LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI
51 tomas, 2010, 68–70

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Glaustinių paraboloidų šeimos

Kazimieras Navickis

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjamos trimatės Euklido erdvės paviršių vienparametrinės glaustinių paraboliodų šeimos.

Raktiniai žodžiai: paviršius, glaustinis paraboloidas, paviršių šeima.

Tarkime, kad trimatėje Euklido erdvėje paviršius S apibrėžtas išreikštine lygtimi

$$S : z = f(x, y), \tag{1}$$

čia tariama, kad funkcija f yra tolydinė ir turi tolydines dalines išvestines taške (x, y). Paviršių S nagrinėsime jo taško $M(x; y; f(x, y))$ aplinkoje

Tarkime, kad

$$\gamma : x = \varphi(t), \qquad \psi = \psi(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

yra kreivė parametrų x ir y plokštumoje. Jos liftas

$$\Gamma : \vec{R} = \{\varphi(t),\ \psi = \psi(t), z(t)\}$$

yra paviršiaus S kreivė, einanti per tašką M; čia

$$z(t) = f\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr).$$

Pažymėkime

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Paviršiaus S taške M turime tris ortus

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}}\{1; 0; f_x\} = \{l_1; l_2; l_3\},\\
\vec{e}_3 &= \frac{1}{W}\{-f_x; -f_y; 1\} = \{n_1; n_2; n_3\},\\
\vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \frac{1}{W\sqrt{E}}\{-f_x \cdot f_y; 1 + f_x^2; f_y\} = \{m_1; m_2; m_3\};
\end{aligned}$$

čia

$$E = \sqrt{1 + f_x^2}, \qquad W = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

Išilgai kreivės $\varGamma$ matricos

$$R = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$$

elementai yra parametro t funkcijos.

Bet kurio erdvės taško $N(x; y; z)$ koordinates bazės $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ atžvilgiu žymėsime x_1, y_1, z_1. Atlikus koordinačių transformaciją

$$(x_1\ y_1\ z_1) = \bigl(x - \varphi(t)\ y - \psi(t)\ z - z(t)\bigr) \cdot R,$$

paviršiaus S lygtis tampa tokia:

$$\begin{aligned} S : g(x_1, y_1, z_1) \equiv f\bigl(&\varphi(t) + l_1x_1 + m_1y_1 + n_1z_1,\\ &\psi(t) + l_2x_1 + m_2y_1 + n_2z_1\bigr) - \bigl(z(t) + l_3x_1 + m_3y_1 + n_3z_1)\bigr) = 0. \end{aligned}$$

Pažymėkime

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1}, \qquad g_2 = \frac{\partial g}{\partial y_1}, \qquad g_3 = \frac{\partial g}{\partial z_1},$$
$$g_{11} = \frac{\partial g}{(\partial x_1)^2}, \qquad \ldots, \qquad g_{33} = \frac{\partial^2 g}{(\partial z_1)^2}.$$

Išvestinių g_a, g_{ab} $(a, b, \ldots = 1, 2, 3)$ reikšmes taške M žymėsime $B_a; B_{ab}$, jos yra parametro t funkcijos. Kadangi

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = 0, \qquad B_3 = -W \neq 0,$$

tai funkcija g apibrėžia funkciją

$$z_1 = h(x_1, y_1).$$

Pažymėkime

$$A_{11} = \frac{\partial^2 z_1}{(\partial x_1)^2}, \qquad A_{12} = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1 \partial y_1}, \qquad A_{22} = \frac{\partial^2 z_1}{(\partial y_1)^2}.$$

Funkcijų $A_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta, \ldots = 1, 2)$ reikšmes taške M žymėsime $c_{\alpha\beta}$. Jos yra parametro t funkcijos. Dydžiai $B_{\alpha\beta}, B_3$ ir $c_{\alpha\beta}$ yra susieti lygtimis

$$B_{\alpha\beta} + B_3 \cdot c_{\alpha\beta} = 0.$$

Pažymėkime

$$x^1 = x_1, \qquad x^2 = y_1.$$

Su kiekviena parametro t reikšme lygtis

$$O_M(S) : z_1 = \frac{1}{2} c_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

apibrėžia antrosios eilės paviršių $O(S)$, kuris turi antrosios eilės kontaktą taške M su duotuoju paviršiumi S. Jis yra šio paviršiaus glaustinis paraboloidas taške M. Kadangi taškas M juda paviršiaus S kreive $\varGamma$, mes turime vienparametrinę šeimą glaustinių paraboloidų, apibrėžtų išilgai kreivės Γ. Specializuodami paviršiaus S kreives Γ, gauname įvairias vienparametrines glaustinių paraboloidų šeimas. Skyrium imant, kreivėmis Γ galima pasirinkti paviršiaus S koordinatines linijas, asimptotines linijas, kreivumo linijas ir t.t.

Darbe taip pat nagrinėjamos aukštesniųjų eilių glaustinių paraboloidų vienparametrinės šeimos, kai paviršiaus S lygtis yra išreikštinė, neišreikštinė, vektorinė-parametrinė. MAPLE paketo pagalba pateikiami vizualizacijos pavyzdžiai.

Literatūra

[1] J. Stillwell. *Geometry of Surfaces*. Springer-Verlag, 1992.

SUMMARY

Families of osculating paraboloids

K. Navickis

In this article we generalize some notions in classical differential geometry to families of osculating paraboloids.

Keywords: surface, osculating paraboloid.