VILNIAUS UNIVERSITETAS

Mindaugas
STONCELIS

Reikšmių pasiskirstymo teoremos periodinei dzeta funkcijai

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Gamtos mokslai,
matematika N 001

VILNIUS 2019

Disertacija rengta 2015 – 2019 metais Vilniaus universitete

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika N 001).

Mokslinis konsultantas:

Prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika N 001).

Gynimo taryba:

Pirmininkas – Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas, Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika N 001.

Nariai:

Doc. dr. Igoris Belovas, Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika N 001.

Prof. dr. Paulius Drungilas, Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika N 001.

Prof. dr. Artūras Štikonas, Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika N 001.

Prof. dr. Aleksej Ustinov, Rusijos mokslų akademijos taikomosios matematikos instituto Tolimųjų Rytų šakos Habarovsko skyrius, gamtos mokslai, matematika N 001.

Disertacija ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2019 m. gruodžio mėn. 17 d. 15 val. 30 min. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, 102 auditorijoje.

Adresas: Naugarduko g. 24, LT 03225, Vilnius, Lietuva.

Tel. +370 5 219 3050; el. paštas. mif@mif.vu.lt.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu:

https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

VILNIUS UNIVERSITY

Mindaugas
STONCELIS

Value distribution theorems for the periodic zeta-function

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Natural sciences,
mathematics N 001

VILNIUS 2019

This dissertation was written between 2015 and 2019 at Vilnius University.

Academic supervisor:

Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas, Vilnius University, Natural sciences, Mathematics N 001.

Academic consultant:

Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis, Vilnius University, Natural sciences, Mathematics N 001.

This doctoral dissertation will be defended in a public meeting of the Dissertation Defence Panel:

Chairman – Prof. Habil. Dr. Konstantinas Pileckas, Vilnius University, Natural sciences, Mathematics N 001.

Members:

Doz. Dr. Igoris Belovas, Vilnius University, Natural sciences, Mathematics N 001.

Prof. Dr. Paulius Drungilas, Vilnius University, Natural sciences, Mathematics N 001.

Prof. Dr. Artūras Štikonas, Vilnius University, Natural sciences, Mathematics N 001.

Prof. Dr. Aleksej Ustinov, Institute for Applied Mathematics, Khabarovsk Division, Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Natural sciences, Mathematics N 001.

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 3:30pm on 17th December 2019 in room 102 of the Faculty of Mathematics and Informatics of Vilnius University.

Address: Naugarduko st. 24, LT 03225, Vilnius, Lithuania

Tel. +370 5 219 3050; e-mail: mif@mif.vu.lt.

The text of this dissertation can be accessed at the library of Vilnius University, as well as on the website of Vilnius University:

www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

Tyrimo objektas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis ir $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliuoju periodu $q \in \mathbb{N}$. Disertacijoje nagrinėjamas periodinės dzeta funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ reikšmių pasiskirstymas. Funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s;\mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}. \tag{1}$$

Iš sekos $\mathfrak{a}$ periodiškumo išplaukia, kad egzistuoja konstanta tokia $c_{\mathfrak{a}} > 0$, kad su visais $m \in \mathbb{N}$,

$$|a_m| \leqslant c_{\mathfrak{a}}.$$

Pavyzdžiui,

$$c_{\mathfrak{a}} = \max(|a_1|, \ldots, |a_q|).$$

Tai rodo, kad (1) eilutė absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > 1$ ir apibrėžia analizinę funkciją.

Funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Tam taikoma klasikinė Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcija. Tegul α, $0 < \alpha \leqslant 1$ yra fiksuotas parametras. Tada Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$, ir

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s,\alpha) = 1.$$

Funkciją $\zeta(s,\alpha)$ 1882 metais apibrėžė ir pradėjo nagrinėti A. Hurvicas. Ji turi įvairių taikymų analizinėje skaičių teorijoje. Iš sekos $\mathfrak{a}$ periodiškumo gauname, kad srityje $\sigma > 1$,

$$\zeta(s;\mathfrak{a}) = \frac{1}{q^s}\sum_{l=1}^{q} a_l \zeta\left(s, \frac{l}{q}\right).$$

Iš šios lygybės ir Hurvico dzeta funkcijos savybių išplaukia, kad funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$, ir

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s;\mathfrak{a}) = \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q} a_l \overset{\text{def}}{=} r.$$

Jei $r = 0$, tai $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra sveikoji funkcija.

Rymano (Riemann) dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

arba Oilerio (Euler) sandauga pagal pirminius skaičius p

$$\zeta(s) = \prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$, ir

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s) = 1.$$

Iš $\zeta(s;\mathfrak{a})$ ir $\zeta(s)$ apibrėžimų išplaukia, kad $\zeta(s;\mathfrak{a}) = \zeta(s)$, kai $\mathfrak{a} = \{a_m : a_m \equiv 1\}$. Matome, kad periodinė dzeta funkcija yra garsiosios Rymano dzeta funkcijos apibendrinimas.

Tegul χ yra Dirichlė charakteris moduliu q (charakteris χ yra aritmetinė funkcija $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, kuri periodinė su periodu q ($\chi(m+q) = \chi(m)$ su visais $m \in \mathbb{N}$), visiškai multiplikatyvi ($\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ visiems $m, n \in \mathbb{N}$), $\chi(m) = 0$ kai $(m, q) > 1$ ir $\chi(m) \neq 0$ kai $(m, q) = 1$). Dirichlė L funkcija $L(s, \chi)$ su Dirichlė charakteriu χ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama

Dirichlė eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

arba Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius p

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Kai $\chi = \chi_0$ yra pagrindinis Dirichlė charakteris moduliu q ($\chi_0(m) = 1$ su visais m, $(m,q) = 1$), tai funkcija $L(s,\chi_0)$ yra meromorfiškoji ir turi vieną paprastąjį polių taške $s = 1$,

$$\operatorname*{Res}_{s=1} L(s,\chi_0) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

čia p – pirminis skaičius. Kai $\chi \neq \chi_0$, tai funkcija $L(s,\chi)$ yra sveikoji.

Iš funkcijų $\zeta(s;\mathfrak{a})$ ir $L(s,\chi)$ apibrėžimų matome, kad periodinė dzeta funkcija yra Dirichlė L funkcijos apibendrinimas. Taigi, funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra analizinėje skaičių teorijoje labai svarbių Rymano dzeta ir Dirichlė L funkcijų apibendrinimas. Tai rodo funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ svarbą.

