Liet. matem. rink., **47**, *spec. nr.,* 2007, 383–388

Tiesinio ir netiesinio optimizavimo modeliai investiciniam portfeliui pasirinkti

Sigutė VAKRINIENĖ (VGTU), Gintautas MISEVIČIUS (VU)
el. paštas: sigute@micro.lt

Reziumė. Darbe siūlomas maksimino principas investiciniams portfeliams parinkti. Portfelio komponentės surandamos sprendžiant tiesinio programavimo uždavinį viename modelyje ir netiesinio programavimo uždavinį kitame, įvedus rizikos vertinimo koeficientus. Eksperimentinėje dalyje šių modelių pagalba gauti neefektyvūs portfeliai testuojami remiantis Pabaltijo akcijų biržos statistiniais duomenimis. Įvairioms rizikos koeficientų reikšmėms pasiūlytųjų portfelių realizacijos lyginamos su efektyviųjų (Pareto optimalių) portfelių realizacijomis.

Raktiniai žodžiai: investicinis portfelis, tiesinis programavimas, netiesinis programavimas, matricinis lošimas.

Įvadas

Rizikingumas ir laukiama grąža yra svarbiausi faktoriai pasirenkant investicinio portfelio komponentes. Žinomame Markowitz portfelio optimizavimo modelyje [1] rizikai apibrėžti naudojama dispersija. Maksimizuojant laukiamą vidutinę portfelio grąžą, dispersija fiksuojama, arba minimizuojant dispersiją fiksuojama vidutinė grąža. Tokiu būdu sprendžiant NTP uždavinius gaunami efektyvūs (Pareto optimalūs) portfeliai. Netiesinio programavimo uždavinių sprendimas yra susijęs su sunkumais, kai nežinomųjų (portfelio komponenčių) skaičius yra didelis. Skirtingų autorių yra siūlomi įvairūs tiesiniai rizikos matavimo metodai.

Rizika matuojama naudojant absoliutųjį nuokrypį Papahristodoulou ir Dotzauer [2] aprašytuose tiesiniuose modeliuose optimaliam portfeliui gauti

Naudojant parametrinio tiesinio programavimo modelius, straipsnyje [4] nagrinėjamas optimalios investavimo strategijos, garantuojančios tam tikrą vidutinį pelną, stabilumas bei dinamika kintant pelno koeficientams bei investuojamų lėšų kiekiui. Stochastinio modelio pagalba, kai žinomas atsitiktinių pelno koeficientų pasiskirstymo dėsnis ir parametrai, surandamas investavimo planas su duotu pasikliovimo lygmeniu maksimizuojantis apatinę pelno ribą. Kitas stochastinio programavimo uždavinys naudojamas ieškant investavimo strategijos, kuri maksimizuotų tikimybę, jog apatinė pelno riba bus nemažesnė už fiksuotą dydį

Optimalios investavimo strategijos suradimo problema straipsnyje [3] taip pat modeliuojama naudojant matricinį lošimą ir parametrinį programavimą.

Modelio pasirinkimas priklauso nuo to, kokios daromos prielaidos apie žinomus arba dalinai žinomus uždavinio parametrus. Paprastai vidutinis laukiamas pelnas nėra tiksliai žinomas, nes priklauso nuo rinkos būsenos ateityje, o galimų rinkos būsenų tikimybės taip pat nėra žinomos. Esant tokio tipo neapibrėžtumui problemos matematiniu modeliu gali būti matricinis „lošimas su gamta“, kartais vadinamas statistiniu lošimu.

Rinkos būsenas galima įvardinti įvairiai: geriausia, blogiausia, vidutinė ar kitokia pagal praėjusių laikotarpių stebėjimus. Mūsų darbe pasiūlytieji portfeliai buvo konstruojami remiantis pusmečio statistiniais duomenims apie akcijų kainas, o rinkos būsenomis pasirinktos tiesiog šešios skirtingos atitinkamo pusmečio mėnesių situacijos.

Gauto matricinio lošimo elementai, iš tikrųjų, jei kalbame apie būsimas atsitiktinių portfelio grąžų realizacijas, yra atsitiktiniai dydžiai, kurių skaitinių charakteristikų (vidurkio ir vidutinio kvadratinio nuokrypio) taškinius įverčius turime. Rizikos vertinimas į sumodeliuotą matricinį lošimą gali būti įvedamas įvairiai. Kada matricos elementus formuojame iš vidurkio atimdami vidutinį kvadratinį nuokrypį (padaugintą iš rizikos svorio koeficiento), modeliuojami neefektyvūs portfeliai, kurie gaunami sprendžiant TP uždavinį, surandantį optimalią mišrią strategiją sukonstruotam matriciniam lošimui.

