlo skaičiavimai rodo, kad $\alpha$ parinkimas bendrai priklauso nuo $d_1, d_2$ reikšmių. Keliama hipotezė, kad jei bent vienas $d_1, d_2 > 0$, tai $\alpha = \min(d_1, d_2)$, kitaip $\alpha = 0$. Kadangi Gegenbauerio polinomai yra atskiras Jakobi polinomų atvejis, pastarųjų taikymas turi būti lankstesnis, nes tuomet išnaudojami abu maišančio tankio parametrai, kuriuos belieka tinkamai įvertinti. Paprastai tam pasinaudojama Whittle ar Geweke, Porter–Hudak tipo metodais. Pastarieji yra gana „reiklūs" duomenų kiekiui, todėl realiuose taikymuose (turint mažą duomenų skaičių) įvertinimo tikslumas gali būti nedidelis.

## 4. Metodų palyginimas imitaciniais Monte-Karlo tipo eksperimentais

Imitacinio skyrelio pagrindinis tikslas – ištirti, kaip nagrinėjami metodai geba atkurti atsitiktinio parametro tankį, esant skirtingoms prielaidoms bei agregavimo modeliams (su ir be bendrų inovacijų). Tikslo įgyvendinimui remiamasi Monte-Karlo (MK) imitaciniais eksperimentais. Eksperimentų tankiai parinkti remiantis šiais požymiais:

- tankio parametrine forma – polinominė arba Beta tipo;
- atrama – $[0;1)$ arba $(-1;1)$;
- modalumas – unimodalus arba bimodalus;
- AR(1) proceso forma – su (1.1) arba be (1.2) bendrų inovacijų.

Polinominių tankių (Poly2 bei Poly3) pavidalas parinktas pagal Chong (2006) straipsnio Kanados vartojimo išlaidų duomenims gautą įvertinimą, motyvuojant tai tinkamesne tankio forma, nei Chong darytuose MK ekperimentuose.[5] Beta tipo tankiai paimti analogiški Leipaus ir kt. (2006) straipsniui. Vertinant daroma prielaida, jog (1.3) maišančio tankio parametrai bei polinominio tankio eilė $m$ yra žinomi. Tuomet $\alpha$ parenkamas vadovaujantis 3.2. pastaba. Polinominio tankio parametras $m = 6$ Beta tipo eksperimentuose ir polinomo maksimaliam laipsniui polinominiuose eksperimentuose. Bandyti eksperimentai ir su Chong (2006) siūlomu automatiniu eilės $m$ prinkimu, tačiau rezultatai nėra patenkinami. Nupjovimo parametras $H = \lfloor 0,5 \cdot n^{0,75} \rfloor = 52$.