Tegul $\mathfrak{b} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra dar viena periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliuoju periodu $q_1 \in \mathbb{N}$. Šios disertacijos rezultatai taip pat susiję su periodine Hurwico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$ (čia α yra tas pats fiksuotas parametras kaip ir klasikinėje Hurwico dzeta funkcijoje), kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m+\alpha)^s}$$

ir, panaudojus lygybę

$$\frac{1}{q_1^s} \sum_{l=0}^{q_1-1} b_l \zeta\left(s, \frac{l+\alpha}{q_1}\right), \sigma > 1,$$

gali būti analiziškai pratęsti į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ reziduumu

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s, \alpha; \mathfrak{b}) = \frac{1}{q_1^s} \sum_{l=0}^{q_1-1} b_l \stackrel{\text{def}}{=} r_1.$$

Kai $r_1 = 0$, tai funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{b})$ yra sveikoji.

Kadangi $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{b}) = \zeta(s, \alpha)$ kai $\mathfrak{b} = \{b_m : b_m \equiv 1\}$, tai funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{b})$ yra klasikinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ apibendrinimas.

Tikslas ir uždaviniai

Šios disertacijos tikslas yra plačios analizinių funkcijų klasės aproksimavimas periodinės dzeta funkcijos su multiplikatyviąja seka $\mathfrak{a}$ ($a_{mn} = a_m a_n$ visiems $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$) postūmiais, t.y., šios disertacijos tikslas yra funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ universalumo teoremos. Uždaviniai yra šie:

1. Funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ su multiplikatyviais koeficientais universalumas.
2. Funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ su specialiai parinkta seka $\mathfrak{a}$ universalumas.
3. Funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ universalumas su svoriu.
4. Funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ diskretusis universalumas su svoriu.
5. Kompozicijų, kurių sudėtyje yra periodinė dzeta funkcija, reikšmių pasiskirstymas.

Aktualumas

Dzeta ir L funkcijų reikšmių pasiskirstymas yra vienas iš svarbiausių uždavinių analizinėje skaičių teorijoje ir užima garbingą vietą visoje matematikoje. Vienas iš septynių svarbiausių tūkstantmečio uždavinių yra Rymano dzeta funkcijos nulių pasiskirstymo uždavinys, tiksliau sakant, Rymano hipotezė, tvirtinanti, kad visi netrivialūs $\zeta(s)$ nuliai yra kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$. Dzeta funkcijų universalumo sąvoka buvo apibrėžta 1975 metais ir iki šiol universalumas plačiai nagrinėjamas randant vis naujus teorinius ir praktinius taikymus. Sudėtingų analizinių funkcijų aproksimavimas sąlyginai paprastų dzeta funkcijų postūmiais taikomos kvantinėje mechanikoje.

Žinoma, kad Rymano hipotezė yra ekvivalenti $\zeta(s)$ funkcijos saviaproksimavimui. Be to, Ferma (Fermat) teorema buvo įrodyta naudojant ryšius tarp parabolinių formų dzeta funkcijų ir elipsinių kreivių L funkcijų. Šie pavyzdžiai rodo dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimo svarbą.

Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimai yra viena iš sėkmingiausiai Lietuvos matematikų plėtojamų sričių. Ji pradėta nagrinėti profesoriaus Jono Kubiliaus ir tęsiama jo mokinių. Tikimybinių metodų taikymas skaičių teorijoje vaidina svarbų vaidmenį Kubiliaus ir jo mokinių darbuose. Šioje disertacijoje taip pat pasirinkta ši įdomi dzeta funkcijų tyrimo kryptis.

Metodai

Periodinės dzeta funkcijos universalumo teoremų įrodymui naudojamas ribinių teoremų apie silpnųjų tikimybinių matų konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje metodas. Ribinių teoremų įrodymas remiasi Furjė transformacijų metodu bei kitais klasikiniais silpnojo konvergavimo teorijos elementais.

Naujumas

Visi disertacijoje skelbiami rezultatai yra nauji. Pirmoji 1.1 teoremos dalis, kurioje seka $\mathfrak{a}$ tenkina kai kurias papildomas sąlygas, buvo įrodyta [7] darbe. Periodinės dzeta funkcijos universalumo su svoriu teoremos anksčiau nebuvo žinomos.

Problemos istorija ir rezultatai

Periodinė dzeta funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra įdomus analizinis objektas ir buvo įvairiais aspektais tiriamas daugelio matematikų. Pirmą žinomą svarbų rezultatą gavo V. Šnė (W. Schnee) [8] 1930 metais. Žinoma, kad klasikinės dzeta funkcijos paprastai tenkina funkcinę lygtį. Straipsnyje [8] buvo įrodyta, kad tokia lygtis egzistuoja ir funkcijai $\zeta(s;\mathfrak{a})$. Tegul $\mathfrak{b} = \{b_m : m \in \mathbb{Z}\}$ seka, kurios nariai

$$b_m = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} a_k \mathrm{e}^{2\pi i k \frac{m}{q}}.$$

Be to, tegul $\hat{\mathfrak{b}} = \{\hat{b}_m : m \in \mathbb{Z}\}$, čia $\hat{b}_m = b_{-m}$. Tada galioja ši straipsnyje [8] paskelbta funkcinė lygtis ($\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija).

A teorema. *Su visais $s \in \mathbb{C}$ yra teisinga lygybė*

$$\zeta(1-s;\mathfrak{a}) = \left(\frac{q}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\Big(\mathrm{e}^{\frac{\pi i s}{2}}\zeta(s;\mathfrak{b}) + \mathrm{e}^{-\frac{\pi i s}{2}}\zeta(s;\hat{\mathfrak{b}})\Big).$$

Straipsnis [1] taip pat skirtas funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ reikšmių pasiskirstymui. Čia nagrinėjama Lorano eilutė taške $s = 1$, laipsninės funkcijos $\zeta^r(s;\mathfrak{a})$ Dirichlė eilutė ir tam tikra funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ aproksimacija Rymano dzeta funkcija.

