

## Baltijos šalių akcijų lyginamojo indekso *OMX Baltic Benchmark* modelių tyrimas

Igoris Belovas<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentalųjų mokslų fakultetas*  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius

<sup>2</sup> *Vilniaus universiteto Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas*  
Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius  
E. paštas: igoris.belovas@mii.vu.lt

**Santrauka.** Straipsnyje yra atliekama Baltijos šalių akcijų lyginamojo indekso (*OMX Baltic Benchmark*) statistinė analizė. Sudaryti, remiantis normaliuoju atvirkštiniu Gauso, Stjudento ir  $\alpha$ -stabilioju dėsniais, indekso grąžų pasiskirstymo modeliai, bei atliktas jų adekvatumo palyginimas. Buvo parodyta, kad simetriškumo hipotezė Baltijos šalių akcijų indekso grąžų didelių laikotarpių modeliams negali būti atmesta.

**Raktiniai žodžiai:** Baltijos šalių akcijų lyginamasis indeksas, logaritminės grąžos,  $\alpha$ -stabilusis modelis, asimetrinis Stjudento modelis, normalusis atvirkštinis Gauso modelis.

### Įvadas

Išsivysčiusių bei besivystančių rinkų akcijų indeksų modeliavimas visada buvo reikšminga ir diskutuojama tema, nes pagrindiniai finansų teorijos modeliai (pvz., modernios portfelio teorijos, ilgalaikio turto įkainojimo, išvestinių vertybinių popierių įkainojimo modeliai) kritiškai priklauso nuo akcijų grąžų pasiskirstymo fundamentinio dėsnio. Literatūros, aprašančios dažniausiai taikomų modelių istoriją ir šiuolaikinę praktiką, suvestinę galima rasti [1, 5, 6, 7, 11, 12] darbuose ir jų nuorodose.

Ankstesniame straipsnyje [2] mes nagrinėjome dešimties dažniausiai taikomų modelių adekvatumą, modeliuojant *Standard & Poor's* akcijų indeksus. Tik  $\alpha$ -stabilusis, Stjudento ir normalusis atvirkštinis Gauso dėsniai adekvačiai apibūdino parinktų *Standard & Poor's* indeksų dienos logaritminių grąžų elgesį. Šiame darbe pritaikysime minėtus (“geriausius”) modelius besivystančių rinkų tyrimui. Darbe nagrinėjamas Baltijos šalių akcijų lyginamasis indeksas (*OMX Baltic Benchmark*), priklausantis Nasdaq Baltijos šalių indeksų šeimai [9]. Indeksą sudaro likvidžiausių ir didžiausios kapitalizacijos bendrovių akcijos, jis parodo aktualias vertybinių popierių rinkos tendencijas ir yra investuotojų įrankis, formuojant vertybinių popierių portfelį.

### 1 Nagrinėjami modeliai

**Asimetrinis Stjudento** (skewed Student’s  $t$ ) yra Stjudento skirstinio apibendrinimas [11] su tankio funkcija

$$f_S(x; \nu, \beta, \mu, \sigma) = \frac{2^{\frac{1-\nu}{2}} e^{\beta(x-\mu)} \left(1 + \frac{Q}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} K_{\frac{\nu+1}{2}}(\sqrt{(\nu+Q)\beta^2\sigma^2})}{\sqrt{\pi\nu\sigma}\Gamma(\frac{\nu}{2}) (\sqrt{(\nu+Q)\beta^2\sigma^2})^{-\frac{\nu+1}{2}}},$$

kur  $\nu > 0$  yra laisvės laipsnių skaičius,  $\beta$  yra asimetrijos parametras,  $\mu$  yra postūmio parametras,  $\sigma > 0$  yra mastelio parametras,  $Q = (x - \mu)^2 \sigma^{-2}$  ir  $K_\lambda(x)$  yra antros rūšies modifikuota Beselio funkcija. Atvejį  $\beta = 0$  atitinka Stjudento dėsnio postūmio-mastelio šeima (non-standardized Student's  $t$ , (NSS)).

**Normalusis atvirkštinis Gauso** (normal-inverse Gaussian, (NIG)) su tankio funkcija [5]

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \frac{\alpha}{\pi} \exp(\sigma \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)) \frac{K_1(\alpha \sigma \sqrt{1 + Q})}{\sqrt{1 + Q}},$$

kur  $\alpha > 0$  yra uodegos sunkumo (formos) parametras,  $\beta$  yra asimetrijos parametras,  $\mu$  yra postūmio parametras, ir  $\sigma > 0$  yra mastelio parametras. Atvejį  $\beta = 0$  atitinka simetrinis normalusis atvirkštinis Gauso dėsnis (SNIG).

