Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 687–692

К вопросу о зависимости скорости сходимости от метрики

Ольга ЯНУШКЯВИЧЕНЕ (MII,VPU)
e-mail: olgjan@takas.lt

1. Введение

В настоящей работе проводится сравнение скорости сходимости некоторых полиномов от случайных величин в метрике Леви и ζ_1. Заметим, что так как скорость сходимости оценена и сверху, и снизу, то порядок полученных оценок является точным.

Результаты работы представляют собой часть совместного исследования с профессором В. Бенткусом.

Напомним определение упомянутых метрик.

Метрика Леви:

$$\begin{aligned} L(X,Y) &= L(F,G) \\ &= \inf\{\varepsilon: F(x) \leqslant G(x+\varepsilon)+\varepsilon, \quad G(x) \leqslant F(x+\varepsilon)+\varepsilon, \quad \forall x \in R\} \end{aligned}$$

где $F(x)$ и $G(x)$ – функции распределения случайных величин X и Y соответственно.

Метрика ζ_1:

$$\zeta_1(X,Y) = \sup_f |Ef(x) - Ef(y)|,$$

где sup берется по всем функциям f, для которых выполняется условие

$$|f(x) - f(u)| \leqslant |x-u|.$$

Также мы будем использовать метрику Леви–Прохорова:

$$\begin{aligned} &\pi(X,Y) = \pi(P_X, P_Y) = \inf\{\varepsilon: P_X(A) \leqslant P_Y(A^\varepsilon)+\varepsilon, \\ &P_Y(A) \leqslant P_X(A^\varepsilon)+\varepsilon, \quad A \in \mathbf{B}\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{B}$ – система борелевских множеств на R и $A^\varepsilon = \{x: |x-y| < \varepsilon, y \in A\}$ – ε-окрестность множества A, а также метрику Ки Фан:

$$K(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0: P(|X-Y| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon\}.$$

2. Основные результаты

Пусть $X, X_1, ..., X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (с.в.) такие, что

$$EX = 0, \quad EX^2 = 1, \quad E|X|^3 = \beta_3, \quad EX^4 = \beta_4 < \infty. \tag{1}$$

Рассмотрим статистику

$$T = T_2^2 - T_1,$$

где

$$T_2 = \frac{X_1 + ... + X_n}{\sqrt{n}}, \quad T_1 = \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n}$$

и $Y_i = X_i^2 - 1$. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *При выполнении условий* (1) *существуют* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, $c_4 > 0$, *зависящие лишь от первых шести моментов с.в.* X *такие, что*

$$c_1\sqrt{\ln n} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \leqslant L(T, N^2) \leqslant c_2\sqrt{\ln n} \cdot n^{-\frac{1}{2}},$$
$$c_3 n^{-\frac{1}{2}} \leqslant \zeta_1(T, N^2) \leqslant c_4 n^{-\frac{1}{2}},$$

где N *– стандартная нормальная с.в.*

3. Доказательства

3.1. Оценка скорости сходимости в метрике Леви

3.1.1. Оценка сверху

Согласно неравенству треугольника

$$L(T, N^2) \leqslant L(T, T_2^2) + L(T_2^2, N^2) = l_1 + l_2, \tag{2}$$

где l_1 и l_2 – соответственно первое и второе слагаемое в правой части (2).

Оценим сначала l_2. Используя неравенство $L(X, Y) \leqslant \rho(X, Y)$, получаем:

$$l_2 \leqslant \rho(T_2^2, N^2).$$

Так как равномерная метрика инвариантна относительно монотонных преобразований, нетрудно видеть, что

$$l_2 = \rho(T_2, N) \leqslant c\beta_3/\sqrt{n}.$$

Оценим теперь l_1.

Если $\beta_4 = 1$, то это равносильно тому, что

$$E(X^2 - 1)^2 = 0,$$

или $X^2 = 1$ с вероятностью 1. Тогда $K(T, T_2) = 0$ и $l_1 = 0$.

Поэтому будем предполагать, что $\beta_4 \neq 1$.

Согласно [1], стр. 111,

$$l_1 = L(T, T_2) \leqslant \pi(T, T_2).$$

С другой стороны, метрика Леви–Прохорова является минимальной по отношению к метрике Ки Фан (см.[1], стр. 59). Следовательно,

$$\pi(T, T_2) \leqslant K(T, T_2) = \inf\left\{\varepsilon > 0\colon\ P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 1)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Отсюда легко видеть, что

$$\pi(T, T_2^2) \leqslant 2L\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, 1\right).$$

Используя инвариантность метрики Леви относительно сдвига на константу, а также неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} L\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, 1\right) &= L\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i}{\sqrt{n}}, 0\right) \\ &\leqslant L\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i}{\sqrt{n}\sqrt{\beta_4 - 1}}, \frac{N}{\sqrt{n}}\right) + L\left(\frac{N}{\sqrt{n}}, 0\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\zeta_i = X_i^2 - 1$.

