

# Kai kurie paprastųjų diferencialinių lygčių su izoliuota ypatuma kraštiniai uždaviniai

Kristina ALDOŠINA, Stasys RUTKAUSKAS (MII, VPU)  
el. paštas: krista\_212@one.lt, stasysr@ktl.mii.lt

## 1. Uždavinių formulavimas

Nagrinėsime diferencialinę lygtį

$$l[y] := a(x)y'' + b(x)y' - c(x)y = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

kurioje  $a \in C^2(0, 1) \cap C^0[0; 1]$ ,  $b \in C^1(0, 1) \cap C^0[0; 1]$ ,  $c \in C^0[0; 1]$ ,  $f \in C^0(0; 1)$  – realiosios funkcijos, be to,  $a(0) = 0$  ir  $a(x) > 0 \forall x \in (0, 1]$ ,  $c(x) > 0 \forall x \in (0, 1)$ . Taigi (1) lygtis išsigimsta taške  $x = 0$ , todėl ji gali turėti tiek aprėžtus, tiek ir neaprežtus šiame taške sprendinius. Tuo atveju, kai taškas  $x = 0$  yra (1) lygties integruojama ypatuma, kraštiniai uždaviniai išnagrinėti darbe [1]. Laipsninio tipo ypatumos su bet kuriuo laipsnio rodikliu atveju sprendinių asimptotika ir svorinio tipo kraštiniai uždaviniai išnagrinėti straipsniuose [2], [3]. Čia nagrinėjamas bendresnis ypatumos atvejis.

Taip pat nagrinėsime ir homogeninę lygtį

$$l[y] = 0. \quad (1_0)$$

Mūsų tikslas – ištirti (1<sub>0</sub>) lygties sprendinių asimptotiką, kai  $x \rightarrow 0$ , ir išnagrinėti operatoriaus  $l$  kraštinius uždavinius tiek aprėžtu, tiek ir neaprežtu taške  $x = 0$  funkcijų klasėje.

Tegul

$$a^{-1}(x)b(x) = \mu x^{-1} + p(x), \quad \mu = const.$$

Tarsime, kad išpildytos šios (1<sub>0</sub>) lygties ypatumą charakterizuojančios sąlygos:

$$a(x) = O(x^\alpha) \quad (\alpha > 2), \quad a'(x) = o(a^{1/2}(x)), \quad x \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$p, a^{-1/2}(c - c(0)) \in L(0, 1). \quad (3)$$

Pažymėkime  $c_0 = c(0)$ ,  $\tau(x) = \sqrt{c_0} \int_x^1 a^{-1/2}(t) dt$  ir apibrėžkime funkciją

$$\psi(x) = x^{\frac{\mu}{2}} a^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \{ -\tau(x) \}.$$

Nagrinėsime šiuos kraštinius uždavinius: rasti (1) lygties sprendinį  $y \in C^2(0, 1) \cap C^0(0; 1]$ , tenkinantį sąlygą

$$y(1) = \gamma_1, \quad (4)$$

ir vieną iš šių sąlygų:

$$|y| < \infty \quad \text{intervale } (0, 1), \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x)y(x) = \gamma_0, \quad (6)$$

kur  $\gamma_0, \gamma_1$  – duoti skaičiai.

## 2. Lygties (1<sub>0</sub>) sprendinių asimptotika

Parodysime, kad šios lygties sprendinių asimptotikos pagrindiniai nariai nepriklauso nuo  $p$ , o jeigu  $\mu = 0$  – ir nuo  $b$ .

1 TEOREMA. *Tarkime,  $a^{1/4}(a^{1/4})'' \in L(0, 1)$  ir išpildytos (2), (3) sąlygos. Tada egzistuoja tiesiškai nepriklausomi (1<sub>0</sub>) lygties sprendiniai  $y_1, y_2$  tokie, kad*

$$\begin{aligned} y_i(x) &= x^{-\frac{\mu}{2}} a^{\frac{1}{4}}(x) \exp \{(-1)^i \tau(x)\} (1 + o(1)), \\ y'_i(x) &= (-1)^{i-1} \sqrt{c_0} x^{-\frac{\mu}{2}} a^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \{(-1)^i \tau(x)\} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (7)$$

kai  $x \rightarrow 0, i = 1, 2$ .