Tolimesni funckijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ tyrimai labai susiję su J. Štoidingo (J. Steuding) vardu. [9] jis pradėjo funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ nulių pasiskirstymo teoriją. Jis įrodė, kad egzistuoja teigiama konstanta $A(\mathfrak{a})$ tokia, kad $\zeta(s;\mathfrak{a})$ neturi nulių srityje $\sigma > 1 + A(\mathfrak{a})$. J. Štoidingas taip pat apibrėžė trivialiųjų ir netrivialiųjų $\zeta(s;\mathfrak{a})$ nulių sąvokas ir gavo Mangoldto tipo formulę netrivialių nulių skaičiui. Tegul

$$\hat{a}_m^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{k=1}^{q} a_k \mathrm{e}^{\pm 2\pi i k \frac{m}{q}}$$

ir tegul $\mathfrak{a}^{\pm} = \{\hat{a}_m^{\pm} : m \in \mathbb{N}\}$, $B(\mathfrak{a}) = \max(A(a^+), A(a^-))$. Tada funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ nuliai $\rho = \beta + i\gamma$ yra vadinami trivialiaisiais jei $\beta < -B(\mathfrak{a})$, likusieji nuliai vadinami netrivialiaisiais. Jie yra srityje

$$\{s \in \mathbb{C} : -B(\mathfrak{a}) \leqslant \sigma \leqslant 1 + B(\mathfrak{a})\}.$$

Tarkime, kad $N(T;\mathfrak{a})$ yra funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ netrivialių nulių $\rho = \beta + i\gamma$ skaičius, kai $|\gamma| \leqslant T$, skaičiuojant ir pasikartojančius nulius. Vienas įdomiausiu rezultatų yra ši teorema.

B teorema. *Tarkime, kad $T \to \infty$. Tada*

$$N(T;\mathfrak{a}) = \frac{T}{\pi} \log \frac{qT}{2\pi m_{\mathfrak{a}} \sqrt{m_{\mathfrak{a}^-} + m_{\mathfrak{a}^+}}} + \mathrm{O}(\log T),$$

čia $m_{\mathfrak{a}} = \min\{1\leqslant m\leqslant q : a_m \neq 0\}$ *ir* $m_{\mathfrak{a}^{\pm}} = \min\{1\leqslant m\leqslant q : a_m^{\pm} \neq 0\}$.

Pirmuosius funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ momentų

$$I_k(T,\sigma;\mathfrak{a}) = \int\limits_0^T |\zeta(\sigma+it;\mathfrak{a})|^{2k}\mathrm{d}t,$$

čia k yra neneigiamas sveikasis skaičius ir $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$, rezultatus gavo A. Kačėnas ir A. Laurinčikas 2000 metais. Geriausi $\zeta(s;\mathfrak{a})$ momentų rezultatai paskelbti D. Šiaučiūno disertacijoje 2004 metais ir su ja susijusiuose straipsniuose. Šiems rezultatams gauti buvo panaudota funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ artutinė funkcinė lygtis.

C teorema. *Tarkime, kad* $t\geqslant 1$, $y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$, $n = [y]$, $r = \left[y - \frac{k}{y}\right]$, $l = n - r$ *ir* $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$. *Tada*

$$\begin{aligned}\zeta(s;\mathfrak{a}) = {} & \frac{1}{q^s}\sum_{k=1}^{q} a_k \sum_{0\leqslant m\leqslant r} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{q}\right)^s} \\ & + \frac{1}{q^s}\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{s-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{i\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} \sum_{k=1}^{q} a_k \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi i m\frac{k}{q}}}{m^{1-s}} \\ & + \frac{1}{q^s}\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{\sigma}{2}} \sum_{k=1}^{q} a_k \mathrm{e}^{if\left(\frac{k}{q},t\right)} \psi\left(2y-2n+l-\frac{k}{q}\right) + \frac{1}{q^s}R(s,q),\end{aligned}$$

čia

$$\psi(a) = \frac{\cos\pi\left(\frac{a^2}{2} - a - \frac{1}{8}\right)}{\cos\pi a},$$

$$f(\alpha,t) = t\log\left(\frac{2\pi}{t}\right) + \frac{t}{2} - \frac{7\pi}{8} + \frac{\pi\alpha^2}{2} + \frac{\pi l}{2} + \pi n - \pi\alpha l + 2\pi g(l-\alpha)$$

ir

$$R(s,q) = \mathrm{O}\left(t^{\frac{\sigma}{2}-1}\sum_{k=1}^{q}|a_k|\right).$$

Iš C teoremos išplaukia keletas rezultatų momentams $I_k(T,\sigma;\mathfrak{a})$, paminėsime vieną iš jų. Tegul γ_0 yra Oilerio konstanta.

D teorema. *Tarkime, kad $T \to \infty$. Tada*

$$I_1\left(T, \frac{1}{2}; \mathfrak{a}\right) = q^{-1}K(q)T\log T + q^{-1}K(q)T(2\gamma_0 - \log\pi - 1)$$
$$- q^{-1}T(K_1(q) - K_2(q)) + \mathrm{O}\left(q^{\frac{1}{2}}K(q)T^{\frac{1}{2}}\log T\right) + \mathrm{O}(qK(q)),$$

čia

$$K(q) = \sum_{k=1}^{q} |a_k|^2,$$

$$K_1(q) = \sum_{k=1}^{q} k|a_k|^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(mq+k)}$$

ir

$$K_2(q) = q\sum_{k=1}^{q} \frac{|a_k|^2}{k}.$$

Pirmąjį tikimybinį funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ rezultatą paskelbė A. Kačėnas ir A. Laurinčikas 2000 metais. Tarkime, kad $H(G)$ yra analizinių srityje $G \subset \mathbb{C}$ funkcijų klasė su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija. Tegul $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ yra erdvės $\mathbb{X}$ Borelio σ kūnas ir tegul $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$. Aibėms $A \in \mathcal{B}(H(D))$ apibrėžiame

$$P_T(A) = \frac{1}{T}\mathrm{meas}\{\tau \in [0,T] : \zeta(s+i\tau;\mathfrak{a} \in A)\},$$

čia $\mathrm{meas}A$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas. Silpnąjį P_T konvergavimą, kai $T \to \infty$, nagrinėjo A. Kačėnas, A. Laurinčikas 2001-aisais metais. Tegul P ir P_n, $n \in \mathbb{N}$ yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Primename, kad, kai $n \to \infty$, P_n silpnai konverguoja į P, jeigu su kiekviena realia aprėžta tolydžiąja funkcija f erdvėje $\mathbb{X}$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f \mathrm{d}P_n = \int_{\mathbb{X}} f \mathrm{d}P.$$

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje ir

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p. Toras Ω su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galima apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ p-tąsis komponentas. Kai $m \in \mathbb{N}$, apibrėžiame

$$\omega(m) = \prod_{\substack{p^\alpha | m \\ p^{\alpha+1} \nmid m}} \omega^\alpha(p).$$

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H(D)$reikšmį atsitiktinį elementą $\zeta(s, \omega; \mathfrak{a})$ formule

$$\zeta(s, \omega; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \omega(m)}{m^s}.$$

Tuomet teisingas [3], 4 teoremoje įrodytas toks teiginys:

E teorema. *P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $\zeta(s, \omega; \mathfrak{a})$ skirstinį.*

Kadangi $\omega(m)$ yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai E teorema negali būti taikoma funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ universalumo tyrimams.

