LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
**53** t., 2012, 37–41

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

# Glaustinių hiperpaviršių afininė diferencialinė geometrija

**Kazimieras Navickis**

*Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

**Santrauka.** Šiame darbe nagrinėjami $n$-matės Euklido erdvės hiperpaviršiaus aukštesnių eilių glaustinių hiperpaviršių diferencialinė geometrija afininėje koordinačių sistemoje. Glaustinių hiperpaviršių panaudojimas leidžia analizuoti duotojo hiperpaviršiaus lokalines savybes, kurios priklauso nuo aukštesniųjų eilių dalinių išvestinių.

**Raktiniai žodžiai:** hiperpaviršius, glaustinis hiperpaviršius, afininė diferencialinė geometrija.

Tarkime, kad $S$ – hiperpaviršius $n$-matėje Euklido erdvėje, apibrėžtas išreikštine lygtimi $(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots = 1, \dots, n-1; a, b, \dots, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots = n)$

$$S : x^a = f^a(x^\alpha), \tag{1}$$

funkcija $f^a$ yra tolydi ir turi tolydines dalines išvestines taške $(x_0^\alpha)$ iki eilės $r+1$, $r \in \mathbb{N}$.

Pažymėkime

$$\vec{r} = \left\{x^1; x^2; \dots; x^{n-1}; f^a\left(x^\alpha\right)\right\},$$
$$\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\alpha}.$$

Nuo vektorių sistemos $\{\vec{r}_\alpha\}$ pereikime prie kitos vektorių sistemos $\{\vec{a}_\alpha\}$ pagal formules

$$\vec{a}_\alpha = \frac{a_{\alpha\alpha}}{G_\alpha} \sum_{\beta=1}^{\alpha} G^\alpha_{\alpha\beta} \vec{r}_\beta,$$

čia

$$a_{\alpha\alpha} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{a}_\alpha,$$

$G^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$ yra elemento

$$g_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta$$

adjunktas determinante

$$G_\alpha = \det(M_\alpha)$$

ir

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1\alpha} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{2\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1\alpha} & g_{2\alpha} & \dots & g_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}.$$

Vektoriai

$$\vec{E}_\alpha = \frac{\vec{a}_\alpha}{|\vec{a}_\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{G_{\alpha-1} \cdot G_\alpha}} \sum_{\beta=1}^{\alpha} G^{(\alpha)}_{\alpha\beta} \vec{r}_\beta$$

sudaro hiperpaviršiaus $S$ liečiamosios hiperplokštumos ortonormuotą bazę. Hiperpaviršiaus $S$ normalės vektorius

$$\vec{N} = (-1)^n \big\{ f^a_\alpha; -1 \big\},$$

čia

$$f^a_\alpha = \frac{\partial f^a}{\partial x^\alpha}.$$

Normalės vektoriaus $\vec{N}$ ilgis

$$|\vec{N}| = \sqrt{G_{n-1}}.$$

Pažymėkime

$$\vec{E}_n = \frac{\vec{N}}{\sqrt{G_{n-1}}}.$$

Vektorių sistema $\{\vec{E}_i\}$ $(i, j, \dots = 1, \dots, n)$ sudaro $n$-matės Euklido erdvės ortonormuotąją bazę hiperpaviršiaus $S$ taške $(x^i)$.

Hiperpaviršių $S$ nagrinėsime jo taško $M_0(x^i_0)$ aplinkoje; čia $x^a_0 = f^a(x^\alpha_0)$. Vektorinių funkcijų $\vec{E}_i$ reikšmes taške $M_0$ žymėsime $\vec{e}_i$:

$$\vec{e}_i = \big\{ l^j_i \big\}.$$

Matrica

$$R = \big( l^i_j \big)$$

yra ortogonalioji. Bet kurio $n$-matės Euklido erdvės taško $M(x^i)$ koordinates bazės $\{\vec{e}_i\}$ atžvilgiu žymėsime $y^i$. Tada

$$x^i = x^i_o + l^i_j y^j. \tag{2}$$

Hiperpaviršiaus $S$ lygtis naujoje koordinačių sistemoje bus tokia:

$$S : h^a\big(y^i\big) = 0, \tag{3}$$

čia

$$h^a(y^i) = f^a\bigl(x_0^\alpha + l_i^\alpha y^i\bigr) - \bigl(x_0^a + l_i^a y^i\bigr).$$

