Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai ISSN 0132-2818
52 tomas, 2011, 44–47 www.mii.lt/LMR/

Neholonominių kompleksų $NGr(1,5,5)$ geometrija

Kazimieras Navickis

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjami n-matės Euklido erdvės hiperpaviršiaus aukštesnių eilių glaustiniai hiperpaviršiai. Tai leidžia nagrinėti duotojo hiperpaviršiaus geometrines savybes jo taško aukštesnių eilių diferencialinėse aplinkose.

Raktiniai žodžiai: Grasmano daugdara, projektyvinė atitiktis, tiesių kompleksas.

Tarkime, kad $Gr(1,5)$ – aštuonmatė penkiamatės projektyvinės erdvės P_5 visų tiesių Grasmano daugdara. Nagrinėsime jos glodų penkiamatį podaugdarį $Gr(1,5,5)$ t.y. erdvės P_5 penkiamatį tiesių kompleksą. Tarkime, kad $\{A_i\}$ $(i,j,k,\ldots=1,\ldots,6)$ yra erdvės P_5 judamasis reperis, sudarytas iš 6 tiesiškai nepriklausomų analizinių taškų. Tokio reperio judėjimas aprašomas lygtimis

$$dA_i = \omega_i^j A_j,$$
$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

Taškus A_1 ir A_2 patalpinkime komplekso $Gr(1,5,5)$ tiesėje l. Atlikus dalinę reperio kanonizaciją, tiesių komplekso $Gr(1,5,5)$ lygtis galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} \omega_1^4 + \omega_2^3 = 0, \\ \omega_1^5 + \omega_2^4 = 0, \\ \omega_1^6 + \omega_2^5 = 0; \end{cases} \tag{1}$$

atitinkamos išorinės kvadratinės lygtys čia yra praleidžiamos.

Tiesių komplekso $Gr(1,5,5)$ pirmasis fundamentalusis diferencialinis–geometrinis objektas $H^{(1)}(Gr(1,5,5))$ nustato atitiktį

$$K^3(l)\colon\ M\bigl(t^1,t^2\bigr) = t^1A_1 + t^2A_2 \longleftrightarrow \Pi_2\bigl(M\bigl(t^1,t^2\bigr)\bigr) : \begin{cases} t^2x^4 - t^1x^3 = 0, \\ t^2x^5 - t^1x^4 = 0, \\ t^2x^6 - t^1x^5 = 0 \end{cases}$$

tarp tiesės $l = (A_1A_2)$ taškų M ir dvimačių plokštumų $\Pi_2(M)$. Visos tiesių komplekso $Gr(1,5,5)$ tiesės, einančios per bet kurį fiksuotą tiesės l tašką M, sudaro dvimatį kūgį $\Gamma_2(M)$ su viršūne taške M. Šio dvimačio kūgio dvimate liečiamąja plokštuma yra $\Pi_2(M)$. Kai taškas M juda tiese l dvimatės plokštumos $\Pi_2(M)$ keičiasi ir aprašo trimatį antrosios eilės kūgį K_2 su viršūne l:

$$K_2:\begin{cases} x^3x^5-(x^4)^2=0,\\ x^3x^6-x^4x^5=0,\\ x^4x^6-(x^5)^2=0. \end{cases}$$

Projektyvinę atitiktį $K^3(l)$ vadinsime pagrindine tiesių komplekso $Gr(1,5,5)$ atitiktimi.

Tris tiesės l taškus

$$M_a=A_1+t_aA_2 \quad (a=1,2,3)$$

atitinka trys dvimatės plokštumos $\Pi_2(t_a)$, asocijuotos su šiais taškais. Jos apibrėžia hiperplokštumą

$$\Pi_4(t_1,t_2,t_3)\colon x^3-(t_1+t_2+t_3)x^4+(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)x^5-t_1t_2t_3x^6=0.$$

Taip gauname naują projektyvitetą

$$(M_1,M_2,M_3)\longleftrightarrow \Pi_4(t_1,t_2,t_3),$$

kuris trims taškams priskiria hiperplokštumą. Ribiniu atveju, kada $t_a\to t$ $(a=1,2,3)$, gauname dar vieną hiperplokštumą

$$\Pi_4\colon x^3-3tx^4+3t^2x^5-t^3x^6=0.$$

Neholonominiu kompleksu $NGr(1,5,5)$ vadinsime Grasmano daugdarą $Gr(1,5)$ su joje apibrėžtu atitikčių lauku $K^3(l)$.

