

## Bimatricinio lošimo modelis investiciniam portfeliui sudaryti

Sigutė VAKRINIENĖ<sup>1</sup>, Gintautas MISEVIČIUS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Vilniaus Gedimino technikos universitetas  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius

<sup>2</sup> Vilniaus universitetas  
Universiteto g. 3, LT-01513 Vilnius  
el. paštas: sigute@micro.lt; gintautas.misevicius@mif.vu.lt

**Santrauka.** Darbe siūlomas Nešo pusiausvyros bimatriciniame lošime modelis investiciniams portfeliams sudaryti. Portfelio komponentės surandamos sprendžiant dalinai sveikaskaitį tiesinio programavimo uždavinį. Eksperimentinėje dalyje šio modelio pagalba gauti neefektyvūs portfeliai testuojami remiantis keleto Europos šalių akcijų biržų indeksų statistiniais duomenimis. Pasiūlytųjų portfelių realizacijų skaitinės charakteristikos lyginamos su efektyviųjų (Pareto optimalių) portfelių realizacijų skaitinėmis charakteristikomis.

*Raktiniai žodžiai:* investicinis portfelis, bimatricinis lošimas, Nešo pusiausvyra.

### 1. Įvadas

Efektyviųjų (Markowitz [1]) portfelių komponentės surandamos sprendžiant netiesinius optimizavimo uždavinius, nes šiuose modeliuose portfelio rizikingumui apibrėžti naudojama dispersija. Maksimizuojant laukiamą vidutinę portfelio grąžą, dispersija fiksuojama, arba minimizuojant dispersiją fiksuojama vidutinė grąža. Netiesinio programavimo uždavinių sprendimas yra susijęs su sunkumais, kai nežinomųjų (portfelio komponentių) skaičius yra didelis.

Skirtingų autorių publikacijose yra pasiūlyta įvairių tiesinių rizikos matavimo metodų. Papahristodoulou ir Dotzauer [2] aprašytuose tiesiniuose modeliuose optimaliam portfeliui gauti rizika matuojama naudojant absoliutųjį nuokrypį. Optimalios investavimo strategijos suradimo problema straipsnyje [3] modeliuojama naudojant matricinį lošimą ir parametrinį programavimą, kas taip pat leidžia apsiriboti tiesinio optimizavimo modeliais.

Straipsnyje [4] investiciniams portfeliams parinkti siūlomas maksimino principas. Portfelio komponentės surandamos sprendžiant tiesinio programavimo uždavinį viename modelyje ir netiesinio programavimo uždavinį kitame, įvedus rizikos vertinimo koeficientus.

Paprastai mažai rizikingi investiciniai portfeliai duoda mažesnes grąžas, o didesnių pelno normų siekiantys portfeliai turi didesnę riziką, didesnę grąžos dispersiją. Investuotojas turėtų išlaikyti tam tikrą pusiausvyrą tarp portfelio pelningumo ir rizikingumo. Todėl šiame darbe buvo pabandyta investicinio portfelio sudarymo problemos mate-

matiniu modelių pasirinkti bimatricinį lošimą ir portfelio komponentes gauti iš Nešo pusiausvyros strategijų komponentių.

## 2. Matematiniai modeliai

Tegul  $c_{ij}$  yra  $j$ -ojo indekso kaina  $i$ -ąją dieną. Eksperimentinėje dalyje buvo pasirinkta paskutinė (uždarymo) kaina.

Pelno norma  $j$ -ajam indeksui  $i$ -tąją dieną skaičiuojama pagal formulę

$$a_{ij} = \left( \frac{c_{ij}}{c_{i-kj}} - 1 \right) \cdot 100\%. \quad \text{Eksperimentinėje dalyje } k = 1.$$

Pasirinktą indeksų portfeliui  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ ,  $x_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  sumas  $a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  vadinsime portfelio  $P$   $i$ -osios dienos gražos reikšmėmis (čia  $a_{ij}$  yra pelno normos  $m$  dienų laikotarpio, kurio duomenis naudojame konstruodami portfeli). Šio portfelio gražos realizacijomis sekančiame  $k$  dienų laikotarpyje vadinsime sumas  $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ ,  $i = m+1, m+2, \dots, m+k$ .

Portfelio  $P$  vidutinė graža  $E(P)$   $m$  dienų laikotarpyje skaičiuojama pagal formulę  $E(P) = \sum_{j=1}^n \bar{a}_j x_j$ , čia  $\bar{a}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{ij}$  yra  $j$ -ojo indekso pelno normos vidurkis stebėtam  $m$  dienų ilgio laikotarpiui.  $E(R)$  pažymėkime portfelio gražos realizacijų vidurkį sekančiam  $k$  dienų laikotarpiui. Tada  $E(R) = \sum_{j=1}^n \bar{b}_j x_j$ , o  $\bar{b}_j = \frac{1}{k} \sum_{i=m+1}^{m+k} a_{ij}$  yra  $j$ -ojo indekso pelno normos vidurkis sekančiam laikotarpiui.