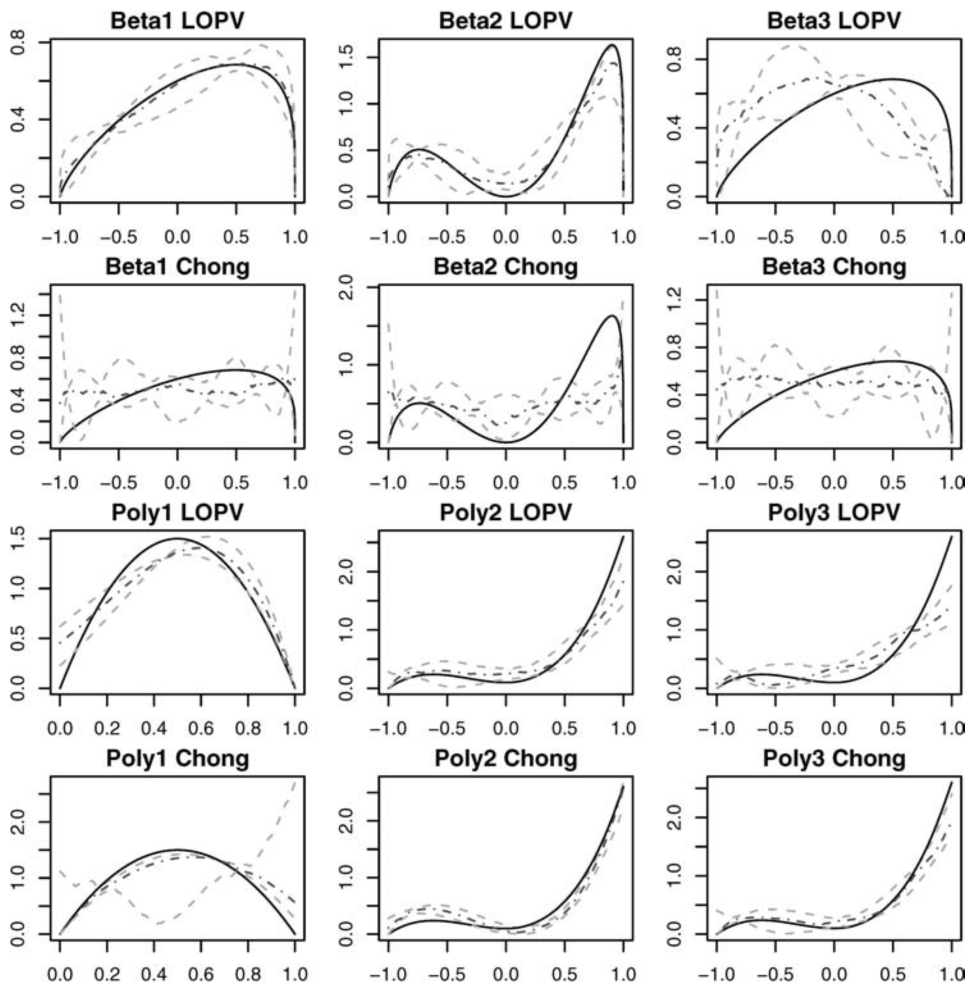
Imitaciniai eksperimentai atlikti su $N$=5000 unimodaliu ir $N$=10000 bimodaliu atveju, o $n$=500. Kiekvienam eksperimentui generuojama 100 nepriklausomų kopijų. Visur laikoma, kad $\varepsilon_t$ ir $\eta_t$ yra nepriklausomi standartiniai normalieji dydžiai. Pastebėtina, kad įvertinto tankio reikšmės yra nebūtinai teigiamos, todėl daroma papildoma korekcija, imant arba $\widehat{\varphi}_n^+(x)$ arba $\widehat{\varphi}_n(x) - \min(\widehat{\varphi}_n(x))$, normuotus iš atitinkamos Rymano sumos.

Skirtingų metodų tikslumui palyginti naudojamas integralinės vidutinės kvadratinės paklaidos (MISE) kriterijus: $\int_{-1}^{1} \mathrm{E}(\varphi(x) - \widehat{\varphi}_n(x))^2\,\mathrm{d}x$. Jo reikšmės, teorinį vidurkį pakeitus empiriniu, pateiktos 1 lentelėje.

[5] Chong MK eksperimentams taiko polinomus iki trečios eilės su atrama $[0;1)$ tačiau labai artimus tiesei.

1 lentelė. Monte-Karlo imitaciniai eksperimentai

| **Atvejis** | **AR(1)** | **Atrama** | $\varphi(x)$ | **MISE** Chong($m$, $H=52$) | LOPV($\alpha$) |
|---|---|---|---|---|---|
| Beta1 | (1.2) | $(-1;1)$ | $0,6(1-x)^{0,25}(1+x)^{0,75}$ | $0,171(6)$ | $\mathbf{0,033(0,25)}$ |
| Beta2 | (1.2) | $(-1;1)$ | $2,21x^2(1-x)^{0,25}(1+x)^{0,75}$ | $0,468(6)$ | $\mathbf{0,131(0,25)}$ |
| Beta3 | (1.1) | $(-1;1)$ | $0,6(1-x)^{0,25}(1+x)^{0,75}$ | $\mathbf{0,169(6)}$ | $0,174(0,25)$ |
| Poly1 | (1.2) | $[0;1)$ | $6x-6x^2$ | $1,162(2)$ | $\mathbf{0,107(1)}$ |
| Poly2 | (1.2) | $(-1;1)$ | $1,27x^3+1,2x^2+0,03x+0,1$ | $\mathbf{0,082(3)}$ | $0,171(0)$ |
| Poly3 | (1.1) | $(-1;1)$ | $1,27x^3+1,2x^2+0,03x+0,1$ | $\mathbf{0,118(3)}$ | $0,277(0)$ |




1 pav. Monte-Karlo imitacijos rezultatai.

Sugeneruotos tankio funkcijos, jų įverčių mediana bei 25 ir 75 proc. kvantiliai grafiškai iliustruoti 1 paveiksle.

