LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 13–18

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Stacionarios Navjė–Stokso lygtys su nenuline kraštine sąlyga dviejų sluoksnių sistemoje*

Kristina Kaulakytė

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: kaulakyte.kristina@gmail.com

Santrauka. Darbe nagrinėjama sluoksniuose apibrėžta stacionari Navjė–Stokso sistema su nehomogenine kraštine sąlyga. Sukonstruotas, vadinamąją Lerė nelygybę tenkinantis, kraštinių duomenų pratęsimas į visą sritį, kuris leidžia uždavinį su nenuline kraštine sąlyga suvesti į jau išnagrinėtą uždavinį su nuline kraštine sąlyga.

Raktiniai žodžiai: Navjė–Stokso sistema, Lerė nelygybė, sluoksnis.

Įvadas

Šiame straipsnyje nagrinėjama stacionari Navjė–Stokso sistema

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}, \end{cases} \tag{1}$$

srityje Ω su nekompaktišku kraštu (žr. 2 sk.). Čia $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ – greičio vektorius, $p = p(x)$ – slėgis, ν – skysčio klampumo koeficientas, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ – išorinių jėgų tankis, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$ – kraštiniai duomenys.

Tarus, kad kraštinių duomenų $\mathbf{a}$ atrama yra kompaktas, iš tolydumo lygties $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ išplaukia, kad kraštinė funkcija $\mathbf{a}$ turi tenkinti būtinąją išsprendžiamumo sąlygą:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS = \sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0, \tag{2}$$

čia $\mathbf{n}$ vienetinis išorinės normalės vektorius, Γ_j – krašto komponentės.

Norint įrodyti (1) uždavinio išsprendžiamumą, reikia sukonstruoti kraštinių duomenų $\mathbf{a}$ solenoidinį (t. y. $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$) pratęsimą $\mathbf{A}(\varepsilon, x)$, kuris tenkintų Lerė nelygybę

$$\left|\int_{\Omega}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}\,dx\right| \leqslant \varepsilon c\int_{\Omega}|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx, \quad \forall\mathbf{u}\in \mathring{W}_2^1(\Omega),$$

su konstanta c nepriklausančia nuo ε.

* Tyrimą finansuoja Lietuvos mokslo taryba (sutarties Nr. MIP-030/2011).

Neaprėžtose srityse plačiai išnagrinėtas (1), (2) uždavinys su nuline kraštine sąlyga (pavyzdžiui, [3] ir [9] darbuose). Kai kraštinė sąlyga yra nehomogeninė, tai (1), (2) uždavinio išsprendžiamumas bendru atveju nėra įrodytas. Tačiau atskiriems sričių ir kraštinių sąlygų tipams galima sukonstruoti tokį solenoidinį pratęsimą $\mathbf{A}$, kuris tenkina Lerė nelygybę. 1999 m. K. Pileckas ir S.A. Nazarov išsprendė (1), (2) uždavinį sluoksnyje, kai srautas per išorinį paviršių kiek norima didelis (žr. [6]). 2002 m. H. Morimoto ir H. Fujita įrodė (1), (2) uždavinio išsprendžiamumą dvimačio begalinio simetrinio kanalo atveju (žr. [5]). 2010 m. J. Neustupa nagrinėjo (1), (2) uždavinį begalinėse srityse, kai sprendinio Dirichlė integralas yra baigtinis, kraštinės funkcijos srautai per išorinius paviršius yra bet kokie, o per vidinius – "maži" (žr. [7]). Minėtas uždavinys išspręstas, įvertį gaunant prieštaros būdu. 2011 m. K. Kaulakytė [1] darbe nagrinėjo (1), (2) uždavinį trimatėje srityje su vienu cilindru, t. y. pagal srities geometriją sprendinio Dirichlė integralas yra begalinis. 2012 m. K. Pileckas ir K. Kaulakytė [2] darbe įrodė (1), (2) uždavinio bent vieno sprendinio egzistavimą srityje su baigtiniu skaičiumi išėjimų į begalybę, imant srautus per išorinius paviršius kiek norima didelius, o per vidinius – pakankamai mažus. [2] straipsnyje išnagrinėti ir dvimatis, ir trimatis atvejai, sprendinio Dirichlė integralui esant tiek baigtiniam, tiek begaliniam.

