Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 693–696

Apie charakterizacijos veikimo be praeities poveikio savybe stabilumą

Romanas JANUŠKEVIČIUS (VPU, MII)
el. paštas: romjan@takas.lt

Tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje gerai žinoma eksponentinio skirstinio savybė, vadinama veikimu be praeities poveikio arba atminties neturėjimu: *jei aptarnavimo trukmė E pasiskirčiusi eksponentiškai,*

$$\mathbf{P}(E < x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad \lambda > 0,\ x \geqslant 0,$$

tai likusios aptarnavimo trukmės skirstinys nepriklauso nuo to, kiek laiko jau truko aptarnavimas, ir atvirkščiai.

Pasirodo, kad analogišką savybę turi ir Weibull skirstinys. Priminsime, kad neneigiamas atsitiktinis dydis Z turi Weibull skirstinį, jei

$$\mathbf{P}(Z < x) = 1 - \exp(-\lambda x^{\alpha}), \quad \alpha > 0,\ \lambda > 0,\ x \geqslant 0. \tag{1}$$

Veikimo be praeities poveikio savybė eilės α atsitiktiniam dydžiui X užrašoma taip:

$$\mathbf{P}\big(X \geqslant \sqrt[\alpha]{x^{\alpha} + y^{\alpha}} \mid X \geqslant y\big) = \mathbf{P}\left(X \geqslant x\right), \quad \forall x, y \geqslant 0. \tag{2}$$

Y.H. Wang darbe [1] parodyta, kad Weibull skirstinių klasė yra vienintelė, kurios elementai turi (2) savybę. Teoremos, kuriose nagrinėjamų atsitiktinių dydžių ar jų funkcijų savybėmis aprašoma tam tikra skirstinių klasė, vadinamos *charakterizacijos teoremomis.*

Veiksmo be praeities poveikio savybe (2) darbe [1] charakterizuojama Weibull skirstinių klasė: *jei X – neneigiamas neišsigimęs atsitiktinis dydis ir $\alpha > 0$, tai X turi Weibull skirstinį* (1) *tada ir tik tada, kai tenkinamas sąryšis* (2).

Tarkime dabar, kad šios charakterizacijos sąlygos išpildomos ne tiksliai, o tik su tam tikra paklaida ε. Pasirodo, kad tokiu atveju teoremos išvados išpildomos su paklaida $C\varepsilon$, kur C – konstanta.

1 teorema (R. Januškevičius [2]). *Tegu $\alpha > 0$, o atsitiktinis dydis X visiems $x \geqslant 0$ ir visiems $y \geqslant 0$ tenkina sąlygą*

$$\Big|\mathbf{P}\big(X \geqslant \sqrt[\alpha]{x^{\alpha} + y^{\alpha}} | X \geqslant y\big) - \mathbf{P}(X \geqslant x)\Big| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Tada atsitiktinis dydis X yra beveik neneigiamas,

$$\mathbf{P}(X \geqslant 0) \geqslant 1 - \varepsilon,$$

ir egzistuoja tokie $\lambda > 0$ *ir* C, *kad*

$$\left|\mathbf{P}(X \geqslant x) - \exp(-\lambda x^\alpha)\right| \leqslant C\varepsilon, \quad \forall x \geqslant 0.$$

Pasirodo, kad Weibull skirstinių klasės charakterizacijai pakanka reikalauti sąryšio (2) išpildymo ne visoje pusašėje $\{y|y \geqslant 0\}$, o tik dviejuose nebendramačiuose taškuose y_1 ir y_2. (Taškai y_1 ir y_2 yra vadinami nebendramačiais, jei jų santykis y_1/y_2 yra iracionalus.)

Šis faktas buvo pastebėtas M. Eaton darbe [3] ir G. Marsaglia, A. Tubilla darbe [4]. Vėliau O. Januškevičienė straipsnyje [5] pateikė supaprastintą šios charakterizacijos įrodymą.

Mūsų tikslas – išnagrinėti šios charakterizacijos stabilumą, t.y., tarus, kad (3) išpildoma ne visoje y pusašėje, o tik dviejuose nebendramačiuose taškuose y_1 ir y_2, įsitikinti, kad nagrinėjamo atsitiktinio dydžio X skirstinys tam tikra prasme yra artimas Weibull skirstiniui.

2 teorema. *Tegu* y_1, y_2 *yra tokie teigiami nebendramačiai taškai, kad* $y_1/y_2 = \sqrt{N}$, *kur* N *– natūralusis skaičius, nelygus natūraliojo skaičiaus kvadratui. Tegu, be to, egzistuoja tokie* $\alpha > 0$ *ir atsitiktinis dydis* X, *kad visiems* $x \geqslant 0$

$$\left|\mathbf{P}(X \geqslant \sqrt[\alpha]{x^\alpha + y_i^\alpha}) - \mathbf{P}(X \geqslant x)\mathbf{P}(X \geqslant y_i)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Tada egzistuoja tokie teigiami λ *ir* C, *priklausantys tik nuo* y_1 *ir* y_2, *kad*

$$\left|\mathbf{P}(X \geqslant x) - \exp(-\lambda x^\alpha)\right| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}, \quad \forall x \geqslant 0.$$

Įrodymas. Pastebėsime, kad kadangi atsitiktinis dydis X nėra neneigiamas, tai tiesioginis mėginimas suvesti sąlygą (4), pažymint $X^\alpha = Y$, į analogišką sąlygą su $\alpha = 1$, kuri jau leistų pasinaudoti eksponentinio dėsnio charakterizacijos stabilumo įverčiais, nėra produktyvus.