Jei pelno normos yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai, portfelio gražos dispersija yra  $S^2(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j$ , čia  $k_{ij}$  yra  $i$ -ojo ir  $j$ -ojo indekso pelno normų kovariacija.

Efektvyviojo portfelio  $P_{ef} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  komponentes surandame spęsdami netiesinio programavimo uždavinį:

max  $W$ ;

$$\alpha \sum_{j=1}^n \bar{a}_j x_j - (1 - \alpha) \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j} \geq W, \quad \sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Čia parametras  $\alpha$  yra rizikos svorio koeficientas, įgyjantis reikšmes iš intervalo  $[0; 1]$ .

Modeliuojame keletą modifikuotų matricinių lošimų ( $A$ ,  $B$ ), matricas apibrėždami tokiu būdu:

$$\begin{aligned} A_1 &= \|\bar{\bar{a}}_{ij}\|, & B_1 &= \|k_{ij}\|, & A_2 &= \|\bar{\bar{a}}_{ij}\|, & B_2 &= \|s_{ij}\|, \\ A_3 &= \|\bar{\bar{a}}_{ij}\|, & B_3 &= \|v_{ij}\|, & A_4 &= \|m_{ij}\|, & B_4 &= \|k_{ij}\|, \\ A_5 &= \|m_{ij}\|, & B_5 &= \|s_{ij}\|, & A_6 &= \|m_{ij}\|, & B_6 &= \|v_{ij}\|, \\ A_7 &= \|\max a_{ij}\|, & B_7 &= \|k_{ij}\|, & A_8 &= \|\max a_{ij}\|, & B_8 &= \|s_{ij}\|, \\ A_9 &= \|\max a_{ij}\|, & B_9 &= \|v_{ij}\|. \end{aligned}$$

Matricos elementą  $\bar{\bar{a}}_{ij} = (\bar{a}_i + \bar{a}_j)/2$  pavadinkime poriniu vidurkiu, tada  $m_{ij}$ ,  $s_{ij}$ ,  $v_{ij}$ ,  $\max a_{ij}$ ,  $\min a_{ij}$ , yra porinės medianos, poriniai vidutiniai kvadratiniai nuokrypiai,

porinės variacijos, poriniai maksimumai ir poriniai minimumai, o  $k_{ij}$  yra  $i$ -ojo ir  $j$ -ojo indeksų pelno normų kovariacija. Šiuos bimatricinius lošimus vadiname modifikuotais todėl, kad pirmasis lošėjas šiuose mūsų modeliuose siekia išlošti maksimizuoti, o antrasis – minimizuoti (klasikiniame bimatriciniame lošime abu lošėjai siekia savo išlošius maksimizuoti).

Kita bimatricinių lošimų grupė apibrėžiama sekančiu būdu:

$$\begin{aligned} A_{10} &= \|\max a_{ij}\|, & B_{10} &= \|\min a_{ij}\|, & A_{11} &= \|\overline{\overline{a_{ij}}}\|, & B_{11} &= \|m_{ij}\|, \\ A_{12} &= \|\overline{\overline{a_{ij}}}\|, & B_{12} &= \|\max a_{ij}\|, & A_{13} &= \|m_{ij}\|, & B_{13} &= \|\max a_{ij}\|, \\ A_{14} &= \|\| -k_{ij}\|, & B_{14} &= \|\| -s_{ij}\|, & A_{15} &= \|\| -k_{ij}\|, & B_{15} &= \|\| -v_{ij}\|, \\ A_{16} &= \|\| -s_{ij}\|, & B_{16} &= \|\| v_{ij}\|. \end{aligned}$$

Pusiausvyros strategijoms, kurių bendru atveju yra neviena, surasti naudosime straipsnyje [6] pasiūlytą tiesinio programavimo uždavinį su papildomais binariaisiais kintamaisiais. Modifikuoto bimatricinio lošimo atveju pusiausvyros surandamos sprendžiant uždavinį:

$$\max (U - V);$$

$$0 \leq U - \sum_{j=1}^n \overline{\overline{a_{ij}}} y_j \leq \mu r_i, \quad s_i + x_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i - V \leq \mu s_j, \quad s_j + y_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$s_i \in \{0, 1\}, \quad t_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Čia  $\mu = \max\{\max a_{ij}, \max b_{ij}\}$ .

Tokių uždavinių sprendžia SAS/OR procedūra LP, kuri sveikaskaičiams uždaviniams naudoja šakų ir rėžių metodą.