Šiame straipsnyje nagrinėjamas (1), (2) uždavinys dviejų sluoksnių sistemoje, esant bet kokiam srautui per išorinį paviršių, o per vidinį paviršių imant pakankamai "mažą" srautą. Pagrindinis tikslas yra sukonstruoti tinkamą kraštinių duomenų pratęsimą, kuris leistų uždavinį su nehomogenine kraštine sąlyga suvesti į uždavinį su nuline kraštine sąlyga. Sukonstravus pratęsimą, uždavinio išsprendžiamumas įrodomas standartiškai (žr. [9]).

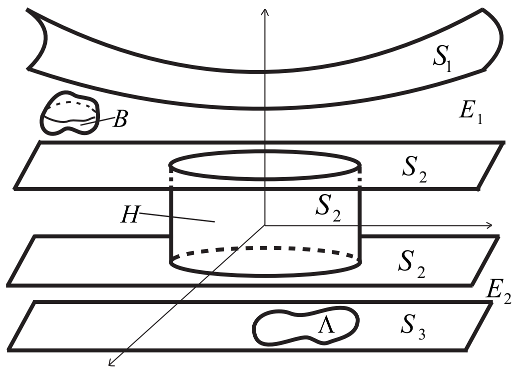
1 Uždavinio formulavimas

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ yra dviejų tarpusavyje sujungtų sluoksnių sistema, kurioje vienas sluoksnis yra besiplečiantis. Pažymėkime šiuos sluoksnius E_1 ir E_2: $E_1 = \{x \in \Omega\colon 1 < x_3 < h(|x'|),\ |x'| > 1\}$, $E_2 = \{x \in \Omega\colon -2 < x_3 < -1,\ |x'| > 1\}$. Sluoksnius E_1 ir E_2 jungia baigtinis cilindras H, kuris apima koordinačių pradžią. Nagrinėjama sritis yra su dviem išėjimais į begalybę, t. y. $\Omega = \Omega_{R_0} \cup E_1 \cup E_2$, čia $\Omega_{R_0} = \Omega \cap C(0, R_0)$, $C(0, R_0)$ – rutulys su spinduliu $R_0 > 0$. Be to, $\Omega_{R_0} = \Omega_0 \setminus \overline{B}$, čia $B \subset \Omega_0$ ir Ω_0 – vienjungės aprėžtos sritys. Pažymėkime

$$S_1 = \bigl\{x \in \partial E_1\colon x_3 = h\bigl(|x'|\bigr),\ |x'| > 1\bigr\},$$
$$S_2 = \bigl\{x \in \partial E_1\colon x_3 = 1,\ |x'| > 1\bigr\} \cup \partial H \cup \bigl\{x \in \partial E_2\colon x_3 = -1,\ |x'| > 1\bigr\},$$
$$S_3 = \bigl\{x \in \partial E_2\colon x_3 = -2,\ |x'| > 1\bigr\}.$$

Tada $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \Gamma$, čia $\Gamma = \partial B$ – vidinio kūno paviršius. Tarkime, kad $\operatorname{supp} \mathbf{a} \subset \partial\Omega \cap C(0, R_1)$ su $R_1 > R_0$. Iš lygybės $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ išplaukia, kad nagrinėjamu atveju turi būti patenkintos tokios sąlygos

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS = F_{\Sigma_1}, \qquad \int_{\Sigma_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS = F_{\Sigma_2}, \qquad \int_{\Lambda} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = F_{\Lambda},$$
$$\int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = F_{\Gamma}, \qquad F_{\Sigma_1} + F_{\Sigma_2} + F_{\Lambda} + F_{\Gamma} = 0,$$



1 pav. Sritis Ω.

čia $\Sigma_1 = \{x\colon |x'| = R,\ 1 < x_3 < h(|x'|)\}$, $\Sigma_2 = \{x\colon |x'| = R,\ -2 < x_3 < -1\}$ – sluoksnių E_1 ir E_2 skerspjūviai, $\Lambda \in S_3 \cap C(0, R_1)$, F_{Σ_1}, F_{Σ_2}, F_Λ, F_Γ – srautai.

2 Uždavinio suvedimas į uždavinį su nuline kraštine sąlyga

Kraštinių duomenų pratęsimo konstrukcijai reikalinga reguliarizuoto atstumo sąvoka. Reguliarizuotas atstumas $\Delta_G(x)$ nuo taško x iki uždaros aibės $G \subset R^n$ yra be galo diferencijuojama aibėje $R^n \setminus G$ funkcija, tenkinanti nelygybes

$$a_1 d_G(x) \leqslant \Delta_G(x) \leqslant a_2 d_G(x), \qquad \left|D^\alpha \Delta_G(x)\right| \leqslant a_3 d_G^{1-|\alpha|}(x),$$

čia $d_G(x) = \mathrm{dist}(x, G)$ – tikrasis atstumas nuo taško x iki aibės G, teigiamos konstantos a_1, a_2 priklauso nuo n, o a_3 priklauso nuo n ir nuo diferencijavimo eilės $|\alpha|$ (žr. [11]).

