

Dviejų paviršių sankirtos kreivės diferencialinė geometrija

Kazimieras NAVICKIS (VU)

el. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Reziumė. Šiame darbe nagrinėjama dviejų trimatės euklidinės erdvės paviršių sankirtos kreivės diferencialinė geometrija. Skyrium imant, išvedamos formulės tokios kreivės kreivumui ir sukiniui apskaičiuoti.

Raktiniai žodžiai: paviršius, kreivė, kreivumas, sukinyš.

Tarkime, kad turime du trimatės euklidinės erdvės paviršius S_1 ir S_2 , apibrėžtus lygtimis

$$S_1: F(x^1, x^2, x^3) = 0$$

ir

$$S_2: x^i = x^i(u^1, u^2);$$

čia $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$. Šių paviršių sankirtos kreivės $\gamma = S_1 \cap S_2$ taškai tenkina tapatybę

$$F(x^i(u^\alpha)) \equiv 0; \quad (1)$$

čia $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2$. Pažymėkime

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{\partial F}{\partial x^i}, & F_{ij} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}, \\ F_{ijk} &= \frac{\partial^3 F}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}, \dots; \\ x_\alpha^i &= \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, & x_{\alpha\beta}^i &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}, \\ x_{\alpha\beta\gamma}^i &= \frac{\partial^3 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma}, \dots \end{aligned}$$

Iš (1) tapatybės išplaukia, kad

$$(F_i x_\alpha^i) du^\alpha = 0.$$

Pažymėkime

$$p_\alpha = F_i x_\alpha^i.$$

Iš lygybės

$$p_\alpha du^\alpha = 0$$

gauname, kad

$$du^\alpha = \lambda \cdot p^\alpha;$$

čia λ – proporcingumo daugiklis,

$$p^\alpha = \sigma^{\alpha\beta} p_\beta$$

ir

$$(\sigma^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Paviršiaus S_2 vektorinė lygtis

$$S_2: \vec{r} = x^i(u^\alpha)\vec{e}_i;$$

čia $\{\vec{e}_i\}$ – orthonormuoti trimatės euklidinės erdvės bazė. Išilgai sankirtos kreivės γ

$$d\vec{r} = \vec{r}_\alpha du^\alpha = \lambda p^\alpha \vec{r}_\alpha;$$

čia $\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha}$.

Iš čia išplaukia, kad

$$(d\vec{r})^2 = \lambda g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta;$$

čia $g_{\alpha\beta}$ yra paviršiaus S_2 pirmosios kvadratinės formos koeficientai:

$$g_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta.$$

Funkcijos \vec{r} antrosios eilės diferencialas

$$d^2\vec{r} = (\lambda \cdot dp^\alpha + p^\alpha \cdot d\lambda)\vec{r}_\alpha + \lambda_{\alpha\beta} p^\alpha du^\beta;$$

čia $\vec{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$.

Remiantis Gauso lygtimis ([1], 538 psl.)

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + A_{\alpha\beta} \vec{n};$$

čia $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ – paviršiaus S_2 Kristofelio antrosios rūšies simboliai, $A_{\alpha\beta}$ – šio paviršiaus antrosios kvadratinės formos koeficientai ir \vec{n} – vienetinis šio paviršiaus normalės vektorius.

Kita vertus,

$$\begin{aligned} dp_\alpha &= (F_{ij} x_\alpha^i x_\beta^j + F_i x_{\alpha\beta}^i) du^\beta = \\ &= \lambda (F_{ij} x_\alpha^i x_\beta^j + F_i x_{\alpha\beta}^i) p^\beta, \\ dp^\alpha &= \lambda \cdot A^\alpha; \end{aligned}$$

čia

$$A^\alpha = \sigma^{\alpha\beta} (F_{ij} x_\beta^i x_\gamma^j + F_i x_{\beta\gamma}^i) p^\gamma.$$

Pažymėkime

$$\begin{aligned} B^\gamma &= A^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma p^\alpha p^\beta, \\ C &= A_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta. \end{aligned}$$

Tada

$$d^2 \vec{r} = (\lambda^2 B^\alpha + p^\alpha \cdot d\lambda) \vec{r}_\alpha + \lambda^2 \cdot C \cdot \vec{n}.$$

Iš čia gauname, kad

$$d\vec{r} \times d^2 \vec{r} = \lambda^3 \sqrt{g} (q^\alpha \vec{r}_\alpha + D \cdot \vec{n});$$

čia

$$\begin{aligned} g &= \det(f_{\alpha\beta}); \\ q^\alpha &= C \cdot g^{\alpha\beta} p_\beta; \\ D &= -B^\alpha p_\alpha; \\ (g^{\alpha\beta}) &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabar matome, kad

$$(d\vec{r} \times d^2 \vec{r})^2 = \lambda^6 \cdot g \cdot (g_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta + D^2).$$

Mes įrodėme tokią teoremą.