LOPV tankio vertinimo metodas patikimai veikia, esant Beta tipo skirstiniams (tai bendrai seka iš maišančio tankio formos (1.3)) bei neblogai aproksimuoja polinominius tankius. Šio metodo įvertinimai suprastėja atsiradus bendroms inovacijoms. Tai patvirtina 3.1 pastabos samprotavimus.

Chong pasiūlytas algoritmas prastai aproksimuoja Beta šeimos skirstinius. Jis pasirodė prasčiau už LOPV net ir atskiro polinominio tankio su atrama [0;1) atveju. Tačiau Chong metodas yra tikslesnis, naudojant kitas generuotas Chong (2006) straipsnyje pateiktas polinominio tankio funkcijas. Taip pat metodas patikimiau veikia esant bendroms inovacijoms.

## 5. Baigiamosios pastabos

Atlikti eksperimentai rodo, kad Chong (2006) ir Leipaus ir kt. (2006) pasiūlyti metodai kai kuriais atvejais netinka. Šiame eksperimente palyginome tik Chong (2006) bei Leipaus ir kt. (2006) nagrinėtus duomenis generuojančius procesus. Tolimesnė analizė turėtų išsamiau atsižvelti į metodų jautrumą įvairesnėms tankio funkcijų klasėms, jų galimoms parametrų reikšmėms, individų ir stebėjimų skaičiaus imties dydžiui (kurie aktualūs tiriant įverčių konvergavimo greitį), „kritinių“ metodo savybes lemiančių parametrų parinkimui ($H, m, \alpha$ ir pan.), kitoms metodų prielaidoms (pavyzdžiui, atramos rėžio parinkimui, prielaidos apie proceso apgręžiamumą (ne)galiojimui Chong metodo atveju ir t.t.).

Taip pat pastebėtina, kad Chong įvertinimas yra pagrįstas momentų metodu. Panašią tankio funkcijos vertinimo schemą, kuri remiasi visais momentų apribojimais, o ne tik kovariacijomis, būtų galima panaudoti ir į LOPV panašiame tankio funkcijos vertinimo algoritme. Galbūt tai padėtų sukonstruoti vertinimo schemą, kuri išliktų pakankamai lanksti, bet taptų nejautri bendrųjų inovacijų sąlygojamai problemai.

## Literatūra

1. D. Celov, R. Leipus, Laiko eilučių agregavimo, deagregavimo uždaviniai ir tolima priklausomybė, *Lietuvos matematikos rinkinys*, **46**(spec. nr.), 255–262 (2006).
2. D. Celov, R. Leipus, A. Philippe, Time series aggregation, disaggregation and long memory, *Liet. matem. rink.*, **47**(4), 466–481 (2007).
3. T.T.-L. Chong, The polynomial aggregated AR(1) model, *Econometrics Journal*, **9**, 98–122 (2006).
4. D. Dacunha–Castelle, G. Oppenheim, Mixtures, aggregations and long memory, Université de Paris-Sud, Mathematiques, *Preprint* 2001-72 (2001).
5. C.W.J. Granger, Long memory relationships and the aggregation of dynamic models, *J. Econometrics*, **14**, 227–238 (1980).
6. R. Leipus, G. Oppenheim, A. Philippe, M.-C. Viano, Orthogonal series density estimation in a disaggregation scheme, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 2547–2571 (2006).
7. M. Linden, Time series properties of aggregated AR(1) processes with uniformly distributed coefficients, *Economics Letters*, **64**, 31–36 (1999).
8. G. Oppenheim, M.-C. Viano, Aggregation of random parameters Ornstein-Uhlenbeck or AR processes: some convergence results, *Journal of Time Series Analysis*, **25**, 335–350 (2004).
9. P. Zaffaroni, Contemporaneous aggregation of linear dynamic models in large economies, *J. Econometrics*, **120**, 75–102 (2004).

SUMMARY

***D. Celov, R. Leipus, V. Kvedaras. Comparison of estimation methods for the density of autoregressive parameter in aggregated AR(1) processes***

The article investigates the properties of two alternative disaggregation methods. First one, proposed in Chong (2006), is based on the assumption of polynomial autoregressive parameter density. Second one, proposed in Leipus *et al*. (2006), uses the approximation of the density by the means of Gegenbauer polynomials. Examining results of Monte-Carlo simulations it is shown that none of the methods was found to outperform another. Chong's method is narrowed by the class of polynomial densities, and the second method is not effective in the presence of common innovations. Both methods work correctly under assumptions proposed in the corresponding articles.

*Keywords:* random coefficient AR(1), aggregation, disaggregation, long memory, mixture density.