LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI ISSN 0132-2818
52 tomas, 2011, 62–66 www.mii.lt/LMR/

Lietuvos regioniniai matematikos konkursai: patirtis ir perspektyvos

Antanas Apynis, Romualdas Kašuba, Eugenijus Stankus

Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: antanas.apynis@mif.vu.lt; romualdas.kasuba@mif.vu.lt
E. paštas: eugenijus.stankus@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame straipsnyje glaustai apžvelgiami komandiniai jaunųjų matematikų konkursai, kasmet organizuojami Alytaus apskrityje, Pasvalyje, Raseiniuose ir Rietave. Juos rengiant yra prisidėję ir šio straipsnio autoriai. Manome, kad komandiniai konkursai ypač naudingi mokiniams. Jie ugdo gebėjimą dirbti komandoje, skatina bendradarbiauti. Straipsnyje dalijamasi sukaupta patirtimi, nagrinėjama uždavinių tematika.

Raktiniai žodžiai: konkursai, užduotys, geometrija, kombinatorika, skaičių dalumas, įrodymas.

Lietuvoje matematiniai mokinių konkursai ir olimpiados pradėtos organizuoti jau seniai – daugiau kaip prieš penkiasdešimt metų. Jose yra dalyvavę įvairių kartų matematikai, tarp jų – ir labai garsūs. Pirmoji matematikos olimpiada įvyko Vilniuje 1951 m. Nuo 1952 metų ši olimpiada tapo respublikine. Komandinės matematikos olimpiados Lietuvoje pradėtos rengti nuo 1986 metų. Pažymėtina ir tai, kad lietuvių kalba išleistos mokyklinės matematikos literatūros bibliotekoje atsirado olimpiadinių uždavinių rinkinių [1, 3, 4] ir knygų, kuriose nagrinėjami nestandartiniai uždavinių sprendimo metodai [2, 5].

Įvyko jau keturioliktoji Alytaus apskrities moksleivių komandinė olimpiada mokytojo Kazio Klimavičiaus taurei laimėti. Šių pirmųjų dešimties olimpiadų pagrindinė organizatorė buvo matematikos mokytoja ekspertė Marytė Zenkevičienė. Jose kasmet dalyvauja daugelio Dzūkijos vidurinių mokyklų ir gimnazijų komandos. Jau senokai nusistovėjo glaudus alytiškių bendradarbiavimas su Vilniaus universiteto bei Vilniaus pedagoginio universiteto matematikais. Jie nuolat kviečiami į matematikos mokytojų konferencijas, seminarus, o nuo 2005 metų rengia ir minėtos olimpiados užduotis. Pateikiame vienos iš Alytaus olimpiadų uždavinius.

1. Krepšyje yra baravykų, raudonikių ir rudmėsių – iš viso 41 grybas. Paėmę iš krepšio bet kuriuos 33 grybus, tarp jų rasime nemažiau kaip 3 raudonikius. Tarp bet kurių 30 grybų rastume bent du baravykus, o tarp bet kurių 25 grybų – bent vieną rudmėsę. Nustatykite, kiek baravykų, raudonikių ir rudmėsių yra krepšyje.

2. Raskite lygties $x^2 - xy - 2y^2 = 7$ visus sveikuosius sprendinius.

3. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio pusė yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, o trečdalis – natūraliojo skaičiaus kubas.

4. Natūralieji skaičiai suskirstyti į tokias grupes: (1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10), (11; 12; 13; 14; 15), ... Raskite: a) vienuoliktos grupės skaičių sumą; b) dvidešimt pirmos grupės pirmąjį skaičių.

5. Dešimtyje vazų yra saldainių – visose po skirtingą skaičių. Kiekvienos vazos saldainius galima išdėlioti į kitas devynias vazas taip, kad šiose devyniose vazose saldainių būtų po lygiai. Koks mažiausias saldainių skaičius gali būti vazoje, kurioje yra daugiausia saldainių?

6. Išveskite formulę sumai $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$ apskaičiuoti. (Čia $m! = m \cdot (m-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ yra skaičiaus m faktorialas, $m = 1, 2, \ldots, n$.)