Panašias teoremas nagrinėjo ir A. Kačėnas ir D. Šiaučiūnas 2001 metais, o taip pat ir daugiamates ribines teoremas ir ribines teoremas meromorfinių funkcijų erdvėje.

Pereisime prie pagrindinio disertacijos uždavinio, t.y. funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ universalumo. Rymano dzeta funkcijos universalumo savybę atrado S. M. Voroninas [10]. Jis įrodė, kad, jei $0 < r < \frac{1}{4}$, o funkcija $f(s)$ yra tolydžioji, nevirstanti nuliu skritulyje $|s| \leqslant r$ ir analizinė to skritulio viduje, tada, bet kurį $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, kad

$$\max_{|s| \leqslant r} \left| \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Vėliau Voronino rezultatas buvo pagerintas. Tegul $\mathcal{K}$ yra juostos $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ kompaktinių poaibių, turinčių jungiuosius papildinius klasė, o $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra tolydžiųjų, nevirstančių nuliu aibėje K ir analizinių aibės K viduje funkcijų klasė. Šią Voronino teoremos versiją galima rasti, pavyzdžiui, [6].

F teorema. *Tarkime, kad* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H_0(K)$. *Tada su visais* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

F teorema rodo, kad egzistuoja be galo daug postūmių $\zeta(s+i\tau)$, aproksimuojančių duotą funkciją $f(s) \in H_0(K)$.

Funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ universalumą pradėjo studijuoti J. Štoidingas. Tegul $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra tolydžiųjų funkcijų aibėje K ir analizinių aibės K viduje, klasė. Jis įrodė tokią teoremą.

G teorema. *Tarkime, kad* q *yra nelyginis pirminis skaičius,* a_m *nėra Dirichlė charakterio moduliu* q *kartotinis ir* $a_q = 0$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$. *Tada su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Periodinė seka $\mathfrak{a}$, tenkinanti G teoremos sąlygas, nėra multiplikatyvi. Tai išplaukia iš periodinės multiplikatyvios funkcijos charakteristikų, kurias pateikė D. Leitmanas (D. Leitmann) ir D. Volkė (D. Volke) 1976 metais.

Vėliau J. Štoidingas išplėtė G teoremos galiojimą. Jis įrodė, kad G teoremos išvados galioja periodinei sekai su minimaliu periodu $q > 2$, kuris nėra Dirichlė moduliu q kartotinis ir $a_m = 0$ kai $(m,q) > 1$.

Periodinės dzeta funkcijos universalumas nėra paprastas uždavinys. J. Kačarovskis (J. Kaczorowski) [2] pastebėjo, kad ne visos $\zeta(a;\mathfrak{a})$ funkcijos yra universalios anksčiau aprašyta prasme. Jis pateikė pavyzdį tokios sekos $\mathfrak{a}_0 = \{a_{0m} : m \in \mathbb{N}\}$. Tegul, $q = 2$, $a_{01} = 1$ ir $a_{02} = 2^{\frac{3}{4}} + 1$, tada

$$\zeta(s;\mathfrak{a}_0) = \left(1 + 2^{\frac{3}{4}-s}\right)\zeta(s).$$

Be to, tegul

$$K = \left[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right] \times [-c_0, c_0]$$

yra stačiakampis kritinės juostos dešinėje. Kai $c > \frac{\pi}{\log 2}$, tai kiekvienas postūmis $\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}_0)$ turi nulį K viduje, be to, tokia funkcija negali būti tolygiai aproksimuotos funkcijos, kurios nevirsta nuliu K viduje, pavyzdžiui, negali būti aproksimuojama funkcija $f(s) \equiv 1$ aibėje K.

Kaip pat J. Kačarovskis [2] įvedė naują universalumo sąvoką. Tegul $K \in \mathcal{K}$. Tada skaičius

$$h(K) = \max_{s \in K} \operatorname{Im} s - \min_{s \in K} \operatorname{Im} s$$

yra vadinamas aibės K aukščiu. J. Kačarovskis 2009 metais įrodė tokią teoremą.

H teorema. *Egzistuoja tokia teigiama konstanta $c_0 = c_0(\mathfrak{a})$, kad, kai $K \in \mathcal{K}$, $h(K) \leqslant c_0$, $f(s) \in H_0(K)$, su visais $\varepsilon > 0$ yra tenkinama nelygybė*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Disertacija skirta periodinės dzeta funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ su multiplikatyviąja seka $\mathfrak{a}$ universalumui. Seka $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra vadinama multiplikatyviąja jei $a_1 = 1$ ir $a_{mn} = a_m a_n$ kai $(m, n) = 1$.

Universalumo teoremą funkcijai $\zeta(s; \mathfrak{a})$ su multiplikatyviąja seka $\mathfrak{a}$ įrodė A. Laurinčikas ir D. Šiaučiūnas 2006 metais. Jų darbe seka turėjo tenkinti papildomą sąlygą

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|a_{p^\alpha}|}{p^{\frac{\alpha}{2}}} \leqslant c < 1 \tag{2}$$

visiems pirminiams p. Disertacijoje šį sąlyga eliminuota ir 1 skyriuje įrodyta tokia teorema.

1.1 teorema. *Tarkime, kad seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvi. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tada su visais $\varepsilon > 0$ yra teisinga lygybė*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, analogiška nelygybė ribos "$\lim$" atveju galioja su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Antrasis 1.1 teoremos tvirtinimas Rymano dzeta funkcijai buvo nepriklausomai gautas J.-L. Moklero (J.-L. Mauclaire) (2013) ir A. Laurinčiko ir L. Meškos (2014) darbuose. Plačiau apie tai galima rasti L. Meškos disertacijoje.