Pažymėkime

$$\begin{cases} \vartheta_{11}=10\omega_1^2-\omega_4^3-2\omega_5^4-3\omega_6^5,\\ \vartheta_{12}=-\frac{1}{2}(10\omega_1^1-10\omega_2^2+3\omega_3^3+\omega_4^4-\omega_5^5-3\omega_6^6),\\ \vartheta_{22}=3\omega_3^4+2\omega_4^5+\omega_5^6-10\omega_2^1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{1111}=\omega_5^3+3\omega_6^4,\\ \vartheta_{1112}=\frac{1}{2}(\omega_4^3-3\omega_6^5),\\ \vartheta_{1122}=\frac{1}{2}(\omega_3^3-\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_6^6),\\ \vartheta_{1222}=\frac{1}{2}(\omega_5^6-3\omega_3^4),\\ \vartheta_{2222}=3\omega_3^5+\omega_4^6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{111111}=-\omega_6^3,\\ \vartheta_{111112}=\frac{1}{6}(3\omega_6^4-\omega_5^3),\\ \vartheta_{111122}=\frac{1}{15}(3\omega_5^4-\omega_4^3-3\omega_6^5),\\ \vartheta_{111222}=\frac{1}{20}(3\omega_4^4-\omega_3^3-3\omega_5^5+\omega_6^6),\\ \vartheta_{112222}=\frac{1}{15}(3\omega_3^4-3\omega_4^5+\omega_5^6),\\ \vartheta_{122222}=\frac{1}{6}(\omega_4^6-3\omega_3^5),\\ \vartheta_{222222}=\omega_3^6. \end{cases}$$

Neholonominio komplekso $NGr(1,5,5)$ diferencialinės lygtys yra tokios:

$$\vartheta_{p_1\dots p_{2a}}=L^p_{p_1\dots p_{2a},I}\omega^I_p,$$

čia $a = 1,2,3$; $p,q,p_1,p_2,\ldots = 1,2$; $I,J,K\ldots = 3,\ldots,6$; dydžiai $L^p_{p_1\ldots p_{2a},I}$ yra simetriški indeksų $p_1,\ldots,p_{2a}$ atžvilgiu. Diferencialinis – geometrinis objektas $\{L^p_{p_1\ldots p_{2a},I}\}$ algebriškai panašus į diferencialinį–geometrinį objektą

$$\big\{A_{p_1p_2}, A_{p_1\ldots p_4}, A_{p_1\ldots p_6}, A_{p_1\ldots p_8}, A_{p_1\ldots p_{10}}, B, B_{p_1p_2}, B_{p_1\ldots p_4}, B_{p_1\ldots p_6}, B_{p_1\ldots p_8},\\ C_{p_1\ldots p_4}, B_{p_1\ldots p_6}, B_{p_1\ldots p_8}, \tilde{C}_{p_1p_2}, \tilde{C}_{p_1\ldots p_4}, \tilde{C}_{p_1\ldots p_6}, \overline{C}, \overline{C}_{p_1p_2}, E_{p_1p_2}, E_{p_1\ldots p_4}, E_{p_1\ldots p_6}\big\}.$$

Kiekviena iš dydžių sistemų

$$\begin{gathered}\{A_{p_1\ldots p_{10}}\}, \quad \{A_{p_1\ldots p_8}\}, \quad \{A_{p_1\ldots p_6}\},\\ \{B_{p_1\ldots p_8}\}, \quad \{B_{p_1\ldots p_6}\}, \quad \{E_{p_1\ldots p_6}\}\end{gathered}$$

yra savarankiškas diferencialinis–geometrinis objektas (tenzorius).