7. Jeigu $x > 0$, $y > 0$ ir $x^3 + y^3 = x - y$, tai $x^2 + y^2 < 1$. Įrodykite.

8. Raskite mažiausią teigiamą nelygybės $[x] \cdot \{x\} \geqslant 3$ sprendinį (čia $[x]$ yra sveikoji skaičiaus x dalis, $\{x\} = x - [x]$ – trupmeninė skaičiaus x dalis; pavyzdžiui, $[5{,}1] = 5$, $\{5{,}1\} = 0,1$, $[4{,}999] = 4$, $\{4{,}999\} = 0{,}999$, $-5{,}01 = -6$, $\{-5{,}01\} = 0{,}99$).

9. Stačiojo trikampio ABC smailusis kampas lygus $15°$, o aukštinės, išvestos iš stačiojo kampo C į įžambinę, ilgis lygus 1 dm. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą.

10. Stačiakampio $ABCD$ kraštinė BC yra dvigubai ilgesnė už kraštinę AB. Šio stačiakampio viduje pažymėtas taškas M. Raskite kampo ABM kosinusą ir stačiakampio plotą, jeigu $AM = \sqrt{2}$, $BM = 3$, $CM = 6$.

Raseinių krašto olimpiada profesoriaus Jono Kubiliaus taurei laimėti yra Vilniaus Universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto beveik prieš tris dešimtmečius pradėto bendradarbiavimo su dabartine Raseinių „Žemaičio“ gimnazija tąsa. Kartu ji yra savotiška regioninė Lietuvos komandinės moksleivių didžiosios Jono Kubiliaus taurės matematikos olimpiados, nuo 1986 metų vykstančios Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, atšaka Raseiniuose su atskira taure. Ji vyksta nuo 1999 metų ir susideda iš komandinių ir individualių varžytuvių. Individualios užduotys yra skiriamos pagrindinės mokyklos baigiamųjų klasių, o komandinės užduotys – pirmųjų gimnazijos klasių mokiniams. Atkreipiame dėmesį, kad Raseinių komandinės olimpiados užduotys formuluojamos su pasirenkamuoju atsakymu – taigi kitaip, negu kitose komandinėse olimpiadose. Kaip būdingą pavyzdį pateikiame penktosios olimpiados (2004 metų) užduotį.

1. Kiek sprendinių sveikaisiais skaičiais (x, y) turi lygtis $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$?
(A) 14; (B) 15; (C) 28; (D) 29; (E) 30.

2. Natūralusis skaičius baigiasi 11, dalijasi iš 11, turi 11 skaitmenų ir yra pats mažiausias iš visų tokių skaičių. To skaičiaus tūkstančių (ketvirtasis iš dešinės) skaitmuo yra:
(A) 1; (B) 2; (C)3; (D)5; (E) 9.

3. Į kiek daugiausiai dalių gali padalinti plokštumą dešimt tos plokštumos tiesių?
(A) 20; (B) 45; (C) 54; (D) 56; (E) 1024.

4. Natūralusis skaičius, užrašomas vien tik nuliais ir vienetais, dalijasi iš 54. Kiek skaitmenų turi pats mažiausias toks skaičius?
(A) 6; (B) 9; (C) 10; (D) 11; (E) 12.

5. Su keliomis sveikosiomis n reikšmėmis $\frac{n+31}{n-1}$ yra sveikasis skaičius?
(A) 13; (B) 12; (C) 10; (D) 9; (E) 8.

6. Trupmena $\frac{m}{n}$ yra didesnė už $\frac{1}{100}$, bet mažesnė už $\frac{1}{99}$ (m ir n yra natūralieji skaičiai) ir tokia, kad jos skaitiklio m ir vardiklio n suma yra pati mažiausia. Toji mažiausioji $m + n$ suma yra:
(A) 199; (B) 201; (C) 301; (D) 302; (E) 303.