Iš tiesų, tegu formulėje (4), pavyzdžiui, $x^\alpha = 1 - y_i^\alpha$, $\alpha = 2$. Kadangi

$$\{\omega|X^2(\omega) \geqslant 1\} = \{\omega|X(\omega) \geqslant 1\} \cup \{\omega|X(\omega) \leqslant -1\},$$

tai, aišku, $\mathbf{P}(X^2 \geqslant 1) \neq \mathbf{P}(X \geqslant 1)$.

Tačiau akivaizdu, kad $\forall\alpha > 0$ ir $\forall x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(X^\alpha \geqslant x^\alpha \cap X \geqslant 0) = \mathbf{P}(X \geqslant x \cap X \geqslant 0). \tag{5}$$

Pažymėkime

$$H(x) = \mathbf{P}(X^\alpha \geqslant x \cap X \geqslant 0), \quad x \in [0, +\infty)$$

$$R(X) = \mathbf{P}(X \geqslant x) - \mathbf{P}(X \geqslant x \cap X \geqslant 0), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{6}$$

Nesunkiai gauname, kad

$$R(x) = P(X \geqslant x \cap X < 0) = 0, \quad \forall x \geqslant 0.$$

Įstatę (6) į (4) turime:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X \geqslant \sqrt[\alpha]{x^\alpha + y_i^\alpha}) \\
&\quad = \mathbf{P}(X \geqslant x)\mathbf{P}(X \geqslant y_i) + r_i(x) \\
&\quad = \mathbf{P}(X \geqslant (\sqrt[\alpha]{x^\alpha + y_i^\alpha} \cap X \geqslant 0) + R(\sqrt[\alpha]{x^\alpha + y_i^\alpha}) \\
&\quad = (\mathbf{P}(X \geqslant x \cap X \geqslant 0) + R(x))(\mathbf{P}(X \geqslant y_i \cap X \geqslant 0) + R(y_i)) + r_i(x),
\end{aligned}$$

kur visiems $x \geqslant 0$ ir $i = 1, 2$,

$$|r_i(x)| = \left|\mathbf{P}(X \geqslant \sqrt[\alpha]{x^\alpha + y_i^\alpha}) - \mathbf{P}(X \geqslant x)\mathbf{P}(X \geqslant y_i)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Todėl iš (5) gauname, kad

$$H(x^\alpha + y_i^\alpha) = H(x^\alpha)H(y_i^\alpha) + R_i(x), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
|R_i(x)| &= |R(x)\mathbf{P}(X \geqslant y_i \cap X \geqslant 0) + R(y_i)R(x) + r_i(x) \\
&\quad - R(\sqrt[\alpha]{x^\alpha + y_i^\alpha}) + R(y_i)\mathbf{P}(X \geqslant y_i \cap X \geqslant 0)| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \geqslant 0, \ i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Pažymėję $u = x^\alpha, v_i = y_i^\alpha$, iš (7) nesunkiai gauname, kad

$$H(u + v_i) = H(u)H(v_i) + R_i^*(u), \quad |R_i^*(u)| \leqslant \varepsilon, \ \forall (u) \geqslant 0.$$

Iš čia ir 1 teoremos O. Januškevičienės darbe [5] gauname, kad egzistuoja tokie λ ir C, kad

$$\left|H(u) - \exp(-\lambda u)\right| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}, \quad \forall u \geqslant 0.$$

Tai reiškia, kad

$$\mathbf{P}(X^\alpha \geqslant u \cap X \geqslant 0) = \exp(-\lambda u) + r_*(u), \quad |r_*(u)| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}, \ \forall u \geqslant 0.$$

O kadangi $\forall x \geqslant 0$

$$\exp(-\lambda x^\alpha) + r_*(x^\alpha) = \mathbf{P}(X^\alpha \geqslant x^\alpha \cap X \geqslant 0) = P(X \geqslant x),$$

tai

$$|\mathbf{P}(X \geqslant x) - \exp(-\lambda x^\alpha)| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}, \quad \forall x \geqslant 0.$$

Teorema pilnai įrodyta.

Literatūra

[1] Y.H. Wang, A functional equation and its application to the characterizations of the Weibull and stable distributions, *J. Appl. Prob.*, **13**, 385–391 (1976).

[2] R. Januškevičius, Apie Wang charakterizacijos stabilumo įverti, *Liet. Mat. Rink.*, **42** (spec. nr.), 697–700 (2002).

[3] M.L. Eaton, Characterization of distributions by identical distribution of linear forms, *J. Appl. Prob.*, **3**, 481–494 (1966).

[4] G. Marsaglia, A. Tubilla, A note on the "lack of memory" property of the exponential distribution, *Ann. Prob.*, **3**, 353–354 (1975).

[5] O. Yanushkevichiene, Estimate of the stability of a characterization of the exponential law, *Theory Probab. Appl.*, **29**(2), 281–292 (1984).

On the stability of a characterization by the lack of memory property

R. Yanushkevichius

An useful and interesting characterization of the Weibull distribution is its lack of memory (of order α) property, i.e., $\mathbf{P}(X \geqslant \sqrt[\alpha]{x^\alpha + y^\alpha} | X \geqslant y) = \mathbf{P}(X \geqslant x)$ for all $x, y \geqslant 0$. The characterization holds even in the case when it is required to fulfil this relation not on the entire semi-axis $\{y | y \geqslant 0\}$, but only at two incommensurable points y_1 and y_2. The stability estimation in this characterization is analyzed.