Funkcijos $h^a$ dalinių išvestinių

$$h^a_{i_1\dots i_p} = \frac{\partial^p h^a}{\partial y^{i_1}\dots\partial y^{ip}}, \quad (p \geq 1)$$

reikšmes taške $M_0$ žymėsime $b^a_{i_1\dots i_p}$. Kadangi

$$b^a_\alpha = 0, \qquad b^a_n = -\sqrt{G_{n-1}(M_0)} \neq 0,$$

tai (3) lygtis apibrėžia funkciją

$$y^a = H^a\bigl(y^\alpha\bigr).$$

Pažymėkime

$$A^a_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \frac{\partial^p H^a}{\partial y^{\alpha_1}\dots\partial y^{\alpha_p}},$$
$$C^a_{\alpha_1\dots\alpha_p} = A^a_{\alpha_1\dots\alpha_p}(M_0),$$
$$A^a_\alpha = \frac{\partial y^a}{\partial y^\alpha}, \qquad B^\beta_\alpha = \delta^\beta_a, \qquad B^a_\alpha = A^a_\alpha.$$

Diferencialinių operatorių

$$\partial^\#_\alpha = B^k_\alpha \frac{\partial}{\partial y^k} \tag{4}$$

pagalba apibrėžkime naujus diferencialinius operatorius

$$\partial^\#_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \partial^\#_{\alpha_p} \circ \dots \circ \partial^\#_{\alpha_1}.$$

Pažymėkime

$$H^a_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \partial^\#_{\alpha_1\dots\alpha_p} h^a.$$

Dydžius $C^a_{\alpha_1\dots\alpha_p}$ randame rekurentiškai iš lygčių sistemos

$$H^a_{\alpha_1\dots\alpha_p}|_{C^a_\beta = 0} = 0,$$

t. y. iš sistemos

$$\begin{cases} b^a_{a_1} C^{a_1}_{\alpha_1\alpha_2} + b^a_{\alpha_1\alpha_2} = 0, \\ b^a_{a_1} C^{a_1}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + 3C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2} b^a_{\alpha_3)_{a_1}} + b^a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0, \\ b^a_{a_1} C^{a_1}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} + 3b^a_{a_1a_2} C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2} C^{a_2}_{\alpha_3\alpha_4)} + 6C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2} b^a_{\alpha_3\alpha_4)a_1} \\ \quad + 4C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3} b^a_{\alpha_4)\alpha_1} + b^a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = 0, \\ b^a_{a_1} C^{a_1}_{\alpha_1\dots\alpha_5} + 5C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} b^a_{\alpha_5)a_1} + 10C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3} C^{a_2}_{\alpha_4\alpha_5)} b^a_{a_1a_2} \\ \quad + 10C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3} b^a_{\alpha_4\alpha_5)a_1} + 15C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2} C^{a_2}_{\alpha_3\alpha_4} b^a_{\alpha_5)a_1a_2} \\ \quad + 10C^{a_1}_{(\alpha_1\alpha_2} b^a_{\alpha_3\alpha_4\alpha_5)a_1} + b^a_{\alpha_1\dots\alpha_5} = 0, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{5}$$

$p$-formos ($p \geqslant 2$)

$$\varphi_p^a = \frac{1}{p!} C^a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} y^{\alpha_1} \ldots y^{\alpha_p} \tag{6}$$

leidžia apibrėžti $r$-osios eilės hiperpaviršių

$$O^{(r)}_{M_0}(S) : y^a = \sum_{p=2}^{r} \varphi_p^a, \tag{7}$$

kuris turi $r$-osios eilės kontaktą taške $M_0$ su nagrinėjamu hiperpaviršiumi $S$. Todėl šį hiperpaviršių vadinsime hiperpaviršiaus $S$ $r$-osios eilės glaustiniu hiperpaviršiumi. Jo savybės leidžia nagrinėti įvairias paties hiperpaviršiaus $S$ geometrines savybes.

Pasirinkime kitą koordinačių sistemą. Vektoriai

$$\begin{cases} \vec{f}_\alpha = \vec{e}_\alpha, \\ \vec{f}_a = a_a^\alpha \vec{f}_\alpha + \vec{e}_a, \end{cases}$$

kai $a_a^\alpha \in \mathbb{R}$ yra fiksuoti skaičiai, nustato $n$ krypčių vektorius afininėje koordinačių sistemoje, kurios pradžios taškas yra $M_0$. Tarkime, kad $(u^\alpha; F^a(u^\alpha))$ yra hiperpaviršiaus $S$ taško koordinatės šios sistemos atžvilgiu. Tada

$$S : \begin{cases} X^\alpha = u^\alpha + a_a^\alpha F^a(u^\beta), \\ X^a = F^a(u^\beta). \end{cases}$$

Pažymėkime

$$\begin{aligned} F^a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} &= \frac{\partial^p F^a}{\partial u^{\alpha_1} \ldots \partial u^{\alpha_p}}, \\ d^a_{\alpha_p \ldots \alpha_p} &= F^a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\big|_{M_0}, \\ \psi_p^a &= \frac{1}{p!} d^a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_p}. \end{aligned}$$

Lygtis

$$Osc^{(r)}_{M_0}(S) : X^a = \sum_{p=2}^{r} \psi_p^a$$

apibrėžia $r$-sios eilės glaustinį hiperpaviršių taške $M_0$ afininėje koordinačių sistemoje.

