Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 47–51

Dviejų parametrizuotų paviršių sankirtos kreivės diferencialinė geometrija

Kazimieras NAVICKIS
Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
el. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjama dviejų trimatės euklidinės erdvės paviršių sankirtos kreivės diferencialinė geometrija, kai šie paviršiai apibrėžti vektorinėmis-parametrinėmis lygtimis. Skyrium imant, išvedamos formulės nagrinėjamos kreivės kreivumui ir sukiniui apskaičiuoti.

Raktiniai žodžiai: paviršius, kreivė, kreivumas, sukinys.

Tarkime, kad turime du trimatės euklidinės erdvės paviršius S_1 ir S_2, apibrėžtus lygtimis

$$S_1\colon \vec{r} = \vec{r}(u^\alpha) = \{x^i(u^a)\}$$

ir

$$S_2\colon \vec{R} = \vec{R}(v^\alpha) = \{X^i(v^a)\};$$

čia $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2$; $a, b, c, \ldots = 3, 4$. Šių paviršių sankirtos kreivės $\gamma = S_1 \cap S_2$ taškai tenkina vektorinę lygtį

$$\vec{r}\big(u^\alpha\big) = \vec{R}\big(v^a\big),$$

kuri ekvivalenti trims skaliarinėms lygtims

$$x^i(u^\alpha) = X^i(v^a).$$

Vadinasi, keturis parametrus u^α, v^a sieja trys lygtys, t.y. tris iš parametrų galima išreikšti likusiojo parametro atžvilgiu. Patogiau yra laikyti, kad parametrai u^α, v^a yra kurio nors laisvo parametro t funkcijos:

$$u^\alpha = u^\alpha(t), \qquad v^a = v^a(t).$$

Kadangi kreivė γ priklauso kiekvienam iš paviršių S_1 ir S_2, tai jos diferencialinė geometrija priklauso nuo kiekvieno iš tų paviršių diferencialinės geometrijos.

Pažymėkime

$$\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha}, \qquad \vec{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta};$$

$$\vec{R}_a = \frac{\partial \vec{R}}{\partial v^a}, \quad \vec{R}_{ab} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial v^a \partial v^b};$$
$$x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad \vec{X}^i_a = \frac{\partial X^i}{\partial v^a}.$$

Išilgai kreivės yra teisinga lygybė

$$\vec{r}_\alpha du^\alpha = \vec{R}_a dv^a$$

arba

$$x^i_\alpha du^\alpha = X^i_a dv^a.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$du^\alpha = \lambda p^\alpha, \quad dv^a = \lambda p^a,$$

čia λ – proporcingumo daugiklis ir

$$p^1 = -(\vec{r}_2, \vec{R}_3, \vec{R}_4), \quad p^2 = (\vec{r}_1, \vec{R}_3, \vec{R}_4),$$
$$p^3 = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{R}_4), \quad p^4 = -(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{R}_3)$$

yra atitinkamų trijų vektorių mišriosios sandaugos.

Iš kreivės γ lygties

$$\gamma\colon \vec{\rho} = \frac{1}{2}\big[\vec{r}\big(u^\alpha(t)\big) + \vec{R}\big(v^a(t)\big)\big]$$

gauname, kad

$$2\,d\vec{\rho} = \lambda\big(p^\alpha \vec{r}_\alpha + p^a \vec{R}_a\big).$$

Pažymėkime

$$g_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta, \quad G_{ab} = \vec{R}_a \vec{R}_b, \quad h_{\alpha a} = \vec{r}_\alpha \vec{R}_a.$$

Tenzoriai $g_{\alpha\beta}$ ir G_{ab} yra paviršių S_1 ir S_2 metriniai tenzoriai atitinkamai. Jų determinantai

$$g = \det(g_{\alpha\beta}), \quad G = \det(G_{ab})$$

yra teigiami. Išilgai kreivės γ

$$4(d\vec{\rho})^2 = \lambda^2 K_1;$$

čia

$$K_1 = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta + G_{ab} p^a p^b + 2h_{\alpha a} p^\alpha p^a.$$

Kreivės γ liečiamosios vienetinis vektorius

$$\vec{\tau} = \frac{2}{\sqrt{K_1}}\big(p^\alpha \vec{r}_\alpha + p^a \vec{R}_a\big).$$