Kitu atveju matricos elementai yra tiesiog kiekvienos firmos kiekvieno mėnesio pelno normų vidurkiai, o iš kiekvienos maksimino strategijos ieškančio TP uždavinio tiesinės nelygybės kairės pusės atimamas atitinkamo mėnesio portfelio grąžos vidutinis kvadratinis nuokrypis (padaugintas iš rizikos svorio koeficiento). Tada uždavinys tampa netiesiniu, o jo sprendiniai – vėl neefektyvaus investicinio portfelio komponentės nesutampa su tiesinio uždavinio sprendiniais tam pačiam rizikos vertinimui (svorio koeficientui). Kad testuodami portfelius galėtume lyginti su efektyviaisiais, šiems iš efektyviųjų portfelių aibės pasirinkti naudojome tuos pačius rizikos svorio koeficientus.

Matematiniai modeliai

Tegul c_{ij} yra j-osios firmos akcijų kaina i-ąją dieną.

Pelno normas skaičiuosime pagal formulę $a_{ij} = (\frac{c_{ij}}{c_{i-kj}} - 1)100\%$. Eksperimentinėje dalyje $k = 1$.

Pasirinktam portfeliui $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sumas $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ vadinsime portfelio P grąžos reikšmėmis (čia a_{ij} yra pelno normos m dienų laikotarpio, kurio duomenis naudojame konstruodami portfelį). Šio portfelio grąžos realizacijomis sekančiame laikotarpyje vadinsime sumas $b_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j$, čia b_{ij} yra j-osios firmos acijų pelno norma i-ąją sekančio laikotarpio dieną.

Portfelio P vidutinė grąža $E(P)m$ dienų laikotarpyje skaičiuojama pagal formulę $E(P) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} x_j$, čia $\overline{a_j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ yra j-osios firmos akcijų pelno normos vidurkis stebėtam m dienų ilgio laikotarpiui. $E(R)$ pažymėkime portfelio grąžos realizacijų vidurkį sekančiam m dienų laikotarpiui. Tada $E(R) = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j} x_j$, o $\overline{b_j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}$ yra j-osios firmos akcijų pelno normos vidurkis sekančiam laikotarpiui.

Jei pelno normos yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai, portfelio grąžos dispersija yra $S^2(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_i x_j$, čia k_{ij} yra i-osios ir j-osios firmų pelno normų kovariacja.

Efektyviojo prtfelio $P_{ef} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ komponentes surandame spręsdami netiesinio programavimo uždavinį:

$$\max W$$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} x_j - r\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_i x_j} \geqslant W,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Čia r yra svorio koeficientas, parodantis, kaip investuotojas vertina riziką. Eksperimentinėje dalyje svorio koeficientų reikšmės buvo imamos iš intervalo [0;3]

Pažymėkime, kad k-ojo mėnesio akcijų pelno normų vidurkis j-ąjai firmai yra atsitiktinis dydis n_{kj}, kurio empirinius vidurkį $\overline{\overline{a_{kj}}}$ ir nuokrypį $\overline{s_{kj}}$ surandame..

Suradę pirmojo lošėjo optimalią mišrią strategiją matriciniame lošime $[\overline{\overline{a_{kj}}} - r\overline{s_{kj}}]^T$, gauname komponentes portfelio P_m, priklausančio nuo pasirinkto rizikos svorio koeficiento r. Tam reikia išspręsti tiesinio programavimo uždavinį:

$$\max V,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\overline{\overline{a_{kj}}} x_j - r s_{kj}) \geqslant V, \quad k = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Čia l yra rinkos būsenų skaičius.

Maksimino principu parenkamos portfelio komponentės, kurios būtų buvę optimalios „blogiausią“ laikotarpio, kurio duomenis naudojame, mėnesį (arba mėnesius). Šis portfelis galėtų garantuoti vidutinę grąžą V, jei situacija akcijų biržoje netaptų dar „blogesne“.

Modifikuodami tiesinio programavimo uždavinį, skirtą matricinio lošimo $[\overline{\overline{a_{kj}}}]^T$ maksimino strategijai gauti, gauname netiesinio programavimo uždavinį

$$\max V,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\overline{\overline{a_{kj}}} x_j - r\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_i x_j}\right) \geqslant V, \quad k = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

kurio sprendinys bus portfelio P_{st} komponentės, taip pat priklausančios nuo rizikos svorio koeficiento r.