*Irodymas.* Šios lygties sprendinių ieškosime pavidalu

$$y(x) = x^{-\frac{\mu}{2}} \exp \{ \zeta(x) \} u(x), \quad \zeta(x) = \frac{1}{2} \int_x^1 p(t) dt. \quad (8)$$

Išstatę (7) išraišką į (1<sub>0</sub>), funkcijai  $u$  nustatyti gauname lygtį

$$u'' - (q(x) + c_0 a^{-1}(x))u = 0, \quad (9)$$

kurioje

$$q(x) = (p^2(x) + \mu(\mu - 1)x^{-2})/4 + (p'(x) + \mu x^{-1}p(x))/2 + a^{-1}(x)(c(x) - c_0).$$

Lengva įsitikinti, kad su (2), (3) sąlygomis teisinga priklausomybė  $a^{1/2}q \in L(0, 1)$ . Kadangi dar  $a^{1/4}(a^{1/4})'' \in L(0, 1)$ , tai (9) lygtis turi du tiesiškai nepriklausomus sprendinius  $u_1, u_2$ , kuriems teisingos šios asimptotikos, kai  $x \rightarrow 0$  [4]:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= a^{\frac{1}{4}}(x) \exp \{(-1)^i \tau(x)\} (1 + o(1)), \\ u'_i(x) &= (-1)^{i-1} \sqrt{c_0} a^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \{(-1)^i \tau(x)\} (1 + o(1)), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Sutinkamai su sąlyga  $p \in L(0, 1)$  gauname, kad  $\exp\{\zeta(x)\} = \kappa + o(1), x \rightarrow 0$ , kur  $\kappa = \exp\{-\zeta(0)\}$ . Tada iš (8) išplaukia, kad tiesiškai nepriklausomi (1<sub>0</sub>) lygties

sprendiniai  $y_i = \kappa^{-1} x^{-\mu/2} \exp(\zeta(x)) u_i$ ,  $i = 1, 2$ , tenkina (7) asimptotinius sąryšius. Teorema įrodyta.

1 LEMA. *Tarkime, išpildyta (2) sąlyga ir  $a' > 0$  kuriame nors intervale  $(0, x_0) \in (0, 1)$ . Tada  $\lim_{x \rightarrow 0} a^m(x) \exp(\tau(x)) = +\infty$  su bet kuriuo realiu skaičiumi  $m$ .*

*Įrodymas.* Tegul kuris nors skaičius  $K > |m|$ . Sutinkamai su (2)  $\exists \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < x_0$  toks, kad teisinga nelygybė  $a^{\frac{1}{2}}(x)(a'(x))^{-1} > K \forall x \in (0, \varepsilon)$ . Tada

$$\tau(x) = \sqrt{c_0} \int_x^1 a^{-\frac{1}{2}}(t) dt = \tau(\varepsilon) + \int_x^\varepsilon a^{\frac{1}{2}}(a')^{-1} d \ln a > K_\varepsilon - K \ln a(x)$$

kur  $K_\varepsilon = \tau(\varepsilon) + K \ln a(\varepsilon)$ . Iš čia, atsižvelgę į nelygybę  $m - K < 0$ , gauname, kad

$$a^m(x) \exp(\tau(x)) > \exp(K_\varepsilon) a^{m-K}(x) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow 0.$$

1 IŠVADA.  $(1_0)$  lygties sprendiniai  $y_1$ ,  $y_2$  tenkina sąlygas:  $y_1(x)$  ir  $y_1'(x) \rightarrow +0$ ,  $y_2(x) \rightarrow +\infty$ ,  $y_2'(x) \rightarrow -\infty$ , kai  $x \rightarrow 0$ .

Iš tikrųjų, iš (7) seka, kad  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  ir  $y_1'(x) > 0$ , o  $y_2'(x) < 0$  kurioje nors taško  $x = 0$  aplinkoje  $(0, x^*)$ ,  $x^* \in (0, 1)$ , o iš 1 lemos išplaukia, kad  $y_1(x)$  ir  $y_1'(x) \rightarrow 0$ ,  $y_2(x)$  ir  $y_2'(x) \rightarrow \infty$ , kai  $x \rightarrow 0$ . Taigi išvados teiginys yra teisingas.

2 LEMA.  $(1_0)$  lygties sprendinys  $y_1$  – teigiama ir monotoniškai didėjanti intervale  $(0, 1)$  funkcija.

*Įrodymas.* Sutinkamai su sąlyga  $c(x) < 0 \forall x \in (0, 1)$ ,  $y_1$  intervale  $(0, 1)$  negali įgyti nei teigiamo maksimumo, nei neigiamo minimumo. Kadangi šalia to  $\lim_{x \rightarrow 0} y_1(x) = +0$ , tai  $y_1(x)$  ir  $y_1'(x) > 0 \forall x \in (0, 1)$ , kitaip  $y_1$  intervale  $(0, 1)$  įgytų ekstremumą. Taigi  $y_1$  – monotoniška funkcija. Lema įrodyta.