Siekiant standartizuoti SNIG skirstinį, įvedama postūmio-mastelio atžvilgiu invariantinė parametrizacija  $\bar{\alpha} = \alpha \sigma$ . Modifikuotas dėsnis (MSNIG) turi tankio funkciją [6]

$$f_{MSNIG}(x; \bar{\alpha}, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f_{SMSNIG}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}; \bar{\alpha}\right),$$

kur  $f_{SMSNIG}(x; \bar{\alpha})$  yra standartinio MSNIG tankio funkcija. Pagal 8.432.7 iš [8], turime

$$f_{SMSNIG}(x; \bar{\alpha}) = \frac{\bar{\alpha} e^{\bar{\alpha}}}{\pi \sqrt{1 + x^2}} K_1(\bar{\alpha} \sqrt{1 + x^2}) = \frac{\bar{\alpha} e^{\bar{\alpha}}}{2\pi} \int_0^\infty t^{-2} e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2}(t + \frac{1+x^2}{t})} dt.$$

**$\alpha$ -stabilusis** ( $\alpha$ -stable) su tankio funkcija [4]

$$f_{\alpha S}(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi \sigma} \int_0^\infty e^{-t^\alpha} \cos\left(\frac{x - \mu}{\sigma} t - \beta t^\alpha \tan \frac{\pi \alpha}{2}\right) dt,$$

kur  $\alpha \in (1, 2]$  yra stabilumo parametras,  $\beta$  yra asimetrijos parametras,  $\mu$  yra postūmio parametras,  $\sigma > 0$  yra mastelio parametras. Atvejį  $\beta = 0$  atitinka simetrinis  $\alpha$ -stabilusis ( $S\alpha S$ ) dėsnis.

Visų modelių parametrų įverčiams gauti yra taikomas maksimalaus tikėtimumo (ML) metodas. Šis metodas duoda tiksliausius įverčius, tačiau reikalauja daug kompiuterinio lauko (jei nėra taikomi lygiagretieji skaičiavimai [3, 4]).

## 2 Tyrimo objektas

Nagrinėsime Baltijos šalių finansines sekas (akcijų indekso logaritmines gražas). Buvo nagrinėtas Baltijos šalių akcijų lyginamasis indeksas (*OMX Baltic Benchmark*). Šį indeksą sudaro visų sektorių didžiausios kapitalizacijos ir likvidžiausių bendrovių akcijos, kuriomis prekiaujama Nasdaq Baltijos šalių vertybinių popierių biržose. Bendrovių akcijų svoris šiame indekse priklauso nuo tos bendrovės akcijų rinkos vertės ir jų skaičiaus rinkoje, t.y. į indeksą įtraukiama tik ta akcinio kapitalo dalis, kuri laisvai cirkuliuoja rinkoje [9].

Finansines sekas sudaro dienos logaritminės gražos. Nagrinėjami empiriniai duomenys apima virš 19 metų, nuo 2000/01/03 iki 2019/03/25 ir nuo 2009/07/15 iki 2019/03/25 laikotarpius. Imčių tūriai atitinkamai  $n_1 = 4904$  ir  $n_2 = 2452$ .

**1 lentelė.** Maksimalaus tikėtinumo santykio kriterijaus statistikų  $L_n$  reikšmės.

Laikotarpis	Modelis		
	SαS	NSS	MSNIG
2000/01/03–2019/03/25	0.00001	0.00012	0.00016
2009/07/15–2019/03/25	0.00002	0.00002	0.00002

### 3 Modelių simetriškumo tyrimas

Hipotezė apie modelių simetriškumą tikrinsime taikant maksimalaus tikėtinumo santykio kriterijų [11]. Sakykime,  $\{R_i\}$  yra logaritminių gražų imtis, kurios normuota maksimalaus log-tikėtinumo funkcija yra  $l(\theta|R)$ ,

$$\hat{l}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log f(x_k; \theta), \quad (1)$$

kur  $\theta$  yra modelio parametrų vektorius. Maksimalaus tikėtinumo santykis apibrėžiamas kaip

$$\Lambda = \frac{l_{MSNIG}(\hat{\theta}|R)}{l_{MNIG}(\hat{\theta}|R)}, \quad L_n = -2 \ln \Lambda, \quad (2)$$

kur  $\hat{\theta}$  ir  $\hat{\hat{\theta}}$  žymi atitinkamai modifikuoto NIG ir modifikuoto simetriško NIG dėsnų parametrų vektorių maksimalaus tikėtinumo įverčius. Jei simetriškumo hipotezė yra teisinga, kriterijaus statistika  $L_n$  (2), kai  $n \rightarrow \infty$ , yra asimptotiškai pasiskirsčiusi pagal  $\chi^2$  su vienu laisvės laipsniu [11]. Taigi, simetriškumo hipotezė yra atmetama, jei  $L_n > \chi_{0,95;1}^2 \approx 0,00393$ , kur  $\chi_{0,95;1}^2$  yra  $\chi^2$  skirstinio su vienu laisvės laipsniu 95% kvantilis. Maksimalaus tikėtinumo santykio kriterijaus statistikų  $L_n$  reikšmės visiems modeliams yra pateikiamos 1 lentelėje.