Tinkamo kraštinių duomenų pratęsimo nuo vidinio paviršiaus Γ, per kurį srautas yra pakankamai mažas, konstrukciją galima rasti [2] straipsnyje, 3.1 skyrelyje. Pažymėkime šį pratęsimą $B^{(\Gamma)}$.

Sukonstruosime kraštinių duomenų pratęsimą nuo išorinio paviršiaus Λ. Tegu $\gamma = \{x\colon |x'| = 0\}$ – begalinė tiesė, kertanti srities kraštą $\partial\Omega$ taške $x^{(1)} \in \Lambda \subset S_3$, o $\xi^{(1)}(x, \varepsilon)$ – nupjautinė Hopfo funkcija, apibrėžta formule

$$\xi^{(1)}(x, \varepsilon) = \Psi\left(\varepsilon \ln \frac{\delta(x)}{\Delta_{\partial\Omega \setminus (S_1 \cup \Lambda)}(x)}\right),$$

čia $\varepsilon \in (0, 1)$, Ψ yra tolydi monotoninė funkcija: $\Psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{kai } t \leqslant 0, \\ 1, & \text{kai } t \geqslant 1, \end{cases}$

$$\delta(x) = \begin{cases} \rho_1(x) \Delta_{\gamma \cap E_1 \cup S_1}(x) + \rho_2(x)|x - x_0| + (1 - \sum_{j=1}^2 \rho_j(x)) \Delta_{\gamma \cup S_1}(x), \\ \quad x \in \Omega \setminus (\gamma \cup S_1), \\ 0, \quad x \in \gamma \cup S_1, \end{cases}$$

čia $x_0 \in \gamma \cap \Omega_{R_0}$, $\rho_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \in E_j, \quad |x| \gg 1, \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$

1 lema. *Funkcija* $\xi^{(1)}(x,\varepsilon)=0$, *kai* $\delta(x)\leqslant \Delta_{\partial\Omega\setminus(S_1\cup\Lambda)}(x)$ *ir tiesės* γ *aplinkoje. Kai* $\Delta_{\partial\Omega\setminus(S_1\cup\Lambda)}(x)\leqslant e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\delta(x)$, *tai* $\xi^{(1)}(x,\varepsilon)=1$. *Be to,*

$$\left|\frac{\partial\xi^{(1)}(x,\varepsilon)}{\partial x_i}\right|\leqslant\frac{c\varepsilon}{d_{\partial\Omega\setminus(S_1\cup\Lambda)}(x)}.$$

Lemos įrodymas seka iš $\xi^{(1)}$ konstrukcijos ir reguliarizuoto atstumo savybių.

Srityje Ω apibrėžiame vektorinį lauką

$$\mathbf{A}^{(1)}(x,\varepsilon)=\operatorname{rot}\bigl(\xi^{(1)}(x,\varepsilon)\cdot\mathbf{b}(x)\bigr)=\nabla\xi^{(1)}(x,\varepsilon)\times\mathbf{b}(x),$$

čia $\mathbf{b}'(x)=\frac{1}{2\pi}(-\frac{x_2}{|x'|^2},\frac{x_1}{|x'|^2},0)$, $\mathbf{b}(x)=\mathbf{b}'(x)|_\Omega$.

Vektoriaus $\mathbf{b}(x)$ cirkuliacija per bet kokį uždarą kontūrą, apimantį tiesę γ, yra lygi -1 (jei integravimo kryptys nusakomos dešinės rankos taisykle). Jei šis kontūras neapima tiesės γ, tai vektoriaus $\mathbf{b}(x)$ cirkuliacija per jį lygi nuliui (žr. [10]). Be to, $\operatorname{div}\mathbf{b}(x)=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{b}(x)=0$.