7. Keliais skirtingais būdais galima paimti septynis skirtingus skaitmenis nuo 1 iki 9 imtinai, kad tų septynių skaitmenų suma dalytųsi iš 3?
(A) mažiau negu 10; (B) 10; (C) 11; (D) 12; (E) daugiau negu 12.

8. Kiek sveikųjų skaičių x, y ir z trejetų tenkina lygtį $xyz + yz + z = 1$?
(A) 0; (B) 5; (C) 16; (D) 2004; (E) be galo daug.

9. Trikampyje ABC, kurio kraštinės $AB = 7$, $BC = 5$, $AC = 3$, kraštinėje AB paimti tokie taškai P ir Q, kad $AP = PC$, $CQ = QB$. Tada reiškinys $\angle CQP + \angle CPQ - \angle QCP$ lygus
(A) 30°; (B)45°; (C) 60°; (D) 75°; (E) 90°.

10. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas toks taškas K, kad $AK = 3KB$, o kraštinėje BC – toks taškas M, kad kampas BKM yra dvigubai didesnis už kampą BAC ir $KM = MC = BK$. Tada trikampio ABC kampų didumai yra:
(A) 60°, 60°, 60°; (B) 75°, 60°, 45°; (C) 90°, 60°, 30°; (D) 105°, 45°, 30°; (E) 90°, 45°, 45°.

Komandinės matematikos olimpiados profesoriaus Broniaus Grigelionio taurei laimėti pradėtos rengti nuo 1999 metų rudens. Jos vyksta kasmet Pasvalio Petro Vileišio gimnazijoje ir sutraukia gausų dalyvių būrį iš Biržų, Kupiškio, Pakruojo, Panevėžio, Pasvalio ir Rokiškio mokyklų. Neabejotinas šių varžytuvių favoritas yra Panevėžio Juozo Balčikonio gimnazijos komanda. Ji taurę iškovojo net dešimt kartų (tik 1999 ir 2006 metais taurė atiteko Pasvalio Petro Vileišio gimnazijos komandai).

Rietavo jaunųjų matematikų olimpiadoje mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti kasmet dalyvauja apie 15 jaunesniųjų klasių ir apie 15 vyresniųjų klasių komandų iš įvairių Žemaitijos vidurinių mokyklų ir gimnazijų. Peržvelkime devynių įvykusių olimpiadų taurės laimėtojų sąrašą. Mokytojo Kazio Šikšniaus taurė du kartus buvo įteikta Rietavo Lauryno Ivinskio vidurinės mokyklos (dabar - gimnazija) komandai (2002 ir 2003 metais), 2005 ir 2006 metais jos laimėtojais tapo Gargždų „Vaivorykštės“ gimnazijos komanda, 2008 ir 2009 metais – Kretingos Jurgio Pabrėžos gimnazija, 2004 m. taurė buvo iškeliavusi į Varnių Motiejaus Valančiaus vidurinę mokyklą, 2007 metais – į Šilutės Vydūno gimnaziją, o 2010 metais ji įteikta Skaudvilės (Tauragės rajonas) gimnazijai. Džiugu, kad ir šių tolimesnių nuo didžiųjų miestų mokyklų mokiniai domisi matematika ir sprendžia gana sudėtingus uždavinius.

Vykusiai sudaryti konkurso užduotis – nemenka problema. Jos neturėtų būti perdaug sudėtingos, kad mokiniai nesuabejotų savo jėgomis. Kita vertus, paprasti uždaviniai mokiniams neįdomūs. Išanalizavus Pasvalio (P) ir Rietavo (R) olimpiadų užduotis, galima teigti, kad jų tematika tradicinė – tai geometrijos, kombinatorikos, lygčių ir lygčių sistemų, skaičių, skaičių dalumo, sekų, įrodymo uždaviniai. Čia pateikiame po kelis charakteringus šių temų uždavinius.