В [4] для $L_0 = L(\varepsilon N, 0)$ при $\varepsilon \to \infty$ было получено следующее выражение:

$$L_0 = \sqrt{2}|\varepsilon|\sqrt{\ln(1/|\varepsilon|) + c + o(1)} = \sqrt{2}|\varepsilon|\sqrt{\ln(1/|\varepsilon|)} + o(|\varepsilon|\sqrt{\ln(1/|\varepsilon|)}).$$

Следовательно,

$$L\left(\frac{N}{\sqrt{n}}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\ln(\sqrt{n})}(1 + o(1)) = \sqrt{\frac{2\ln n}{n}}(1 + o(1)).$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое в сумме (3). Так как $L(X, Y) \leqslant \rho(X, Y)$, то

$$L\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i}{\sqrt{n}\sqrt{\beta_4-1}}, \frac{N}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \rho\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i}{\sqrt{n}\ sqrt\beta_4-1}, \frac{N}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \rho\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i}{\sqrt{n}\sqrt{\beta_4-1}}, N\right)) \leqslant c\frac{\beta_6}{(\beta_4-1)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3.1.2. Оценка снизу

Нетрудно видеть, что

$$T = (n-1)\overline{X}^2 - S^2 + 1,$$

где

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}, \qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2.$$

Предположим, что $X_i \stackrel{d}{=} N(0,1)$. Хорошо известно, что в этом случае случайные величины $\overline{X}$ и S^2 независимы и $nS^2 \stackrel{d}{=} \chi^2(n-1)$.

Нетрудно видеть, что

$$T = \frac{n-1}{n}N^2 + \chi^2(n-1) + 1.$$

Обозначим функцию распределения (ф.р.) случайной величины $\frac{n-1}{n}N^2$ символом F, а ф.р. случайной величины $\frac{n-1}{n}N^2 - \chi^2(n-1) + 1$ символом F_1. Согласно определению расстояния Леви получаем, что

$$L\left(\frac{n-1}{n}N^2, \quad \frac{n-1}{n}N^2 - \chi^2(n-1) + 1\right)$$
$$= \inf\left\{\varepsilon\colon F_1(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant F(x) \leqslant F_1(x+\varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall x \in R\right\}.$$

Так как для $x \leqslant 0$ справедливо соотношение $F(x) = 0$, то

$$L\left(\frac{n-1}{n}N^2, \quad \frac{n-1}{n}N^2 - \chi^2(n-1) + 1\right)$$
$$\geqslant \inf\{\varepsilon F_1(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant 0 \leqslant F_1(x+\varepsilon) + \varepsilon, \quad x \leqslant 0\} = \varepsilon_0.$$

Так как $F_1(x+\varepsilon) + \varepsilon \geqslant 0$ всегда, то ε_0 является решением уравнения

$$F_1(-\varepsilon) = \varepsilon.$$

Используя для оценки корня этого уравнения метод, предложенный в [2], получаем:

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2\ln n}{n}}(1 + o(1)),$$

откуда и следует записанная в утверждении теоремы оценка снизу в метрике Леви.

3.2. Оценка скорости сходимости в метрике ζ_1

Согласно неравенству треугольника

$$\zeta_1(T, N^2) \leqslant \zeta_1(T, T_2^2) + \zeta_1(T_2^2, N^2). \tag{4}$$

Рассмотрим первое слагаемое.

$$\begin{aligned}|Ef(T) - Ef(T_2^2)| &\leqslant \frac{1}{n}E\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 1)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(E\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 1)\right|^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}E(X_k^2 - 1)^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{2}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_4^{1/2}\right) = \frac{2\beta_4^{1/2}}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Оценим теперь второе слагаемое в сумме (4):

$$\begin{aligned}&\sup_f\left|Ef(T_2^2) - Ef(N^2)\right| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|P\{T_2^2 < x\} - P\{N^2 < x\}\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|P\{T_2 < u\} - P\{N < u\}| \,\mathrm{d}u \\ &= 2\zeta_1(T_2, N) \leqslant \frac{c\beta_3}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|Ef(T_2^2 - T_1) - Ef(N^2)| \leqslant \frac{c\beta_3}{\sqrt{n}} + \frac{c\beta_4^{1/2}}{\sqrt{n}}.$$

Так как $EX_k^2 = 1$, то

$$\beta_3 = E|X||X|^2 \leqslant \beta_4^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\zeta_1(T_2^2 - T_1, N^2) \leqslant \frac{c\beta_4^{1/2}}{\sqrt{n}}.$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем и оценку снизу в метрике ζ_1. Теорема доказана.

Литература

[1] В.М. Золотарев, Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., Наука, 1986.

[2] A. Basalykas, O. Yanushkevichiene, On exact order of convergence of random polynomials, *J. Math. Sci.*, **99**(3), 1234–1243 (2000).

[3] V. Bentkus, On the dependence of Berry–Essen bound on dimension, *J. Stat. Plan. and Inference*, **113**, 385–402 (2003).

[4] O. Yanushkevichiene, On the rate of convergence of second-degree random polynomials, *J. Math. Sci.*, **92**(3), 3955–3959 (1998).

Konvergavimo greičio priklausomybės nuo metrikos klausimu

O. Januškevičienė

Gauti stochastinio polinomo konvergavimo greičio įverčiai dviejose metrikose. Gautų įverčių eilė yra tiksli.