2 lema. *Funkcija* $\mathbf{A}^{(1)}(x,\varepsilon)$ *yra be galo diferencijuojama, solenoidinė, lygi nuliui paviršiaus* $\partial\Omega\setminus\Lambda$ *mažoje aplinkoje, sluoksnyje* E_2, *kai* $|x|\gg 1$ *ir aibės* $\gamma\cap\overline{\Omega}$ $d_0/2$ *– aplinkoje. Be to,*

$$\bigl|\mathbf{A}^{(1)}(x,\varepsilon)\bigr|\leqslant\frac{c\varepsilon}{d_{\partial\Omega\setminus(\Lambda\cup S_1)}(x)|x'|},$$

$$\bigl|\nabla\mathbf{A}^{(1)}(x,\varepsilon)\bigr|\leqslant c\biggl(\frac{1}{d^2_{\partial\Omega\setminus(\Lambda\cup S_1)}(x)|x'|}+\frac{1}{d_{\partial\Omega\setminus(\Lambda\cup S_1)}(x)|x'|^2}\biggr),$$

$$\bigl|\mathbf{A}^{(1)}(x,\varepsilon)\bigr|\leqslant\frac{c\varepsilon}{h(|x'|)|x'|},\qquad\bigl|\nabla\mathbf{A}^{(1)}(x,\varepsilon)\bigr|\leqslant c\biggl(\frac{1}{h(|x'|)^2|x'|}+\frac{1}{h(|x'|)|x'|^2}\biggr),\quad x\in E_1,$$

$$\int_\Lambda\mathbf{A}^{(1)}(x,\varepsilon)\,dS=1,$$

čia d_0*-mažas teigiamas skačius.*

Įrodymas panašus į 3 lemos įrodymą [1] straipsnyje ir 2 lemos įrodymą [8] straipsnyje.

Tegu $\mathbf{A}^{(1)}_{F_\Lambda}=-F_\Lambda\mathbf{A}^{(1)}$, $\boldsymbol{\beta}=(\mathbf{a}+\mathbf{A}^{(1)}_{F_\Lambda})|_\Lambda$. Tada $\int_\Lambda\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}\,dS=0$. Vadinasi, $\boldsymbol{\beta}$ galima pratęsti į Ω rotoriaus pavidalu (žr. [4]) $\mathbf{A}^{(2)}(x,\varepsilon)=\operatorname{rot}(\xi^{(2)}(x,\varepsilon)\cdot\mathbf{B}(x))$, čia $\mathbf{B}\in W^2_2(\Omega)$, $\operatorname{rot}\mathbf{B}|_\Lambda=\boldsymbol{\beta}$ ir $\xi^{(2)}$ – glodi Hopfo tipo nupjautinė funkcija, $\xi^{(2)}=1$, kai $x\in\Lambda$, supp $\xi^{(2)}$ priklauso mažai Λ aplinkai, $|\nabla\xi^{(2)}(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{c\varepsilon}{d_\Lambda(x)}$.

Apibrėžkime

$$\mathbf{B}^{(\Lambda)}(x,\varepsilon)=\mathbf{A}^{(2)}(x,\varepsilon)-\mathbf{A}^{(1)}_{F_\Lambda}(x,\varepsilon).$$

Tuomet akivaizdu, kad $\operatorname{div}\mathbf{B}^{(\Lambda)}(x,\varepsilon)=0$ ir $\mathbf{B}^{(\Lambda)}(x,\varepsilon)|_{\partial\Omega}=\mathbf{a}(x)$.

3 lema. *Bet kokiam* $\mathbf{w}\in W^1_2(\Omega_R)$, $\forall R>R_0$ *su* $\mathbf{w}|_{\partial\Omega}=0$, *galioja nelygybė*

$$\int_{\Omega_R}\bigl|\mathbf{B}^{(\Lambda)}(x,\varepsilon)\bigr|^2\bigl|\mathbf{w}(x)\bigr|^2\,dx\leqslant c\varepsilon\int_{\Omega_R}\bigl|\nabla\mathbf{w}(x)\bigr|^2\,dx,$$

čia konstanta c *nepriklauso nuo* ε *ir* $\mathbf{w}$.

Įrodymą žr. [1] ir [8] straipsniuose.

Liko patenkinti srauto sąlygą per išėjimų į begalybę skerspjūvius:

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dS = F_{\Sigma_1}, \qquad \int_{\Sigma_2} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dS = F_{\Sigma_2}.$$

Kadangi jau „išleidome“ srautus nuo vidinio ir išorinio paviršių, tai reikia sukonstruoti tokį solenoidinį vektorinį lauką $\mathbf{B}^{(\Sigma)}$, kuris tenkins šias sąlygas:

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{B}^{(\Sigma)}\cdot\mathbf{n}\,dS = F_{\Sigma_1} + F_{\Lambda} + F_{\Gamma}, \qquad \int_{\Sigma_2} \mathbf{B}^{(\Sigma)}\cdot\mathbf{n}\,dS = F_{\Sigma_2}.$$