Bimatricinio lošimo  $(A_k, B_k)$  mišriąsias pusiausvyros strategijas pažymėkime  $X_k = (\overline{x_{1k}}, \overline{x_{2k}}, \dots, \overline{x_{nk}})$  ir  $Y_k = (\overline{y_{1k}}, \overline{y_{2k}}, \dots, \overline{y_{nk}})$ .

Pusiausvyrinis portfelius  $P_{pus} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  galime apibrėžti kaip iškiluosius darinius:  $P_{pus} = (1 - \alpha)X + \alpha Y$ , kur rizikos svorio koeficientas  $\alpha$  tenkina nelygybes  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Čia

$$X = \frac{1}{16} \left( \sum_{i=1}^{13} X_i + \sum_{i=11}^{13} Y_i \right), \quad Y = \frac{1}{16} \left( \sum_{i=1}^{10} Y_i + \sum_{i=14}^{16} (X_i + Y_i) \right).$$

### 3. Eksperimentinė dalis

Turimus keleto Europos šalių 2005–2008 metų statistinius duomenis apie biržų indeksų kainas suskaidėme į aštuonis pusmečio ilgio laikotarpius. Dviejų tipų portfelius, efektyviuosius  $P_{ef}$  ir pusiausvyrinis  $P_{pus}$ , konstravome septynis kartus: pagal kiekvieno (pradedant pirmuoju) pusmečio statistinius duomenis. Kiekvieną portfelį testavome apskaičiuodami jo gražų realizacijas sekančiame pusmetyje.

Pasirinktos šalys ir atitinkami indeksai:

Prancūzija	FCHI	Šveicarija	SSMI
Italija	CMMG	Austrija	ATX
Olandija	AEX	Belgija	BFX
Vokietija	GDAXI	Rusija	MTMS
Didžioji Britanija	FTSE	Turkija	XU100

Tolygiojo portfelio  $P_t$ , kurio visos komponentės lygios, t.y.  $x_j = 0.1$ ,  $j = 1, \dots, 10$ , vidutinė pelno norma konkrečiam laikotarpiui įvertina visų šių 10 šalių indeksų rinkos būseną šiame laikotarpyje, parodo augimo ir kritimo laikotarpius.

Lyginami sukonstruotų portfelių gražos realizacijų skaitines charakteristikas, galime matyti, kaip jie valdo neišvengiamą mažesnę arba didesnę riziką krentančioje rinkoje, arba, kaip išnaudoja augančios rinkos privalumus.

1 pav. matome vienuolikos 2 lentelėje pateiktų efektyviųjų portfelių bei vienuolikos 3 lentelėje pateiktų pusiausvyrinių portfelių gražos reikšmių konstravimo laikotarpyje (pažymėta  $P$ ) ir gražos realizacijų sekančiame (testavimo) laikotarpyje (pažymėta  $R$ ) pagrindines skaitines charakteristikas – vidurkį ir nuokrypį. Simboliais  $P_t$  ir  $R_t$  pažymėti tolygieji portfeliai.

Krentančioje šio laikotarpio (2006 antras pusmetis – 2007 pirmas pusmetis) rinkoje stebime ryškų pusiausvyrinių portfelių gražų realizacijų pranašumą lyginant su efektyviųjų portfelių gražų realizacijomis. Testuojant kituose krentančios rinkos laikotarpiuose beveik visų pusiausvyrinių portfelių gražų realizacijų skaitinės charakteristikos buvo gautos taip pat geresnės arba neblogesnės už efektyviojo portfelio gražų reali-

1 lentelė. Tolygiojo portfelio skaitinės charakteristikos pusmečio ilgio laikotarpiams

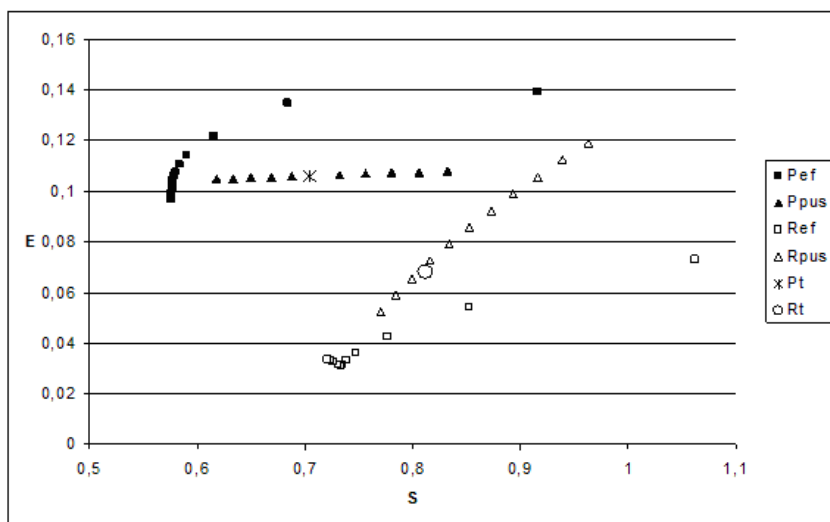
Laikotarpiai	2005 I	2005 II	2006 I	2006 II	2007 I	2007 II	2008 I	2008 II
E	0,077	0,1606	0,0406	0,1058	0,068	-0,0077	-0,1539	-0,1507
S	0,5717	0,6154	1,1071	0,7046	0,8115	1,1323	1,4458	2,1816