Geometrija

1. Trikampio kraštinės yra 29, 25 ir 6 cm ilgio. Per kraštinių vidurio taškus nubrėžtas apskritimas. Raskite šio apskritimo spindulį. (R, 2002)

2. Trikampio aukštinių ilgiai yra 3 cm, 4 cm ir 5 cm. Koks šis trikampis – smailusis, statusis ar bukasis? (R, 2004)

3. Trikampio ABC plotas $S = a^2 - (b - c)^2$ (a, b, c – to trikampio kraštinių ilgiai). Raskite kampą A. (P, 2000)

4. Taškas E trapecijos $ABCD$ šoninę kraštinę CD dalija santykiu 2:1 ($CE : ED = 2 : 1$). Atkarpa AE trapecijos įstrižainę BD kerta taške O; be to, $AO : OE = 5 : 1$. Trikampio AOB plotas lygus 26 cm^2. Raskite: 1) trikampio DOE plotą; 2) trapecijos $ABCD$ plotą. (P, 2005)

5. Kubo $ABCDFGHK$ briaunos ilgis 2 cm. Sienos $AFKD$ centre yra voras. Koks trumpiausias voro kelias į tašką C kubo paviršiumi? (R, 2005)

6. Ar egzistuoja trikampis, kurio dvi kraštinės yra 7 ir 2, o aukštinė, nuleista į trečiąją kraštinę yra kitų dviejų aukštinių geometrinis vidurkis? (Teigiamų skaičių a ir b geometriniu vidurkiu vadinamas skaičius $\sqrt{ab}$.) (R, 2010)

Kombinatorika

1. Sveikųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}$ poaibio A elementai turi savybę: jei $x, y \in A$, tai $x - y \in A$. Žinoma, kad $2001 \in A$ ir intervale $[-100, 100]$ yra nemažiau 10 ir nedaugiau 67 aibės A elementų. Kiek aibės A elementų yra intervale $[-2001; 2001]$? (P, 2001)

2. Lietaus šalies gyventojų abėcėlėje yra tik trys raidės L, I ir S. Žodžiai iš jų sudaromi taip, kad trys vienodos raidės negali būti parašytos greta. Kiek šešiaraidžių žodžių yra Lietaus šalies gyventojų kalboje? (R, 2002)

3. Šešių skirtingų skaičių rinkinys yra toks, kad kiekvieną jo skaičių pakeitus likusiųjų suma vėl gaunamas tas pats skaičių rinkinys. 1) Raskite nors vieną tokį skaičių rinkinį; 2) Įrodykite, kad tokio rinkinio visų skaičių sandauga yra neigiama. (R, 2002)

4. Sporto turnyras vyksta olimpine sistema: dalyviai varžosi vienas prieš vieną, pralaimėjęs iškrenta, o nugalėtojas patenka į kitą etapą. Kiekvienas iš 512 sportininkų turi individualų numerį (nuo 1 iki 512). Ar gali nutikti taip, kad visose varžovų porose jų numerių skirtumas neviršija 30? (P, 2006)

5. Skaičių a ir b porą $(a; b)$ vienu ėjimu galima pakeisti viena iš porų: $(a+1; b-2)$, $(a-2; b+1)$, $(a-1; b+2)$. Ar tokiais ėjimais iš poros (13,17) galima gauti porą (8,18)? (P, 2009)

Lygtys ir lygčių sistemos

1. Nustatykite, su kokiomis realiosiomis a reikšmėmis lygtys $x^3 + ax + 1 = 0$ ir $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ turi bendrų realiųjų šaknų. (P, 1999)

2. Išspręskite lygčių sistemą $x^5 - y^5 = x^3 - y^3 = x - y$. (P, 2000)

3. Įrodykite, kad nėra tokių sveikųjų skaičių x ir y, kurie tenkina lygtį $15x^2 - 7y^2 = 9$. (P, 2004)

4. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje, tenkinančias lygybę $x(f(x) + f(-x) + 4) + 2f(x) + 2 = 0$. (R, 2004)

5. Išspręskite lygtį $2x^2 + 6xy + 5y^2 - 6y + 18 = 0$. (R, 2005)

6. Išspręskite lygčių sistemą (P, 2010)

$$\begin{cases} x - \sqrt{yz} = 42, \\ y - \sqrt{zx} = 6, \\ z - \sqrt{xy} = -30. \end{cases}$$