Tegu $\xi^{(3)}(x,\varepsilon)$ – nupjautinė Hopfo funkcija, apibrėžta formule

$$\xi^{(3)}(x,\varepsilon) = \Psi\left(\varepsilon \ln \frac{\rho(\Delta_{\gamma\cup S_1\cup S_2}(x))}{\Delta_{\partial\Omega\setminus(S_1\cup S_2)}(x)}\right),$$

čia $\varepsilon \in (0,1)$, Ψ ir ρ yra tolydžios monotoninės funkcijos:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{kai } t \leqslant 0,\\ 1, & \text{kai } t \geqslant 1, \end{cases} \qquad \rho(t) = \begin{cases} \frac{a_1 d_0}{2}, & \text{kai } t \leqslant \frac{a_2 d_0}{2},\\ t, & \text{kai } t \geqslant a_2 d_0, \end{cases}$$

konstantos a_1, a_2 yra iš (3) įverčio.

Tuomet

$$\mathbf{B}^{(\Sigma)}(x,\varepsilon) = (F_{\Sigma_1} + F_{\Lambda} + F_{\Gamma})\,\mathrm{rot}\big(\xi^{(3)}(x,\varepsilon)\cdot\mathbf{b}(x)\big).$$

Taigi, vektorinis laukas $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{(\Gamma)} + \mathbf{B}^{(\Lambda)} + \mathbf{B}^{(\Sigma)}$ turi savybes: $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$ ir

$$\int_{\Omega_R} |\mathbf{A}|^2|\mathbf{u}|^2\,dx \leqslant c\varepsilon \int_{\Omega_R} |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx, \quad \forall R > R_0.$$

Imdami $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{A}$, uždavinį su nehomogenine kraštine sąlyga suvedėme į uždavinį su homogenine kraštine sąlyga:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{v} + ((\mathbf{v}+\mathbf{A})\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \nabla p = \mathbf{f} + \nu\Delta\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{A},\\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0,\\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Gautojo uždavinio išsprendžiamumas įrodomas standartiškai (žr. [9]).

Literatūra

[1] K. Kaulakytė. Stacionarus Navjė–Stokso uždavinys su nehomogenine kraštine sąlyga neaprėžtoje srityje. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **52**:28–33, 2011.

[2] K.Kaulakytė and K.Pileckas. On the nonhomogeneous boundary value problem for the Navier–Stokes system in a class of unbounded domains. *J. Math. Fluid Mech.*, 2012.

[3] O.A. Ladyzenskaya and V.A. Solonnikov. On finding of solutions of boundary value problems for the Stokes and Navier–Stokes equations with an infinite Dirichlet integral. *Zapiski Nauchn. Sem. LOMI*, **96**:117–160, 1980.

[4] O.A. Ladyzhenskaya. *Mathematical Theory of the Viscous Incompressible Fluid*. Gordon and Breach, 1969.

[5] H. Morimoto and H. Fujita. A remark of the existence of steady Navier–Stokes flows in a certain two-dimentional infinite channel. *Tokyo J. Math.*, **25**(2):307–321, 2002.

[6] S.A. Nazarov and K. Pileckas. On the solvability of Stokes and the Navier–Stokes problems in the domains that are layer-like at infinity. *J. Math. Fluid Mech.*, **1**(1):78–116, 1999.

[7] J. Neustupa. A new approach to the existence of weak solutions of the steady Navier–Stokes system with inhomogeneous boundary data in domains with noncompact boundaries. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **198**:331–348, 2010.

[8] K. Pileckas. Existence of solutions for the Navier–Stokes equations, having an infinite dissipation of energy, in a class of domains with noncompact boundaries. *Zapiski Nauchn. Sem. LOMI*, **110**:180–202, 1981.

[9] V.A. Solonnikov. Stokes and Navier–Stokes equations in domains with non-compact boundaries. *Pitmann Notes Math.*, **3**:240–349, 1983.

[10] V.A. Solonnikov and K. Pileckas. Certain spaces of solenoidal vectors and the solvability of the boundary problem for the Navier–Stokes system of equations in domains with noncompact boundaries. *Zapiski Nauchn. Sem. LOMI*, **73**:136–151, 1977.

[11] E.M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.

SUMMARY

Stationary Navier–Stokes equations with non-homogeneous boundary condition in a system of two connected layers

K. Kaulakytė

In this paper the stationary Navier–Stokes system with non-homogeneous boundary condition is studied in domain which consists of two connected layers. The extension of the boundary value, which reduces the non-homogeneous boundary problem to the homogeneous one, is constructed in this paper.

Keywords: Navier-Stokes system, Leray's inequality, layer.