2 lentelė. Efektyviųjų portfelių, gautų naudojant 2006 metų pirmo pusmečio statistinius duomenis, koordinatės

$\alpha$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0,9	0	0	0	0	0	0	0,282	0,718	0	0
0,8	0	0,3733	0	0	0	0,0705	0,1423	0,4139	0	0
0,7	0	0,5813	0	0	0	0,1351	0,069	0,2146	0	0
0,6	0	0,6812	0	0	0	0,1607	0,0341	0,124	0	0
0,5	0	0,7415	0	0	0	0,1816	0,0113	0,0585	0	0,0071
0,4	0	0,7787	0	0	0	0,1909	0	0,0175	0	0,0129
0,3	0	0,7773	0	0	0,0213	0,187	0	0	0	0,0144
0,2	0	0,7417	0	0	0,0788	0,1665	0	0	0	0,013
0,1	0	0,7151	0	0	0,1223	0,1509	0	0	0	0,0117
0	0	0,6932	0	0	0,1577	0,1384	0	0	0	0,0107

3 lentelė. Pusiausvyrinių portfelių, gautų naudojant 2006 metų pirmo pusmečio statistinius duomenis, koordinatės

$\alpha$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
1	0,1875	0	0	0,25	0	0	0,25	0	0	0,3125
0,9	0,175	0,0562	0,0063	0,225	0	0,0062	0,225	0,0125	0	0,2938
0,8	0,1625	0,1125	0,0125	0,2	0	0,0125	0,2	0,025	0	0,275
0,7	0,15	0,1687	0,0188	0,175	0	0,0187	0,175	0,0375	0	0,2563
0,6	0,1375	0,225	0,025	0,15	0	0,025	0,15	0,05	0	0,2375
0,5	0,125	0,2812	0,0313	0,125	0	0,0312	0,125	0,0625	0	0,2188
0,4	0,1125	0,3375	0,0375	0,1	0	0,0375	0,1	0,075	0	0,2
0,3	0,1	0,3937	0,0438	0,075	0	0,0437	0,075	0,0875	0	0,1813
0,2	0,0875	0,45	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,1	0	0,1625
0,1	0,075	0,5062	0,0563	0,025	0	0,0562	0,025	0,1125	0	0,1438
0	0,0625	0,5625	0,0625	0	0	0,0625	0	0,125	0	0,125



1 pav. Portfelių gražų skaitinės charakteristikos 2006 antrą pusmetį – 2007 pirmą pusmetį.

zacijų skaitines charakteristikas. Dviejuose stebėtuose augimo laikotarpiuose ne visi pusiausvyriniai portfeliai turėjo geresnes realizacijų skaitines charakteristikas.

### Literatūra

1. H.M. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7:77–91, 1952.
2. C. Papahristodoulou, E. Dotzauer. Optimal portfolios using linear programming models. *Journal of Operations Research Society*, 55:1169–1177, 2004.
3. S. Vakrinienė, A. Pabedinskaitė. Heuristic analysis of investment atrategy. Kn.: *Ūkio technologinis ir ekonominis vystymas*, XII(1): 62–67, 2006.

4. S. Vakriniėnė, G. Misevičius. Tiesinio ir netiesinio optimizavimo modeliai investiciniam portfeliui pasirinkti. *Liet. mat. rink.*, 47(spec. nr.):1–6, 2007.
5. S. Vakriniėnė, D. Sudžiūtė. Tiesinio optimizavimo modelis bimatricinio lošimo pusiausvyros situacijoms rasti. *Liet. mat. rink.*, 47(spec.nr.):389–394, 2007.

## SUMMARY

***S. Vakriniėnė, G. Misevičius. Bimatrix game model for the selection of investment portfolio***

This research suggests a Nash equilibria model for the selection of investment portfolios. The components of portfolio are found by solving linear programming task with binary variables. In the experimental part of the research ineffective portfolios exerted from this model are tested referring to the statistical data of the stock market indexes of several countries. Realizations of the suggested portfolios are compared to realizations of effective portfolios.

*Keywords:* investment portfolio, bimatrix game, Nash equilibria.