Skaičiai, skaičių dalumas, sekos

1. Seka $\{x_k\}$, tenkinanti savybes $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{k+2} = x_k + x_{k+1}$, $k \geqslant 1$, vadinama Fibonačio skaičių seka. Įrodykite, kad su visais $n \geqslant 1$ skaičius x_{5n} dalijasi iš 5. (P, 2002)

2. Kokie skaičiaus $25^{2001} + 76^{2002}$ paskutinieji du skaitmenys? (R, 2002)

3. Sakykime, kad n-tieji kalendoriniai metai yra laimingi, jeigu skaičius $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ dalijasi be liekanos iš 5. Ar yra laimingi 2003 ir 2004 metai? (P, 2003)

4. Raskite visus natūraliuosius skaičius x, kurių skaitmenų sandauga lygi $x^2 - 10x - 22$. (R, 2003)

5. Įrodykite, kad kiekviename dvidešimtženkliame skaičiuje tarp jo skaitmenų, nekeičiant jų tvarkos, galima sudėlioti sudėties, atimties, daugybos ženklus bei skliaustus taip, kad atlikus veiksmus, gautųsi nulis? (R, 2005)

6. Raskite formulę sumai $3 + 33 + 333 + \cdots + 333\ldots3$ (paskutinysis dėmuo yra skaičius iš n skaitmenų) skaičiuoti. (P, 2006)

7. Raskite natūralųjį skaičių n, kurio kvadratas lygus $2008 \cdot 2009 \cdot 2010 \cdot 2011 + 1$. (R, 2010)

Įrodymo uždaviniai

1. Tegu $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n$, $n \geqslant 2$. Įrodykite, kad $a_n + a_{n+1} = (n+1)^2$. (P, 2000)

2. Lygiašoniame trikampyje, kurio pagrindas a, o šoninė kraštinė b, viršūnės kampas lygus $20°$. Įrodykite, kad $a^3 + b^3 = 3ab^2$. (R, 2003)

3. Skaičiai m ir n – sveikieji, tenkinantys nelygybę $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$. Įrodykite, kad $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}\,n^2}$. (R, 2006)

4. Įrodykite tokį teiginį: jei realieji skaičiai a, b ir c tenkina nelygybes $|a-b| \geqslant |c|$, $|b-c| \geqslant |a|$, $|c-a| \geqslant |b|$, tai nors vienas iš jų yra kitų dviejų suma. (P, 2006)

5. Tegu a, b ir c yra kurio nors trikampio kraštinių ilgiai. Įrodykite, kad $ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$ (P, 2008)

Išsamiau susipažinti su minėtų olimpiadų užduotimis ir olimpiadų rezultatais galima VU MIF Matematikos ir informatikos metodikos katedros interneto svetainės puslapyje http://www.mif.vu.lt/katedros/mmk/mat_ol.htm.

Literatūra

[1] A. Grincevičius ir J. Mačys. *Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai.* Šviesa, Kaunas, 1989.

[2] R. Kašuba. *Kaip spręsti, kai nežinai kaip.* TEV, Vilnius, 2006.

[3] J. Kubilius. *Olimpiadinis matematikos uždavinynas.* Šviesa, Kaunas, 1972.

[4] J. Mačys. *Moksleivių matematikos olimpiadų uždaviniai, 1986–2002 m.* TEV, Vilnius, 2003.

[5] J. Šinkūnas. *Ekstremumai be išvestinių.* TEV, Vilnius, 2008.

SUMMARY

Regional mathematical contests: experience and perspectives
A. Apynis, R. Kašuba, E. Stankus

A regional competition can inspire students to greater achievement. We are eager to challenge their math skills and motivation using interesting but really accessible problems. Considerable attention is paid also to the formulation of tasks. So even some local facts and or other well-known notions might also become a reasonable element of a problem.

Keywords: contests, problems, geometry, combinatorics, divisibility of integers, proofs.