Pažymėkime

$$q^\alpha = p^\alpha_\beta p^\beta + p^\alpha_a p^a,$$
$$q^a = p^a_\alpha p^\alpha + p^a_b p^b;$$

čia

$$p^\alpha_\beta = \frac{\partial p^\alpha}{\partial u^\beta}, \quad p^\alpha_a = \frac{\partial p^\alpha}{\partial v^a},$$
$$p^a_\alpha = \frac{\partial p^a}{\partial u^\alpha}, \quad p^a_b = \frac{\partial p^a}{\partial v^b}.$$

Tada

$$dp^\alpha = \lambda q^\alpha, \quad dp^a = \lambda q^a.$$

Funkcijos $\vec{\rho}$ antrosios eilės diferencialas $d^2\vec{\rho}$ randamas iš lygybės

$$2d^2\vec{\rho} = d\lambda\big(p^\alpha \vec{r}_\alpha + p^a \vec{R}_a\big) + \lambda^2\big(p^\alpha p^\beta \vec{r}_{\alpha\beta} + q^\alpha \vec{r}_\alpha + p^a p^b \vec{R}_{ab} + q^a \vec{R}_a\big).$$

Remiantis Gauso lygtimis ([1], 538 psl.)

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\vec{r}_\gamma + A_{\alpha\beta}\vec{n}$$

ir

$$\vec{R}_{ab} = \gamma^c_{ab}\vec{R}_c + B_{ab}\vec{N};$$

čia $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\gamma^c_{ab})$ – paviršiaus $S_1(S_2)$ Kristofelio antrosios rūšies simboliai, $A_{\alpha\beta}(B_{ab})$ – paviršiaus $S_1(S_2)$ antrosios kvadratinės formos koeficientai, $\vec{n}(\vec{N})$ – vienetinis paviršiaus $S_1(S_2)$ normalės vektorius.

Pažymėkime

$$T^\gamma = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta + q^\gamma, \quad S^a = \gamma^a_{bc} p^b p^c + q^a;$$
$$R = A_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta, \quad Q = B_{ab} p^a p^b;$$
$$A = \sqrt{g}\sigma_{\alpha\beta} p^\alpha T^\beta, \quad A^\gamma = -\sqrt{g}\sigma_{\alpha\beta} g^{\gamma\beta} R p^\alpha;$$
$$B = \sqrt{G}\sigma_{ab} p^a S^b, \quad B^c = -\sqrt{G}\sigma_{ab} G^{cb} Q p^a;$$

čia

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix},$$
$$(G^{ab}) = \begin{pmatrix} G_{33} & G_{34} \\ G_{34} & G_{44} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{G}\begin{pmatrix} G_{44} & -G_{34} \\ -G_{34} & G_{33} \end{pmatrix},$$
$$(\sigma_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kadangi

$$2d\vec{\rho} \times d^2\vec{\rho} = \lambda^3\big(A^\alpha \vec{r}_\alpha + A\vec{n} + B^a \vec{R}_a + B\vec{N}\big),$$

tai

$$4\big(d\vec{\rho} \times d^2\vec{\rho}\big)^2 = \lambda^6 K_2;$$

čia

$$K_2 = A^2 + 2ABh + B^2 + g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta + G_{ab}B^a B^b + 2\big(A^\alpha B h_\alpha + A^\alpha B^a h_{\alpha a} + B^a A H_a\big)$$

ir

$$h = \vec{n}\vec{N}, \quad h_\alpha = \vec{r}_\alpha \vec{N}, \quad H_a = \vec{R}_a \vec{n}.$$

Kreivės γ binormalės vienetinis vektorius

$$\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{K_2}}\big(A^\alpha \vec{r}_\alpha + A\vec{n} + B^a \vec{R}_a + B\vec{N}\big),$$

pagrindinės normalės vienetinis vektorius

$$\vec{\nu} = \frac{2}{\sqrt{K_1 K_2}}\big[\sqrt{g}\sigma_{\alpha\beta}\big(Ag^{\beta\gamma}p^\alpha \vec{r}_\gamma + A^\alpha p^\beta \vec{n}\big) + \sqrt{G}\sigma_{ab}\big(BG^{bc}p^a \vec{R}_c + B^a p^b \vec{N}\big)\big].$$

Mes įrodėme tokią teoremą.