Pažymėkime

$$\begin{cases} g = B,\\ g_{p_1p_2} = B_{p_1p_2} - 42A_{p_1p_2} + \frac{3}{10}E_{p_1p_2},\\ g_{p_1\ldots p_4} = 10A_{p_1\ldots p_4} + B_{p_1\ldots p_4},\\ G_{p_1\ldots p_4} = 70A_{p_1\ldots p_4} + E_{p_1\ldots p_4},\\ g_{p_1\ldots p_6} = -9A_{p_1\ldots p_6} + \frac{1}{10}E_{p_1\ldots p_6},\\ g_{p_1\ldots p_8} = 30A_{p_1\ldots p_8} + B_{p_1\ldots p_8}.\end{cases}$$

Dydžių sistema

$$\{g, g_{p_1p_2}, g_{p_1\ldots p_4}, G_{p_1\ldots p_4}, g_{p_1\ldots p_6}, g_{p_1\ldots p_8}\}$$

sudaro neholonominio komplekso $NGr(1,5,5)$ pirmąjį neholonomiškumo objektą. Diferencialinių 1-formų sistema

$$\omega_1^4 + \omega_2^3, \qquad \omega_1^5 + \omega_2^4, \qquad \omega_1^6 + \omega_2^5$$

yra pilnai integruojam tik tada, kada pirmojo neholonomiškumo objekto visos komponentės yra lygios nuliui.

Tenzorius $A_{p_1\ldots p_{10}}$ tiesėje l apibrėžia 10 taškų, kurių koordinatės tenkina lygtį

$$A_{p_1\ldots p_{10}} t^{p_1}\ldots t^{p_{10}} = 0$$

(inflekciniai centrai; čia $t = t^2 : t^1$).

Darbe įrodoma, kad tiesinis tiesių kompleksas $LGr(1,5,5)$, apibrėžiamas lygtimis

$$p^{13} + p^{42} = -\left(\frac{15}{2}A_{112222} + \frac{1}{5}E_{22}\right)p^{34} - \left(15A_{111222} - \frac{1}{5}E_{12}\right)p^{35} - \frac{15}{2}A_{111122}p^{36}\\ - \left(\frac{45}{2}A_{111122} + \frac{1}{5}E_{11}\right)p^{45} - 15A_{111112}p^{46} - \frac{15}{2}A_{111111}p^{56},$$

$$
\begin{aligned}
p^{14}+p^{52} ={}& \frac{15}{2}A_{122222}p^{34}+\left(15A_{112222}-\frac{1}{10}E_{22}\right)p^{35}+\left(\frac{15}{2}A_{111222}-\frac{1}{10}E_{12}\right)p^{36} \\
&+(\frac{45}{2}A_{111222}-\frac{1}{10}E_{11})p^{45}+(15A_{111222}-\frac{1}{10}E_{11})p^{46}+\frac{15}{2}A_{111112}p^{56}, \\
p^{15}+p^{62} ={}& -\frac{15}{2}A_{222222}p^{34}-15A_{122222}p^{35}-\frac{15}{2}A_{112222}p^{36} \\
&-\left(\frac{45}{2}A_{112222}+\frac{1}{5}E_{22}\right)p^{45}-\left(15A_{111222}+\frac{1}{5}E_{12}\right)p^{46}- \\
&-\left(\frac{15}{2}A_{111122}+\frac{1}{5}E_{11}\right)p^{56},
\end{aligned}
$$

yra invariantinis.

Literatūra

[1] H. Pottmann and J. Wallner. *Computational Line Geometry.* Prentice-Hall, Englewod Cliffs, N.J., 2001.

SUMMARY

Geometry of nonholonomic complexes $NGr(1,5,5)$

K. Navickis

In this article the differential geometry of nonholonomic complexes in five dimensional projective space is considered. The algebraic structure of the first fundamental object is considered and the geometrcal interpretations of some comitants of the first fundamental object are given.

Keywords: Grassmann manifold, projective correspondence, complex of lines.