Matome, kad visuose atvejuose hipotezė yra neatmesta. Taigi, visus keturių parametrų modelius galime redukuoti iki trijų parametrų (simetrinių) modelių be didesnių nuostolių. Analogiškas rezultatas buvo gautas tyrinėjant Madrido vertybinių popierių biržos lyginamąjį indeksą IBEX35 [12].

### 4 Parametrų įverčiai ir modelių adekvatumas

Visų modelių parametrų įverčiai, gauti maksimizuojant log-tikėtinumo funkciją (1), yra pateikiami 2–3 lentelėse. Įvertinę modelių parametrus, turime patikrinti modelavimo adekvatumą. Sudėtingos suderinamumo hipotezei (modelis priklauso skirstinių šeimai, bei modelio parametrai vertinami iš tos pačios imties, pagal kurią tikrinamas suderinamumas) tikrinti, klasikinis Kolmogorovo kriterijus nėra taikytinas, nes kriterijaus statistikos ribinis skirstinys netenka „laisvės nuo pasiskirstymo“. Jis priklausys nuo dėsnio, kuriam paklūsta imtis, parametrų vertinimo metodo, imties tūrio, parametrų skaičiaus ir tipo [10]. Todėl Kolmogorovo kriterijaus procentiniai taškai  $D_P(n, \hat{\theta})$  sudėtingai suderinamumo hipotezei tikrinti buvo apskaičiuoti Monte Carlo metodu, pagal Lemeškos ir kt. aprašyta metodologija [10] (kriterijaus reikšmingumo lygmuo  $P = 0.05$ ).

**2 lentelė.** Baltijos šalių akcijų lyginamojo indekso (OMX Baltic Benchmark) modelių parametrai ir adekvatumas; nagrinėjamas 2000/01/03–2019/03/25 laikotarpis.

Modelis	Parametru įverčiai, $\hat{\Theta}$			$l(\hat{\Theta})$	Modelio adekvatumas	
	Forma	Postūmis	Mastelis		$D_{n_1}(\hat{\Theta})$	$D_P(n_1, \hat{\Theta})$
S $\alpha$ S	1.43761	0.00063	0.00385	3.47127	0.01552*	0.01098
NSS	2.21772	0.00063	0.00459	3.47800	0.01104*	0.01094
MSNIG	0.26372	0.00062	0.00469	3.47956	0.00713	0.01527

**3 lentelė.** Baltijos šalių akcijų lyginamojo indekso (OMX Baltic Benchmark) modelių parametrai ir adekvatumas; nagrinėjamas 2009/07/15–2019/03/25 laikotarpis.

Modelis	Parametru įverčiai, $\hat{\Theta}$			$l(\hat{\Theta})$	Modelio adekvatumas	
	Forma	Postūmis	Mastelis		$D_{n_2}(\hat{\Theta})$	$D_P(n_2, \hat{\Theta})$
S $\alpha$ S	1.46775	0.00051	0.00332	3.63559	0.01321	0.01534
NSS	2.29144	0.00052	0.00397	3.63971	0.01119	0.01532
MSNIG	0.28336	0.00053	0.00412	3.63851	0.01298	0.01852

Modelių palyginimo rezultatai yra pateikiami 2–3 lentelėse. Kolmogorovo kriterijaus statistikos  $D_n(\hat{\Theta})$  stulpelio žvaigždutės žymi, kad rezultatai prieštarauja iškeltajai hipotezei (t.y. modelis atmetamas).

## 5 Išvados ir rezultatų aptarimas

Tiriant Baltijos šalių akcijų lyginamojo indekso (*OMX Baltic Benchmark*) logaritminių gražų pasiskirstymą (žr. 2–3 lenteles), pastebime, kad visų trijų modelių postūmio-mastelio parametru įverčiai yra artimi. Šiek tiek išsiskiria simetrinio  $\alpha$ -stabilaus dėsnio mastelis, tačiau šis modelis parodė blogiausius adekvatumo rodiklius (2000/01/03–2019/03/25 intervale) ir buvo atmestas.