1 TEOREMA. *Dviejų parametrizuotų paviršių S_1 ir S_2 sankirtos kreivės γ kreivumas k apskaičiuojamas pagal formulę*

$$k = \frac{4}{K_1}\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}.$$

Aišku, kad

$$dq^\alpha = \lambda Q^\alpha, \quad dq^a = \lambda Q^a;$$

čia

$$Q^\alpha = p^\alpha_{\beta\gamma}p^\beta p^\gamma + 2p^\alpha_{\beta a}p^\beta p^a + p^\alpha_\beta q^\beta + p^\alpha_{ab}p^a p^b + p^\alpha_a q^a,$$
$$Q^a = p^a_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta + 2p^a_{\alpha b}p^\alpha p^b + p^a_\alpha q^\alpha + p^a_{bc}p^b p^c + p^a_b q^b,$$

be to,

$$p^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial p^\alpha_\beta}{\partial u^\gamma}, \quad p^\alpha_{ab} = \frac{\partial p^\alpha_a}{\partial v^b}, \ldots .$$

Remdamiesi Veingarteno lygtimis ([1], 394 psl.)

$$\vec{n}_\alpha = A^\beta_\alpha \vec{r}_\beta, \quad \vec{N}_a = B^b_a \vec{R}_b,$$

kuriose

$$A^{\alpha}_{\beta} = -g^{\alpha\gamma} A_{\gamma\beta}, \quad B^{a}_{b} = -G^{ac} B_{cb},$$

gauname, kad

$$2d^3\vec{\rho} = \lambda^3\big(C^{\alpha}\vec{r}_{\alpha} + C\vec{n} + D^{a}\vec{R}_{a} + D\vec{N}\big) + (\ldots);$$

čia $(\ldots)$ – dėmenys, priklausantys nuo $d\lambda$, be to,

$$C^{\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\varepsilon}} p^{\alpha} p^{\beta} p^{\varepsilon} + 2\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} p^{\alpha} q^{\beta} + Q^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} T^{\alpha} p^{\beta} + R A^{\gamma}_{\alpha} p^{\alpha},$$

$$C = \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} p^{\alpha} p^{\beta} p^{\gamma} + A_{\alpha\beta} T^{\alpha} p^{\beta} + 2A_{\alpha\beta} p^{\alpha} q^{\beta},$$

$$D^{c} = \frac{\partial \gamma^{c}_{ab}}{\partial v^{d}} p^{a} p^{b} p^{d} + 2\gamma^{c}_{ab} p^{a} q^{b} + Q^{c} + \gamma^{c}_{ab} S^{a} p^{b} + Q B^{c}_{a} p^{a},$$

$$D = \frac{\partial B_{ab}}{\partial v^{c}} p^{a} p^{b} p^{c} + B_{ab} S^{a} p^{b} + 2B_{ab} p^{a} q^{b}.$$

Iš čia randame, kad

$$\big(d\vec{\rho}, d^2\vec{\rho}, d^3\vec{\rho}\big) = \frac{\lambda^6}{4} K_3;$$

čia

$$K_3 = AC + BD + (AD + BC)h + g_{\alpha\beta} A^{\alpha} c^{\beta} + G_{ab} B^{a} D^{b} + (BC^{\alpha} + DA^{\alpha})h_{\alpha}$$
$$+ (AD^{a} + CB^{a})H_{a} + (A^{\alpha} D^{a} + C^{\alpha} B^{a})h_{\alpha a}.$$

Mes įrodėme tokią teoremą.

2 TEOREMA. *Dviejų parametrizuotų paviršių S_1 ir S_2 sankirtos kreivės γ sukinys κ apskaičiuojamas pagal formulę*

$$\kappa = \frac{K_3}{K_2}.$$

Literatūra

1. A. Gray, E. Abbena, and S. Salamon. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Chapman & Hall/CRC, 2006.

SUMMARY

K. Navickis. Differential geometry of intersection curve of two surfaces

In this this article the differential geometry of intersection curve of two surfaces in the three dimensional euclidean space is considered. In case, curvature and torsion formulas for such curve are defined.

Keywords: surface, curve, curvature and torsion.