Eksperimentinė dalis

Turimus Pabaltijo akcijų biržos 2005 ir 2006 metų statistinius duomenis, suskaidėme į keturis pusmečio ilgio laikotarpius. Trijų tipų portfelius P_{ef}, P_m ir P_{st} konstravome keturis kartus: pagal 2005 metų pirmo pusmečio, antro pusmečio, 2006 metų pirmo pusmečio ir visų 2005 metų statistinius duomenis. Kiekvieną portfelį testavome apskaičiuodami jo grąžų realizacijas sekančiame laikotarpyje (2005 metų antrame pusmetyje, 2006 metų pirmame, antrame pusmečiuose ir visų 2006 metų laikotarpyje)

Prieš tai, suskaičiavę 100 firmų 2006 metu antro pusmečio pelno normų vidurkius, pasirinkome 20 firmų, kurių pelno normų vidurkiai buvo didžiausi. Tolygiojo portfelio P_t, kurio visos komponentės lygios, t.y. $x_j = 0.05$, $j = 1, \ldots, 20$, vidutinė pelno norma konkrečiam laikotarpiui galėtų būti indeksas įvertinantis šių 20 firmų akcijų rinkos būseną šiame laikotarpyje.

	Indeksas $E(P_t)$
2005 pirmas pusmetis	0,611356
2005 antras pusmetis	0,782625
2006 pirmas pusmetis	0,038018
2006 antras pusmetis	0,232484

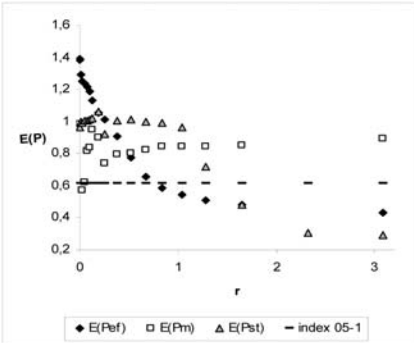
Pasirinktojo indekso reikšmės aiškiai parodo lėtą akcijų rinkos augimą 2005 metais, didelį nuosmukį 2006 metų pirmame pusmetyje ir didesnį augimą antrame šių metų pusmetyje. 2006 metų akcijų rinkos būsena (pasirinktoms firmoms) palyginus su 2005 metais yra gerokai blogesnė. Lygindami įvairių sukonstruotų portfelių grąžos realizacijų skaitines charakterstikas galime matyti, kaip jie valdo neišvengiamą mažesnę arba didesnę riziką krentančioje rinkoje, arba, kaip išnaudoja augančios rinkos privalomus.

Palyginsime portfelių grąžos reikšmių (konstravimo laikotarpyje) vidurkių $E(P)$ priklausomybę nuo rizikos svorio koeficiento r ir šių portfelių grąžos realizacijų (sekančiame laikotarpyje) vidurkius $E(R)$ tiems patiems rizikos svorio koeficientams. Matome, kad lėtai augančioje 2005 metų rinkoje geriausi grąžos realizacijų vidurkiai buvo gauti portfeliams P_m su mažesniais už 1 ir portfeliams P_{st} su didesniais už 1 rizikos svorio koeficientais (2 pav.).

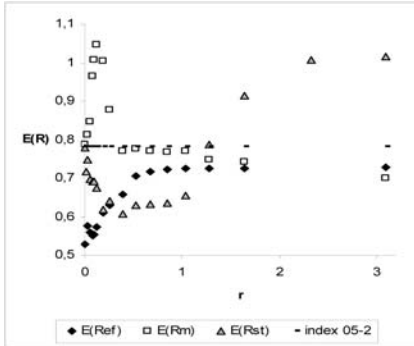
Greitai augančioje 2006 metu rinkoje geriausius realizacijų vidurkius stebime portfeliams P_m su didesniais už 0,3 ir portfeliams P_{st} su mažesniais už 0,1 rizikos svorio koeficientais. Abiem atvejais efektyviųjų portfelių P_{ef} reolizacių vidurkiai mažesni.

Patikrinę portfelių grąžų realizacijas 2006 metų pirmame pusmetyje, matome, kad greitai krintančioje rinkoje grąžos realizacijų vidurkiai didžiausi portfeliams P_{ef} su mažais (mažesniais už 0,2) svorio koeficientais, o didesniems svorio koeficientams didesni portfelių P_{st} grąžų realizacijų vidurkiai. 2006 metų grąžų realizacijų vidurkiai parodo, kad lėčiau krintančioje rinkoje rezultatai panašūs, kap greitai krintančioje, aiškiai matosi žemi portfelių P_m grąžų realizacijų vidurkiai.

