LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI ISSN 0132-2818
51 tomas, 2010, 139–141 www.mii.lt/LMR/

Integralų geometrinė interpretacija

Gintaras Puriuškis

Vilniaus universitetas
Naugarduko 24, LT-2600 Vilnius
E. paštas: gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

Santrauka. Straipsnyje pateikiama kreivinių integralų geometrinė interpretacija. Pirmojo tipo kreivinis integralas interpretuojamas kaip tam tikro cilindrinio paviršiaus trimatėje erdvėje plotas, o antrojo tipo kreivinis integralas kaip to paties paviršiaus projekcijų į atitinkamas koordinatines plokštumas plotų suma.

Raktiniai žodžiai: kreivinis integralas, geometrinė interpretacija.

Jau mokykloje mokiniai žino, kad apibrėžtinis integralas $\int_a^b f(x)\,dx$ yra kreivinės trapecijos $x = a$, $x = b$, $y = 0$ ir $y = f(x)$ plotas. Universitete pirmakursiams matematinės analizės paskaitose apibrėžiamas apibrėžtinis integralas kaip integralinės sumos riba nepriklausomai nuo to, koks integralas yra dėstomas - Lebego, Rimano arba pasirinktas trečiasis variantas pagal V.Mackevičiaus [4] knygą „Integralas ir matas“.

Antrame kurse matematinės analizės paskaitose dėstomas dvilypis integralas geometriškai interpretuojamas kaip tam tikros trimatės figūros tūris. Toliau dėstomi kreiviniai integralai. Daugumoje vadovėlių [4, 2, 1, 6, 3, 5] yra pateikiama kreivinių integralų fizikinė prasmė: pirmojo tipo kreivinis integralas reiškia kreivės masę, o antrojo tipo kreivinis integralas darbą. Tačiau nei viename matematinės analizės vadovėlyje neteko matyti šių integralų geometrinės interpretacijos. Fizikos ir matematikos studentai dažnai manęs klausdavo, ką reiškia tie kreiviniai integralai, kokia jų prasmė. Šiame straipsnyje yra pateikiama kreivinių integralų geometrinė interpretacija.

Pirmiausia pradėsime nuo apibrėžimo. Pirmojo tipo kreivinio integralo apibrėžimas daugumoje vadovėlių pateikiamas toks:

$$\int_l f(x, y)\,ds = \int_a^b f\bigl(x(t), y(t)\bigr)\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)}\,dt. \tag{1}$$

Man priimtinesnis yra V. Iljino, E. Pozniako [2] knygoje pateiktas pirmojo tipo kreivinio integralo apibrėžimas kaip integralinės sumos riba, kadangi visi iki tol dėstyti integralai buvo pateikiami kaip integralinių sumų ribos. [2] knygoje po to jau yra įrodoma, kad pirmojo tipo kreivinis integralas yra lygus (1) formulės dešinei pusei.

Plokštumoje Oxy imkime kreivę l, aprašoma parametrinėmis lygtimis

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{2}$$

$a \leqslant t \leqslant b$. Tarkime, kad $f(x, y)$ yra apibrėžta kreivėje l. Paprastumo dėlei tarkime, kad $f(x, y) \geqslant 0$. Intervalą $[a, b]$ suskaidome į n intervalų $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$.

Tokiu būdu kreivė l padalijama į n (2) dalių, kur $t_{k-1} < t < t_k$. Kiekvienoje dalyje laisvai pasirinkime tašką (ξ_k, η_k) , kurio koordinatės atitinka $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, $t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$. $\triangle l_k$ pažymėkime k-osios kreivės dalies lanko ilgį. Integralinės sumos riba (jei egzistuoja)

$$\lim \sum f(\xi_k, \eta_k) \triangle l_k, \tag{3}$$

kai didžiausias ilgis $\triangle l_k$ artėja prie nulio yra vadinama pirmojo tipo kreiviniu integralu. (2) lygtys yra kreivė plokštumoje Oxy. Tačiau trimatėje erdvėje $Oxyz$ (2) užrašas reiškia cilindrinį paviršių, kadangi nėra vienos koordinatės (t.y. nėra trečiosios koordinatės z).