1.1 teoremos įrodymas yra tikimybinis ir remiasi E teoremos tipo ribine teorema. Pirmiausia, remiantis sekos $\mathfrak{a}$ multiplikatyvumu, įrodoma, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$ galioja lygybė

$$\zeta(s,\omega;\mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \omega(m)}{m^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p^l}\omega^l(p)}{p^{ls}}\right), \sigma > \frac{1}{2}.$$

Tegul P_ζ – atsitiktinio elemento $\zeta(s,\omega;\mathfrak{a})$ skirstinys, t.y.,

$$P_\zeta(A) = m_H\{\omega \in \Omega : \zeta(s,\omega;\mathfrak{a}) \in A\}, A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Įrodyta tokia ribinė teorema matui P_T.

1.6 teorema. *Matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į P_ζ. Be to, mato P_ζ atrama yra aibė*

$$S \stackrel{def}{=} \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \textit{ or } g(s) \equiv 0\}.$$

2 disertacijos skyrius yra skirtas funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ su specialia periodine seka universalumui. Tam tikslui yra panaudotas Dirichlė L funkcijos universalumas. Dirichlė L-funkcijai yra žinoma tokia teorema analogiška G teoremai.

I teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tada su visiais $\varepsilon > 0$ yra teisinga lygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |L(s+i\tau,\chi) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Tarkime, kad $a_m \not\equiv 0$, sekos $\mathfrak{a}$ periodas q yra pirminis skaičius ir

$$a_q = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{l=1}^{q-1} a_l, \tag{2.1}$$

čia $\varphi(q)$ yra Oilerio funkcija.

Tegul

$$b(q,\chi) = \sum_{l=1}^{q-1} a_l \chi(l),$$

čia χ yra Dirichlė charakteris moduliu q. Sakoma, kad funkcija yra universali, jei galioja universalumo nelygybė

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

su visais ε, kai $f(s) \in H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$. Jei ši nelygybė galioja, kai $f(s) \in H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, tada sakoma, kad funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra stipriai universali.

Pagrindinis skyriaus rezultatas yra toks tvirtinimas.

2.2 teorema. *Tarkime, kad periodinė seka $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ su minimaliuoju periodu q tenkina lygybę (2.1) ir q yra pirminis skaičius.*

1° Jei seka $\mathfrak{a}$ tenkina bent vieną iš sąlygų

i) $a_m \equiv c$, $m \in \mathbb{N}$;

ii) a_m yra Dirichlė charakterio moduliu q kartotinis;

iii) $q = 2$;

iv) tik vienas iš skaičių $b(q,\chi) \neq 0$, $q > 2$,

tai funkcija $\zeta(s,\mathfrak{a})$ yra universali.

2° Jei $q > 2$ ir bent du skaičiai $b(q,\chi) \neq 0$, tai funkcija $\zeta(s,\mathfrak{a})$ yra stipriai universali.

3 disertacijos skyriuje įrodyta universalumo su svoriu teorema periodinei dzeta funkcijai. Tokio tipo teorema Rymano dzeta funkcijai buvo įrodyta A. Laurinčiko (1995) su papildoma sąlyga svorio funkcijai $w(\tau)$ susijusia su Birkhofo-Chinčino (Birkhoff-Khintchine) ergodiškumo teorema (Lema 1.12). Tarkime, kad $\zeta(\tau,\omega)$ yra ergodiškas procesas tikimybinėje erdvėje (Ω,ζ,μ), $\tau \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, $\mathbb{E}|\zeta(\tau,\omega)| < \infty$ ir jo trajektorijos beveik visur yra integruojamos Rymano prasme kiekviename baigtiniame intervale. A. Laurinčiko (1995) darbe buvo laikoma, kad

$$\frac{1}{U(T,\omega)} \int_{T_0}^{T} w(\tau)\zeta(t+\tau,\omega)\mathrm{d}\tau = \mathbb{E}(\zeta(0,\omega)) + \mathrm{o}((1+|t|)^{\alpha}),$$

teisinga subeveik visais ω, visiems $t \in \mathbb{R}$, kuriems $\alpha > 0$, kai $T \to \infty$. Tą pačią sąlygą naudoja A. Laurinčikas (1995) Matsumoto dzeta funkcijos universalumui su svoriu. Šioje disertacijoje minėta sąlyga pašalinta.

Tegul $w(t)$ yra teigiama funkcija turinti aprėžtas variacijas intervale $[T_0, \infty)$, $T_0 > 0$, kad variacija $V_a^b w$ intervale $[a, b]$ tenkina nelygybę

$$V_a^b w \leqslant c w(a)$$

su kuria nors konstanta c bet kuriuo intervalu $[a, b] \subset [T_0, \infty)$. Tegul

$$U(T, \omega) = \int\limits_{T_0}^{T} w(t) \mathrm{d}t$$

ir, tarkime, kad

$$\lim_{T \to \infty} U(T, \omega) = +\infty.$$

Funkcijų $w(t)$, tenkinančių išvardintas sąlygas klasę, pažymime W. Be to, tegul $I(A)$ yra aibės A indikatorius. Pagrindinis 3 skyriaus rezultatas yra tokia tolydžiojo tipo universalumo teorema (τ postūmiuose $\zeta(s + \tau; \mathfrak{a})$ įgyja bet kurias realias reikšmes).

3.1 teorema. *Tarkime, kad $w \in W$, seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvi. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tada, visiems $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{U(T, w)}$$
$$\int\limits_{T_0}^{T} w(t) I\Big(\Big\{\tau \in [T_0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\Big\}\Big) \mathrm{d}\tau > 0.$$

Be to, analogiška nelygybė ribos "$\lim$" *atveju galioja su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.*

3.1 teoremos įrodyme naudojama funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ ribinė teorema su svoriu analizinių funkcijų erdvėje $H(D)$ (3.2 teorema).