1 teorema. Dviejų paviršių S_1 ir S_2 sankirtos kreivės γ kreivumas k apskaičiuojamas pagal formulę

$$k = \frac{\sqrt{g(g_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta + D^2)}}{(g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta)^{3/2}}.$$

Vektorinės funkcijos \vec{r} trečiosios eilės diferencialas

$$d^3 \vec{r} = T^\alpha \vec{r}_\alpha + T \vec{n};$$

čia

$$\begin{aligned} T^\gamma &= 3 \cdot \lambda \cdot d\lambda \cdot B^\gamma + p^\gamma \cdot d^2 \lambda + \\ &\quad + \lambda^2 \cdot dB^\gamma + \lambda^3 \cdot (C \cdot A_\alpha^\gamma p^\alpha + \\ &\quad + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma B^\alpha p^\beta), \\ T &= 3 \cdot C \cdot \lambda \cdot d\lambda + \lambda^2 \cdot dC + \end{aligned}$$

$$+ \lambda^3 \cdot A_{\alpha\beta} B^\alpha p^\beta;$$

A_β^α – Veingarteno lygčių ([1], 394 psl.)

$$\vec{n}_\alpha = A_\beta^\alpha \vec{r}_\beta$$

koeficientai:

$$A_\beta^\alpha = -g^{\alpha\gamma} A_{\gamma\beta}.$$

Kadangi

$$\begin{aligned} dC &= \lambda \cdot Q, \\ dB^\alpha &= \lambda \cdot R^\alpha, \\ dA^\alpha &= \lambda \cdot S^\alpha \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} p^\alpha p^\beta p^\gamma + 2A_{\alpha\beta} A^\alpha p^\beta, \\ R^\gamma &= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial u^\varepsilon} p^\alpha p^\beta p^\varepsilon + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma A^\alpha p^\beta + S^\gamma, \\ S^\gamma &= \sigma^{\alpha\beta} [\{ F_{ijk} x_\beta^i x_\gamma^j x_\varepsilon^k + \\ &\quad + F_{ij} (x_{\beta\varepsilon}^i x_\gamma^j + x_{\beta\gamma}^i x_\varepsilon^j + x_\beta^i x_{\gamma\varepsilon}^j) + \\ &\quad + F_i x_{\beta\gamma\varepsilon}^i \} p^\alpha p^\varepsilon + (F_{ij} x_\beta^i x_\gamma^j + \\ &\quad + F_i x_{\beta\gamma}^i) A^\gamma], \end{aligned}$$

tai

$$(d\vec{r}, d^2\vec{r}, d^3\vec{r}) = \lambda^3 \sqrt{g} (D \cdot T + g_{\alpha\beta} q^\alpha T^\beta) = \lambda^6 \sqrt{g} q;$$

čia

$$\begin{aligned} q &= h^\alpha p_\alpha, \\ h^\gamma &= C \cdot (R^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma B^\alpha p^\beta + C \cdot A_\alpha^\gamma p^\alpha) - (Q + A_{\alpha\beta} B^\alpha p^\beta) B^\gamma. \end{aligned}$$

Mes įrodėme tokią teoremą.

2 teorema. Dviejų paviršių S_1 ir S_2 sankirtos kreivės γ sukinys χ apskaičiuojamas pagal formulę

$$\chi = \frac{\sqrt{g} \cdot q}{g(g_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta + D^2)}.$$

Literatūra

1. A. Gray, E. Abbena, and S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Chapman & Hall/CRC (2006).

SUMMARY

K. Navickis. Differential geometry of intersection curve of two surfaces

In this this article the differential geometry of intersection curve of two surfaces in the three dimensional euclidean space is considered. In case, curvature and torsion formulas for such curve are defined.

Keywords: surface, curve, curvature and torsion.