3 LEMA. *Tegul  $y$  –  $(1_0)$  lygties sprendinys, tenkinantis kraštinę sąlygą  $y(1) = 0$  ir sąlygą  $y(x) = o(\psi(x))$ ,  $x \rightarrow 0$ . Tada  $y(x) \equiv 0$  intervale  $(0, 1)$ .*

*Įrodymas.* Iš  $(1_0)$  lygties fundamentaliosios sprendinių sistemos  $y_1$ ,  $y_2$  (7) asimptotinių savybių ir prielaidos  $y(x) = o(\psi(x))$ ,  $x \rightarrow 0$ , seka, kad  $y(x) = \text{const } y_1(x)$ . Kadangi  $y(1) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} y_1(x) = 0$ , tai pagal maksimumo principą  $y \equiv 0$ . Lema įrodyta.

### 3. Kraštinių uždavinių sprendinių egzistavimas ir vienatis

Pastebėję, kad  $y_1(1) \neq 0$  (žr. 2 lema), sudarykime  $(1_0)$  lygties sprendinį  $\tilde{y}(x) = y_2(x) - y_1^{-1}(1)y_2(1)y_1(x)$ . Akivaizdu, kad  $\tilde{y}(1) = 0$ , o iš (7) turime  $\tilde{y}(x) \sim y_2(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ . Toliau vietoje  $\tilde{y}$  patogumo dėlei rašysime vėl  $y_2$ . Taigi nuo šiol laikome, kad  $y_2$  tenkina ne tik (7) asimptotines sąlygas, bet ir sąlygą  $y_2(1) = 0$ .

Nagrinėkime  $(1_0)$  lygties sprendinius

$$y_{01}(x) = \gamma_1 y_1^{-1}(1) y_1(x), \quad y_{02}(x) = y_{01}(x) + \gamma_0 y_2(x). \quad (11)$$

Lengva matyti, kad  $y_{0i}(1) = \gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $|y_{01}(x)| < \infty \forall x \in (0, 1)$  ir  $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) y_{02}(x) = \gamma_0$ .

Sudarykime operatoriaus  $l$  kraštinių uždavinių (3), (4) ir (3), (5) Grino funkcija

$$G(x, t) = a^{-1}(t)W^{-1}(t) \begin{cases} y_2(x)y_1(t), & 0 < t \leq x, \\ y_1(x)y_2(t), & x \leq t \leq 1, \end{cases}$$

kur  $W = y_1y_2' - y_1'y_2$  – Vronskio determinantas. Akivaizdu, kad  $G(1, t) = 0 \quad \forall t \in (0; 1]$ .

Pastebėkime, kad iš (7) išplaukia asimptotinis sąryšis

$$W(x) = -2\sqrt{c_0}x^{-\mu}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0. \quad (12)$$

**2 TEOREMA.** Tegul  $Y(x) = \int_0^1 G(x, t)f(t) dt$  ir tegul išpildytos 1 teoremos sąlygos. Jeigu  $f$  aprėžta taške taške  $x = 0$ , tai funkcija

$$y^{(1)}(x) = y_{01}(x) + Y(x) \quad (13)$$

yra (1), (3), (4) uždavinio sprendinys, o jeigu  $f$  tenkina sąlyga

$$a^{-1/2}\psi^{-1}f \in L(0, 1), \quad (14)$$

tai egzistuoja (1), (3), (5) uždavinio sprendinys  $y^{(2)}$  pavidalo

$$y^{(2)}(x) = y_{02}(x) + Y(x), \quad (15)$$

kur  $y_{01}, y_{02}$  – (10) lygties sprendiniai, apibrėžti (11) formulėmis. Abu šie atitinkamų kraštinių uždavinių sprendiniai yra vieninteliai.

*Irodymas.* Sutinkamai su Grino funkcijos išraiška  $Y$  galima užrašyti pavidalu  $Y(x) = y_2(x)J_1(x) + y_1(x)J_2(x)$ , kur

$$J_1(x) = \int_0^x \frac{y_1(t)f(t)}{a(t)W(t)} dt, \quad J_2(x) = \int_x^1 \frac{y_2(t)f(t)}{a(t)W(t)} dt.$$

Pastebėkime, kad

$$\begin{aligned} y_1(x) &\sim x^{-\mu}a^{1/2}\psi(x), & y_1'(x) &\sim \sqrt{c_0}x^{-\mu}\psi(x), \\ y_2(x) &\sim \psi^{-1}(x), & y_2'(x) &\sim -\sqrt{c_0}a^{-1/2}(x)\psi^{-1}(x), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Iš čia ir iš (12) gauname, kad  $y_1(t)a^{-1}(t)W^{-1}(t) \sim a^{-1/2}(t)\psi^{-1}(t)$ ,  $t \rightarrow 0$ , todėl integralas  $J_1(x)$  su (14) sąlyga (juo labiau su funkcijos  $f$  aprėžtumo taške  $x = 0$  sąlyga) konverguoja ir yra tolydi intervale  $(0, 1]$  funkcija, tenkinanti sąlygą  $\lim_{x \rightarrow 0} J_1(x) = 0$ .