4 skyrius skirtas periodinės dzeta funkcijos diskrečiajam universalumui su svoriu. Šiuo atveju, aproksimuojančiuose postūmiuose $\zeta(s + i\tau; \mathfrak{a})$ τ įgyja reikšmes iš kurios nors diskrečiosios aibės, pavyzdžiui, ir aritmetinės progresijos $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$ su fiksuotu $h > 0$. Diskretųjį dzeta funkcijos universalumą pasiūlė A. Raichas (A. Reich). Jis 1980 įrodė tokį tvirtinimą (tegul, N perbėga neneigiamus sveikuosius skaičius, o $\#A$ yra aibės A elementų

skaičius):

J teorema. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H_0(K)$. *Tada su visais* $h > 0$ *ir visais* $\varepsilon > 0$ *galioja nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

J teorema kitais metodais nepriklausomai buvo įrodyta ir B. Bagčio (B. Bagchi) darbe (1981).

Pirmoje šios disertacijos diskrečiojo universalumo teoremoje su svoriu naudojama aritmetine progresija $\{kh\}$. Tarkime, kad $w(t)$ yra nedidėjanti teigiama funkcija, kai $t \geqslant 1$ turinti tokią tolydžiąją teigiamą išvestinę, kad su $h > 0$ galioja įverčiai $w(t) \ll_h w(ht)$ ir $(w'(t))^2 \ll w(t)$. Be to, tegul

$$V(N, w) = \sum_{k=1}^{N} w(k)$$

ir

$$\lim_{N\to\infty} V(N, w) = +\infty.$$

Funkcijų $w(t)$ klasę pažymime V_1. Tada pirmoji funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ diskrečiojo universalumo teorema su svoriu yra tokia.

4.1 teorema. *Tarkime, kad* $w \in V_1$, *seka* $\mathfrak{a}$ *yra mutiplikatyvi ir aibė*

$$L(\mathbb{P}, h, \pi) = \left\{ (\log p : p \in \mathbb{P}), \frac{2\pi}{h} \right\}$$

yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H_0(K)$. *Tada su visais* $\varepsilon > 0$ *galioja nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{V(N, w)} \sum_{k=1}^{N} w(k) I\left(\left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} \right) > 0.$$

Be to, analogiška nelygybė ribos "$\lim$*" atveju galioja su visais* $\varepsilon > 0$, *nebent išskyrus skaičiąją* $\varepsilon > 0$ *reikšmių aibę.*

Pagal Lindemano (Lindemann) teoremą žinoma, kad skaičius e^k su $k \in$

$\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ yra transcendentusis. Be to, 4.1 teoremoje galima parinkti, pavyzdžiui, $h = \pi$ ir $w(t) = \frac{1}{t}$

Antroje šios disertacijos funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ diskrečiojo universalumo teoremoje su svoriu naudojama sudėtingesnė diskrečioji aibė $\{k^\alpha h\}$ su fiksuotu α, $0 < \alpha < 1$ ir $h > 0$. Tarkime, kad svorio funkcija $w(t)$ yra tokia, kad $\lim\limits_{N\to\infty} V(N,w) = +\infty$ ir turi tokią tolydžiąją išvestinę, kad

$$\int\limits_1^N t|w'(t)|\mathrm{d}t \ll V(N,w).$$

Funkcijų $w(t)$ klasę pažymime V_2. Įrodyta tokia teorema.

4.7 teorema. *Tarkime, kad $w \in V_2$, seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvi ir $0 < \alpha < 1$ yra fiksuotas. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tada su visais $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$ galioja nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{V(N,w)} \sum_{k=1}^N w(k) I(\{1\leqslant k\leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ik^\alpha h;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\}) > 0.$$

Be to, analogiška nelygybė ribos "$\lim$" atveju galioja su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

4.7 teoremos įrodymui panaudotas sekos $\{ak^\alpha\}$ su fiksuotu $0 < \alpha < 1$ ir visais realiaisiais $a \neq 0$ tolygus pasiskirstymas moduliu 1. Seka $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ vadinama tolydžiai pasiskirsčiusia moduliu 1 jei su kiekvienu intervalu $[a,b) \subset (0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{[a,b)}\big(\{x_k\}\big) = b - a,$$

čia $\{x_k\}$ žymi skaičiaus x_k trupmeninę dalį, o $I_{[a,b)}$ yra intervalo $[a,b)$ indikatorius.

Paskutiniame, 5 disertacijos skyriuje, nagrinėjamas funkcijų $\zeta(s;\mathfrak{a})$ ir $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$ jungtinis universalumas. Tokio tipo jungtinės teoremos buvo žinomos su kai kuriais apribojimais. Pavyzdžiui, [4] buvo įrodyta tokia teorema.

K teorema. *Tarkime, kad α – transcendentusis skaičius, seka $\mathfrak{a}$ multiplikatyvi ir galioja (2) sąlyga. Tegul $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ ir $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. Tada su visais $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{b}) - f_2(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Disertacijoje skaičiaus α transcendentumas pakeistas silpnesniu reikalavimu, kad aibė $L(\mathbb{P};\alpha) = \{(\log p : p \in \mathbb{P}), (\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0)\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Be to, pašalinta (2) sąlyga. Gauta tokia teorema:

5.1 teorema. *Tarkime, kad seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvi ir aibė $L(\mathbb{P};\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tegul $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ ir $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. Tada su visais $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{b}) - f_2(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Be to, analogiška nelygybė ribos "$\lim$" atveju galioja su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

5 skyriuje nagrinėjamas ir funkcijų $\zeta(s;\mathfrak{a})$ ir $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$ kai kurių kompozicijų reikšmių pasiskirstymas. Pirmoji kompozicija yra

$$\underline{\zeta}(s;\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = c_1\zeta(s;\mathfrak{a}) + c_2\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b}), c_1, c_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Įrodyta tokia teorema apie funkcijos $\underline{\zeta}(s;\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ nulių skaičių.

5.8 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\mathbb{P},\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvi. Tada, su visais σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja tokia konstanta $c = c(\sigma_1, \sigma_2, \alpha, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) > 0$, kad su pakankamai dideliais T, funkcija $\underline{\zeta}(s,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ turi daugiau negu cT nulių stačiakampyje*

$$\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, 0 < t < T\}.$$

Pirmą 5.8 teoremos tipo teoremą 1977 metais įrodė S. M. Voroninas Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s,\alpha)$ su racionaliuoju parametru α. Nulių skaičiaus apatinius įvertčiu kitoms dzeta funkcijoms ir jų kompozicijoms nagrinėjo V. Garbaliauskienė, J. Karaliūnaitė ir A. Laurinčikas (2017), T. Nakamura ir Ł. Pańkowski (2012 ir 2016).