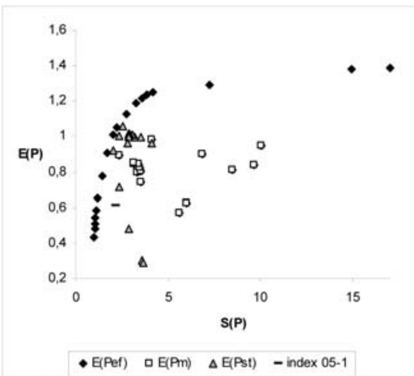
Galime teigti, jog greitai krintančioje rinkoje visų portfelių „pažadai“ $E(P)$ ir jų realizacijos $E(R)$ yra vienas kito atžvilgiu išsidėstę visai panašiai, tik realizacijų vidurkiai sumažėję tiek, kiek sumažėjo indeksas. Tai reikštų, kad, kai akcijų kainos smarkiai krenta, jos visoms firmoms krenta panašiai. Augančios rinkos atveju $E(P)$ ir $E(R)$ paveikslėliai visai nepanašūs (kaip ir 1 pav. ir 2 pav.).



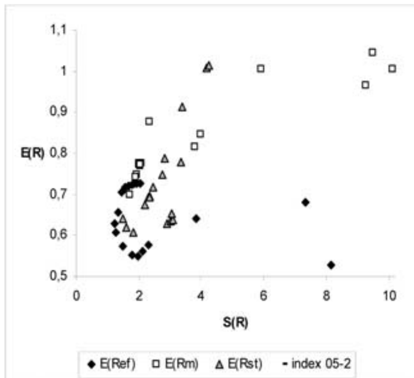
1 pav.



2 pav.



3 pav.



4 pav.

3 pav. ir 4 pav. matome portfelių gražų reikšmių konstravimo laikotarpyje vidurkius $E(P)$ (ordinatė) ir vidutinius kvadratinius nuokrypius $S(P)$ (abscisė), taip pat portfelių gražų realizacijų sekančiame laikotarpyje vidurkius $E(R)$ (ordinatė) ir vidutinius kvadratinius nuokrypius $S(R)$ (abscisė).

4 pav. matome, kad 2005 metų antrame pusmetyje, šiek tiek paaugus akcijų rinkai, beveik visų, pagal pirmo pusmečio statistinius duomenys sukonstruotų efektyviųjų portfelių P_{ef} realizacijos antrą pusmetį R_{ef} tampa neefektyviomis. Didesnius vidurkius $E(R)$ tiems patiems vidutiniams kvadratiniams nuokrypiams $S(R)$ duoda beveik visi portfeliai P_m ir P_{st}, gauti remiantis maksimino principu.

Galime teigti taip pat, kad akcių rinkai smarkiai paaugus (2006 metai) efektyvieji portfeliai vėl prarado savo efektyvumą.

Smarkiai krentančios rinkos atveju mažų nuokrypių portfelių realizacijų vidurkiai visiems portfeliams beveik sutampa, o aukštus grąžų realizacijų vidurkius pasiekiantys portfeliai P_{ef} turi didelius vidutinius kvadratinius nuokrypius (riziką).

Panašūs pastebėjimai lėčiau krintančios rinkos atveju. Abiem atvejais portfelio P_{st} realizacijos stabiliausios.

Bendras išvadas, kad augančios rinkos atveju geresnius rezultatus pasiekia portfeliai sukonstruoti remiantis maksimino principu nei efektyvieji Markowitz portfeliai, ir, kad krintančios rinkos atveju portfeliai P_m ir P_{st} yra mažiau rizikingi silpnina tai, kad portfeliai šiame darbe buvo konstruojami ir testuojami naudojant neilgo laikotarpio istorinius statistinius duomenis (2 metai) toms pačioms tik dvidešimčiai firmų.

Literatūra

1. H.M. Markowitz, Portfolio selection, *The Journal of Finance*, **7**, 77–91 (1952).
2. C. Papahristodoulou, E. Dotzauer, Optimal portfolios using linear proramming models, *Yournal of Operations Res earch Society*, **55**, 1169–1177 (2004).
3. S. Vakrinienė, A. Pabedinskaitė, Heuristic analysis of investment strategy, *Ūkio technologinis ir ekonominis vystymas*, **XII**(1), 62–67 (2006).
4. S. Vakrinienė, A. Pobedinskaitė, Параметрические и стохастические модели оптимального инвестирования, *Transport and Telecommunications*, **7**(3), 448–458 (2006).

SUMMARY

S. Vakrinienė, G. Misevičius. Linear and non-linear optimization models for the selection of investment portfolio

This research suggests a maxmin model for the selection of investment portfolios. The risk evaluation coefficients are introduced. The components of portfolio are found by solving linear programming task in one model and non-linear programming task in the other. In the experimental part of the research ineffective portfolios exerted from these models are tested referring to the statistical data of the Baltic stock market. Realizations of the suggested portfolios with different risk coefficient values are compared to realizations of effective (Pareto optimal) portfolios.

Keywords: investment portfolio, linear programming, non-linear programming, matrix game.