Funkcijos $z = f(x, y)$ grafiką galime apibrėžti analogiškai vienmačiam atvejui $z = f(x)$. Funkcijos $z = f(x, y)$ grafiku vadinsime skaičių trejetus $(x, y, f(x, y))$, atidėtus trimatėje erdvėje $Oxyz$. Tokio grafiko geometrinė interpretacija yra paviršius, jei funkcija $f(x, y)$ yra pakankamai „gera“, pvz., glodi. Kiekvienas dėmuo (3) formulėje $f(\xi_k, \eta_k)\triangle l_k$ yra kreivinio stačiakampio plotas. Šio stačiakampio dvi priešingos kraštinės yra $f(\xi_k, \eta_k)$ ilgio, trečia kraštinė yra (2) kreivė $t_{k-1} < t < t_k$ plokštumoje $z = 0$, ketvirta kraštinė yra ta pati kreivė, tik plokštumoje $z = f(\xi_k, \eta_k)$. Čia sugalvota sąvoka „kreivinis stačiakampis“ yra analogas sąvokos „kreivinė trapecija“.

Taigi iš šių samprotavimų ir (3) apibrėžimo išplaukia, kad pirmojo tipo kreivinis integralas yra (2) cilindrinio paviršiaus plotas $a \leqslant t \leqslant b$, kurį riboja plokštuma $z = 0$ ir paviršius $z = f(x, y)$. Atskiru atveju, kai (2) kreivė yra uždara, t.y. $\varphi(a) = \varphi(b)$, $\psi(a) = \psi(b)$, gauname, kad pirmojo tipo kreivinis integralas yra tam tikros trimatės cilindrinės figūros šoninio paviršiaus plotas.

Analogiškai [2] knygoje yra apibrėžiamas antrojo tipo kreivinis integralas. Paprastumo dėlei tarkime, kad tiesės $y = \text{const}$, $x = \text{const}$ (2) kreivę kerta ne daugiau kaip viename taške ir didėjant parametrui t didėja funkcijos $\varphi(t)$ ir $\psi(t)$. Antrojo tipo kreivinio integralo

$$\int_l f(x, y)\, dx \tag{4}$$

esminis skirtumas nuo (3) pirmojo tipo kreivinio integralo apibrėžimo yra tas, kad $\triangle l_k$ yra keičiamas į $\triangle x_k$, t.y. k-oji kreivės dalis yra projektuojama į x ašį. Kreivinis stačiakampis iš (3) apibrėžimo bus projektuojamas į Oxz koordinatinę plokštumą. Taigi (4) antrojo tipo kreivinis integralas bus lygus tos pačios cilindrinės figūros, aprašytos pirmojo tipo kreivinio integralo interpretacijoje, projekcijos Oxz plokštumoje plotas.

Analogiškai, antrojo tipo kreivinį integralą

$$\int_l f(x, y)\, dy$$

galime interpretuoti kaip tos pačios figūros projekcijos Oyz plokštumoje plotą.

Literatūra

[1] G.M. Fichtengolcas. *Matematinės analizės pagrindai.* Nauka, Maskva, 1964 (rusų k.).

[2] V. Iljinas, E. Pozniakas. *Matematinės analizės pagrindai.* Mokslas, Vilnius, 1981.

[3] V. Kabaila. *Matematinė analizė, 2 d.* Mokslas, Vilnius, 1986.

[4] V. Mackevičius. *Integralas ir matas.* TEV, Vilnius, 1998.

[5] E. Misevičius. *Matematinė analizė.* VU leidykla, Vilnius, 2001.

[6] S.M. Nikolskij. *Matematinės analizės kursas.* Nauka, Maskva, 1983 (rusų k.).

SUMMARY

Geometric interpretation of integrals
G. Puriuškis

There are considered the geometric interpretation of curvilinear intels of first and second type. The integrals first type are interpretated like area of cilindric figure, the integrals of second type – like area of projection of the same cilindric figure to the coordinate plane.

Keywords: geometric interpretation, curvilinear integral.