Disertacijoje nagrinėjamos ir sudėtingesnės kompozicijos negu $\underline{\zeta}(s,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$. Sakome, kad operatorius $F: H^2(D)\to H(D)$ priklauso klasei $\mathrm{Lip}(\beta_1,\beta_2)$, $\beta_1>0$, $\beta_2>0$, jei tenkinamos šios sąlygos:

1° Visiems polinomams $p=p(s)$ ir bet kuriai aibei $K\in\mathcal{K}$, egzistuoja elementas $(g_1,g_2)\in F^{-1}\{p\}\subset H^2(D)$ toks, kad $g_1(s)\neq 0$ aibėje K;

2° Su bet kuria aibe $K\in\mathcal{K}$, egzistuoja teigiama konstanta c ir tokios aibės $K_1,K_2\in\mathcal{K}$, kad

$$\begin{aligned}&\sup_{s\in K}\left|F(g_{11}(s),g_{12}(s))-F(g_{21}(s),g_{22}(s))\right|\\ &\leqslant c\sup_{1\leqslant j\leqslant 2}\sup_{s\in K_j}\left|g_{1j}(s)-g_{2j}(s)\right|^{\beta_j}\end{aligned}$$

su visais $(g_{j1},g_{j2})\in H^2(D)$, $j=1,2$.

Kompozicijai $F(\zeta(s,\mathfrak{a}),\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b}))$, kai $F\in\mathrm{Lip}(\beta_1,\beta_2)$, disertacijoje gauta tokia teorema.

5.9 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\mathbb{P},\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvi ir $F\in\mathrm{Lip}(\beta_1,\beta_2)$. Tegul $K\in\mathcal{K}$ ir $f(s)\in H(K)$. Tada su visais $\varepsilon>0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}$$
$$\mathrm{meas}\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}),\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{b}))-f(s)|<\varepsilon\}>0.$$

Sąlygos (2) ir reikalavimo, kad skaičius α būtų transcendentusis, buvo atsisakyta [5] darbe.

Sudėtinių funkcijų universalumą nagrinėti pradėjo A. Laurinčikas. Jis, pavyzdžiui, (tegul $S=\{g\in H(D): g(s)\neq 0 \text{ arba } g(s)\equiv 0\}$) įrodė tokią teoremą.

L teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ tolydusis operatorius, toks, kad visoms atvirosioms aibėms $G \subset H(D)$, aibė $(F^{-1}G) \cap S$ nėra tuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tada su visais $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau)) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Iš 5.9 teoremos išplaukia paskutinis disertacijos rezultatas kompozicijai $F(\zeta(s;\mathfrak{a}), \zeta(s,\alpha;\mathfrak{b}))$.

5.10 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\mathbb{P},\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvi ir $F \in \mathrm{Lip}(\beta_1, \beta_2)$. Tada su visais σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja tokia konstanta $c = c(\sigma_1, \sigma_2, \alpha, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, F) > 0$, kad su pakankamai dideliais T, funkcija $F(\zeta(s;\mathfrak{a}), \zeta(s,\alpha;\mathfrak{b}))$ turi daugiau negu cT nulių stačiakampyje*

$$\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, 0 < t < T\}.$$

Išvados

1. Periodinė dzeta funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ su multiplikatyvia periodine seka $\mathfrak{a}$ turi universalumo sąvybę apie analizinių funkcijų aproksimavimą postūmiais $\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a})$, $\tau \in \mathbb{R}$.

2. Funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra universali arba stipriai universali kai periodinė seka $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ su minimaliuoju periodu q (q yra pirminis skaičius) tenkina lygybę

$$a_q = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{l=1}^{q-1} a_l,$$

čia $\varphi(q)$ yra Oilerio funkcija.

3. Kai seka $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra multpilikatyvi, funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ turi universalumo su svoriu sąvybę.

4. Kai seka $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra multpilikatyvi, funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ turi distretaus universalumo su svoriu sąvybę.

5. Kai kurioms operatorių F klasėms analizinių funkcijų erdvėje, kompozicijos $F(\zeta(s;\mathfrak{a}),\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b}))$, čia $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$ yra periodine Hurvico funkcija, turi universalumo sąvybę. Be to, čios kompozicijos kritinėje juostoje turi be galo daug nulių.

Aprobacija

Pagrindiniai disertacijos rezultatai buvo pristatyti tarptautinėse MMA (Mathematical Modeling and Analysis) konferencijose (MMA 2015, gegužės 26-29, 2015, Sigulda, Latvija), (MMA 2016, birželio 1-4, 2016 Tartu, Estija), (MMA 2017, gegužės 30 - birželio 2, 2017, Druskininkai), (MMA 2018, gegužės 29 - birželio 1, 2018, Sigulda, Latvija), 14 tarptautinėje konferencijoje "Algebra ir skaičių teorija: šiuolaikinės problemos ir taikymai" (rugsėjo 12-15, 2016, Saratovas, Rusija), Vilniaus kombinatorikos ir skaičių teorijos konferencijoje (liepos 16-22, 2017, Vilnius), 15 tarptautinėje konferencijoje "Algebra, skaičių teorija ir diskrečioji geometrija: šiuolaikinės problemos ir taikymai " (gegužės 28-31, 2018, Tula, Rusija), tarptautinėje skaičių teorijos konferencijoje skirtoje profesorių Antano Laurinčiko ir Eugenijaus Manstavičiaus 70 jubiliejams (rugsėjo 9-15, 2018, Palanga), Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (LMD 2017, birželio 21-22, 2017, Vilnius), (LMD 2018, birželio 18-19, 2018, Vilnius), (LMD 2019, birželio 19-20, 2019, Vilnius), o taip pat Vilniaus universiteto skaičių teorijos seminaruose.

Publikacijų disertacijos tema sąrašas

Straipsniai recenzuojamuose moksliniuose leidiniuose:

1. A. Laurinčikas, M. Stoncelis, D. Šiaučiūnas. On the Zeros of Some Functions Related to Periodic Zeta-functions. Chebyshevskii Sbornik **15** (1) (2014), 121–130.

2. R. Macaitienė, M. Stoncelis, D. Šiaučiūnas. A Weighted Universality Theorem for Periodic Zeta-functions. Math. Mod. Analysis **22** (1) (2017), 95-105.