Tiesiogiai diferencijuodami gauname, kad  $l[y] = f$  intervale  $(0, 1)$ . Be to, lengva matyti, kad  $Y(1) = 0$ . Taigi  $y^{(1)}, y^{(2)} - (1)$  lygties sprendiniai, tenkinantys (3) kraštinę sąlygą.

Tegul  $f$  aprėžta taške  $x = 0$ . Tada sprendinys  $Y$ , vadinasi ir  $y^{(1)}$ , bus aprėžtas taške  $x = 0$ , jeigu šiame taške aprėžtos funkcijos  $I_1(x) = y_1(x) \int_x^1 a^{-1}(t)W^{-1}(t)y_2(t) dt$  ir

$I_2(x) = y_2(x) \int_0^x a^{-1}(t)W^{-1}(t)y_1(t) dt$ . Pasinaudoję Liopitalio taisykle ir atsižvelgę į (12) ir (16) gauname, kad

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_1(x) = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{-1}(x)W^{-1}(x)y_2(x)}{(y_1^{-1}(x))'} = -\frac{1}{2c_0},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{-1}(x)W^{-1}(x)y_2(x)}{(y_2^{-1}(x))'} = -\frac{1}{2c_0}.$$

Taigi (1), (3), (4) uždavinio sprendinys iš tiesų apibrėžiamas (13) formule.

Tarkime,  $f$  tenkina (14) sąlygą. Parodysime, kad  $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x)Y(x) = 0$ . Pagal Liopitalio taisyklę, pasirėmę (16) sąryšiais bei sąlyga  $a'(x) = o(a^{1/2}(x))$ ,  $x \rightarrow 0$ , turime:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x)Y(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} J_1(x) + \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x)y_1(x)J_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x)y_1(x)J_2(x) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{-1}(x)W^{-1}(x)y_2(x)f(x)}{(\psi^{-1}(x)y_1^{-1}(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\psi(x)}. \end{aligned}$$

Kadangi  $a^{-1/2}\psi^{-1}f \in L(0, 1)$ , o  $a^{1/2}(x) = O(x^{\alpha/2})$ ,  $x \rightarrow 0$ , kur  $\alpha > 2$ , tai  $\lim_{x \rightarrow 0} \psi^{-1}(x)\psi(x) = 0$ .

Tuo būdu parodėme, kad (15) formule apibrėžta funkcija  $y^{(2)}$  yra (1), (3), (5) uždavinio sprendinys.

Gauti nagrinėjamų uždavinių sprendiniai  $y^{(1)}$ ,  $y^{(2)}$  yra vieninteliai. Iš tikrųjų, tarę, kad egzistuoja du kurio nors uždavinio sprendiniai, kurių skirtumas yra  $y$ , sutinkamai su 3 lema gautume, jog  $y \equiv 0$ . Teorema įrodyta.

**Pastaba.** Jeigu  $f \in C^0(0; 1]$ , t.y. jeigu  $f$  tolydi kairiajame intervalo  $(0, 1]$  krašte, tai (1), (3), (4) uždavinio sprendinį  $y^{(1)}$  galima tolydžiai pratęsti į tašką  $x = 0$  reikšme  $-f(0)/c(0)$ . Tuo galima įsitikinti perėjus pagal Liopitalio taisyklę prie ribos (13) lygybėje, kai  $x \rightarrow 0$ . Taigi šio sprendinio reikšmė taške  $x = 0$  nepriklauso nuo kraštinės sąlygos, formuluojamos taške  $x = 1$ .

## Literatūra

1. H. Epheser, Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben für gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Z.*, **61**(4), 435–454 (1955).
2. I.T. Kiguradze, A.G. Lomtadize, On certain boundary value problems for second-order linear ordinary differential equations with singularities, *J. Math. Anal. Appl.*, **101**(2), 325–347 (1984).
3. S. Rutkauskas, Weighted boundary problems for a second-order ordinary differential equation with singularity, *Lithuanian Math. J.*, **26**(4), 367–376 (1986).
4. F. Olver, *Introduction to Asymptotics and Special Functions*, Acad. Press, New York and London (1974).

## SUMMARY

***K. Aldošina, S. Rutkauskas. On the boundary value problems for ordinary differential equations with isolated singularity***

We consider some two-point boundary value problems for second order o.d.e. with strong singularity. The asymptotics of the solutions at the singular point are given. The existence and uniqueness of the solutions of those problems are proved.

*Keywords:* ordinary differential equations, boundary value problems, singularity, asymptotics.