Stjudento dėsnio postūmio-mastelio šeimos adekvatumo rodikliai yra geresni ir buvo labai artimi prie suderinamumo hipotezės neatmetimo, tačiau iš trijų alternatyvų (vėl 2000/01/03–2019/03/25 intervale) vienintelis neatmestas buvo normalusis atvirkštinis Gauso modelis. Šis rezultatas Baltijos šalių akcijų rinkų medžiagoje patvirtina paskutinius radinius [5, 7, 12]. Reikia pabrėžti, kad dvigubai trumpesniame (2009/07/15–2019/03/25) intervale neatmesti buvo visi trys modeliai, tačiau į šį laikotarpį nepateko 2007–2008 m.m. akcijų rinkos griūtis, daugelio ekonomistų laikoma didžiausia (po 1929–1933 m.m. vykusios Didžiosios depresijos). Adekvačiai aprašyti empirinių duomenų, apimančių 2007–2008 m.m. finansų krizę ir jos pasekmes, elgesį pavyko tik taikant normalųjį atvirkštinį Gauso modelį.

Taip pat reikia pastebėti, kad Baltijos šalių akcijų lyginamojo indekso logaritminių gražų  $\alpha$ -stabilųjį, asimetrinį Stjudento ir normalųjį atvirkštinį Gauso keturių parametru modelius galima redukuoti iki trijų parametru (simetrinių) modelių (žr. 1 lentelę). Pažymėtina, kad panašus rezultatas buvo gautas tyrinėjant Madrido vertybinių popierių biržos IBEX35 lyginamąjį indeksą [12].

## Literatūra

- [1] E. Afuecheta, S. Chan and S. Nadarajah. Flexible models for stock returns based on Student’s  $t$  distribution. *The Manchester School*, **87**(3):403–427, 2019.

- [2] I. Belovas and L. Sakalauskas. Modeling financial data distributions: A comparison of models. In *Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics: Proceedings of the XI International Conference, Minsk*, pp. 194–197, 2016.
- [3] I. Belovas and V. Starikovičius. Parallelization of  $\alpha$ -stable modelling algorithms. *Math. Model. Anal.*, **12**(4):409–418, 2007.
- [4] I. Belovas and V. Starikovičius. Parallel computing for mixed-stable modelling of large data sets. *Inf. Tech. Cont.*, **44**(2):148–154, 2015.
- [5] C.G. Corlu and A. Corlu. Modelling exchange rate returns: which flexible distribution to use? *Quant. Finance*, **15**(11):1851–1864, 2015.
- [6] A. Eriksson, E. Ghysels and F. Wang. The normal inverse Gaussian distribution and the pricing of derivatives. *J. Deriv.*, **16**(3):23–37, 2009.
- [7] A. Göncü, M.O. Karahan and T.U. Kuzubaş. A comparative goodness-of-fit analysis of distributions of some Lévy processes and Heston model to stock index returns. *North Amer. J. Econ. Fin.*, **36**:69–83, 2016.
- [8] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 8th edition, 2014.
- [9] <https://nasdaqbaltic.com/lt/indeksai/>, accessed: 2019-03-26.
- [10] B. Lemeshko, S. Lemeshko and A. Rogozhnikov. Real-time studying of statistic distributions of non-parametric goodness-of-fit tests when testing complex hypotheses. In *The International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference” – AMSA-2011*, vol. 1, pp. 19–27, 2011.
- [11] E. Platen and R. Rendek. Empirical evidence on Student- $t$  log-returns of diversified world stock indices. *J. Stat. Theory Pract.*, **2**(2):233–251, 2008.
- [12] P. Suárez-García and D. Gómez-Ullate. Scaling, stability and distribution of the high frequency returns of the IBEX 35 index. *Physica A*, **392**(6):1409–1407, 2013.

#### SUMMARY

#### **Modeling Baltic market benchmark index: a comparison of models**

*Igoris Belovas*

In this paper we perform a statistical analysis of the returns of *OMX Baltic Benchmark* index. We construct symmetric  $\alpha$ -stable, non-standardized Student’s  $t$  and normal-inverse Gaussian models of daily logarithmic returns of the index, using maximum likelihood method for the estimation of the parameters of the models. The adequacy of the modeling is evaluated with the Kolmogorov-Smirnov tests for composite hypothesis. The results of the study indicate that the normal-inverse Gaussian model outperforms alternative heavy-tailed models for long periods of time, while the non-standardized Student’s  $t$  model provides the best overall fit for the data for shorter intervals. According to the likelihood-ratio test, the four-parameter models of the log-returns of *OMX Baltic Benchmark index* could be reduced to the three-parameter (symmetric) models without much loss.

*Keywords:* OMX Baltic Benchmark index, logarithmic returns,  $\alpha$ -stable model, skewed Student’s  $t$  model, normal-inverse Gaussian model.