3. R. Macaitienė, M. Stoncelis, D. Šiaučiūnas. A Weighted Discrete Universality Theorem for Periodic Zeta-function. Analytic and Prob. Meth. in Numb. Th., A.Dubickas et.al. (Eds), Vilnius University, (2017), pp. 97–107.

4. R. Macaitienė, M. Stoncelis, D. Šiaučiūnas. A Weighted Discrete Universality Theorem for Periodic Zeta-functions. II. Math. Mod. Analysis **22** (6) (2017), 750-762.

5. M. Stoncelis, D. Šiaučiūnas. On the Periodic Zeta-function. Chebyshevskii Sbornik **15** (4) (2014), 139–147.

6. M. Stoncelis. Weighted Universality of Periodical Zeta-function. Algebra, Numb. Th. Discr. Geom.: Modern Probl. App. XV International Conference, Tula, TSPU of L. N. Tolstoy, 2018, 241-244.

Konferencijų pranešimų tezės

1. M. Stoncelis, D. Šiaučiūnas, On universal class of periodic zeta-functions. Abstracts of MMA2015, May 26-29, 2015, Sigulda, Latvia, p. 80.

2. M. Stoncelis, D. Šiaučiūnas, A weighted universality theorem for the periodic zeta-function. Abstracts of MMA2016, June 1-4, 2016, Tartu, Estonia, p. 72.

3. M. Stoncelis, Weighted universality of periodic zeta-function. Abstracts of the 14th International conference "Algebra and number theory: modern problems and applications", September 12-15, 2016, Saratov, Russia, p 118.

4. M. Stoncelis, D. Šiaučiūnas, On weighted discrete universality of periodic zeta-functions. Abstracts of Vilnius conference in combinatorics and number theory, July 16-July 22, 2017, Vilnius, Lithuania, p. 25-26.

5. M. Stoncelis, D. Šiaučiūnas, A weighted discrete universality theorem for the periodic zeta-function. Abstracts of MMA2017, May 30–June 2, 2017, Druskininkai, Lithuania, p. 62.

6. V. Garbaliauskienė, M. Stoncelis, On weighted universality for composite functions of periodic zeta-functions. Abstracts of MMA2018, May 29–June 1, 2018, Sigulda, Latvia, p. 24.

Summary

In the thesis, universality theorems on the approximation of analytic functions in the strip $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ by shifts of the periodic zeta-function are obtained. Let $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $q \in \mathbb{N}$. The function $\zeta(s; \mathfrak{a})$ is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

and have a meromorphic continuation to the whole complex plane.

Let $\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and let $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$ be the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K.

In the thesis, it is proved that if $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$, then, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Let $a_m \not\equiv 0$ be the period q of the sequence $\mathfrak{a}$ is a prime number, and $a_q = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{l=1}^{q-1} a_l$, where $\varphi(q)$ is the Euler totient function. Then $\zeta(s; \mathfrak{a})$ is universal with certain conditions.

If the function $w(t)$ is satisfying certain conditions, and the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative, $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$ then, for every $\varepsilon > 0$, inequality of weighted universality holds.

In weighted discrete universality theorems of periodic zeta-function, in approximating shifts $\zeta(s + i\tau; \mathfrak{a})$, τ takes values from the arithmetic progression $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$ with fixed $h > 0$ or from a more complicated discrete set $\{k^\alpha h\}$ with fixed α, $0 < \alpha < 1$, and $h > 0$.

If the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative, and the set $L(\mathbb{P}; \alpha) = \{(\log p : p \in$

$\mathbb{P}), (\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0)\}$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Let $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ and $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. Then, for every $\varepsilon > 0$, inequality of joint universality holds.

In the thesis is proved that, for every σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, there exists a constant $c = c(\sigma_1, \sigma_2, \alpha, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) > 0$ such that, for sufficiently large T, the function $\underline{\zeta}(s, \alpha; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = c_1\zeta(s; \mathfrak{a}) + c_2\zeta(s, \alpha; \mathfrak{b}), c_1, c_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ has more than cT zeros in the rectangle $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, 0 < t < T\}$.

For the composition $F(\zeta(s, \mathfrak{a}), \zeta(s, \alpha; \mathfrak{b}))$ with $F \in \mathrm{Lip}(\beta_1, \beta_2)$, the universality theorem in the thesis also is proved, and certain bound of number of zeros of this function is obtained.

Cituota literatūra

[1] M. Ishibashi, S. Kanemitsu, Dirichlet series with periodic coefficients, Res. math. **35** (1999), 70–88.

[2] L. Kaczorowski, Some remarks on the universality of periodic L-functions, in: New directions in value-distribution theory of zeta and L-functions, R.Steuding, J.Steuding (Eds.) Shaker Verlag, Aachen, (2009), 113-120.

[3] A. Kačėnas, A. Laurinčikas, On the periodic zeta-function, Lith, math. j. **41** (2) (2001), 168-177.

[4] R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, The joint distribution of periodic zeta-functions. Studia sci. math. Hungarica, **48** (2) (2011), 257-279.

[5] D. Korsakienė, V. Pocevičienė, D. Šiaučiūnas, On universality of periodic zeta-functions. Šiauliai math. semin. **8** (16) (2013), 131-141.

[6] A. Laurinčikas, Limit theorems for the Riemann zeta-function, Kluwer, Dordrecht, (1996).

[7] A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, Remarks on the universality of the periodic zeta-function. Math. notes **80** (4) (2006), 532-538.

[8] W. Schnee, Die Funktionalgleichung der Zetafunktion und der Dirichletschen Reihen mit periodischen Koeffizienten, Math. Z., **31** (1930), 378-390.

[9] J. Steuding, On Dirichlet series with periodic coefficients, Ramanujan J. **6**, (2002), 295-306.

[10] S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, Math. USSR-Izv. (1975), 475–486.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:
1978 m. sausio 17 d., Plungė, Lietuva.
Išsilavinimas:
1999 m. Šiaulių universitetas. Matematikos ir informatikos bakalauras.
2001 m. Šiaulių universitetas. Matematikos magistras.
Darbo patirtis:
1998 – 2002 m. Šiaulių Jovaro mokyklos mokytojas.
nuo 2002 m. Šiaulių universiteto dėstytojas.

UŽRAŠAMS

UŽRAŠAMS

UŽRAŠAMS

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, LT-10222 Vilnius
El. p. info@leidykla.vu.lt,
www.leidykla.vu.lt
Tiražas 40 egz.