Darbe įrodoma teorema, kurioje nustatomi ryšiai tarp $p$-formų $\varphi_p^a$ ir $\psi_p^a$. Skyrium imant, jei

$$\begin{aligned} g^a_{(2)b_1} &= a^a_{\beta_1 \alpha_3} a^{\beta_1}_{b_1} u^{\alpha_3}, \\ g^a_{(3)b_1} &= a^a_{\beta_1 \alpha_3 \alpha_4} a^{\beta_1}_{b_1} u^{\alpha_3} u^{\alpha_4}, \\ g^a_{(4)b_1} &= a^a_{\beta_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} a^{\beta_1}_{b_1} u^{\alpha_3} u^{\alpha_4} u^{\alpha_5}, \\ g^a_{(5)b_1} &= a^a_{\beta_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6} a^{\beta_1}_{b_1} u^{\alpha_3} u^{\alpha_4} u^{\alpha_5} u^{\alpha_6}, \\ h^a_{(2)b_1 b_2} &= a^a_{\beta_1 \beta_2} a^{\beta_1}_{b_1} a^{\beta_2}_{b_2}, \\ h^a_{(3)b_1 b_2} &= a^a_{\beta_1 \beta_2 \alpha_5} a^{\beta_1}_{b_1} a^{\beta_2}_{b_2} u^{\alpha_5}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&h^a_{(3)b_1b_2b_3} = a^a_{\beta_1\beta_2\beta_3} a^{\beta_1}_{b_1} a^{\beta_3}_{b_2} a^{\beta_3}_{b_3},\\
&h^a_{(4)b_1b_2} = a^a_{\beta_1\beta_2\alpha_5\alpha_6} a^{\beta_1}_{b_1} a^{\beta_2}_{b_2} u^{\alpha_5} u^{\alpha_6},\\
&Z^a_{(p)} = a^a_{\alpha_1\ldots\alpha_p} u^{\alpha_1}\ldots u^{\alpha_p},
\end{aligned}
$$

tai

$$
\begin{aligned}
\psi^a_2 =&\frac{1}{2} Z^a_{(2)},\\
\psi^a_3 =&\frac{1}{6} Z^a_{(3)} + \frac{1}{2} Z^{b_1}_{(2)} g^a_{(2)b_1},\\
\psi^a_4 =&\frac{1}{24} Z^a_{(4)} + \frac{1}{8} Z^{b_1}_{(2)} Z^{b_2}_{(2)} h^a_{(2)b_1b_2} + \frac{1}{6} Z^{b_1}_{(3)} g^a_{(2)b_1} + \frac{1}{4} Z^{b_1}_{(2)} g^a_{(3)b_1},\\
\psi^a_5 =&\frac{1}{5!} Z^a_{(5)} + \frac{1}{24} g^a_{(2)b_1} Z^{b_1}_{(4)} + \frac{1}{12} h^a_{(2)b_1b_2} Z^{b_1}_{(3)} Z^{b_2}_{(2)} + \frac{1}{12} g^a_{(3)b_1} Z^{b_1}_{(3)}\\
&+ \frac{1}{6} h^a_{(3)b_2b_2} Z^{b_1}_{(2)} Z^{b_2}_{(2)} + \frac{1}{12} g^a_{(4)b_1} Z^{b_1}_{(2)},\\
\psi^a_6 =&\frac{1}{6!} Z^a_{(6)} + \frac{1}{120} g^a_{(2)b_1} Z^{b_1}_{(5)} + \frac{1}{48} h^a_{(2)b_1b_2} Z^{b_1}_{(4)} Z^{b_2}_{(2)} + \frac{1}{72} h^a_{(2)b_1b_2} Z^{b_1}_{(3)} Z^{b_2}_{(3)}\\
&+ \frac{1}{48} g^a_{(3)b_1} Z^{b_1}_{(4)} + \frac{1}{12} h^a_{(3)b_1b_2} Z^{b_1}_{(3)} Z^{b_2}_{(2)} + \frac{1}{48} h^a_{(3)b_1b_2b_3} Z^{b_1}_{(2)} Z^{b_2}_{(2)} Z^{b_3}_{(2)}\\
&+ \frac{1}{36} g^a_{(4)b_1} Z^{b_1}_{(3)} + \frac{1}{16} h^a_{(4)b_1b_2} Z^{b_1}_{(2)} Z^{b_2}_{(2)} + \frac{1}{48} g^a_{(5)b_1} Z^{b_1}_{(2)}.
\end{aligned}
$$

## Literatūra

[1] W. Blaschke. *Affine Differentialgeometrie*. Berlin, 1923.

SUMMARY

**Affine differential geometry of osculating hypersurfaces**
*K. Navickis*

Osculating surfaces of second order have been studied in classical affine differential geometry [1]. In this article we generalize this notion to osculating hypersurfaces of higher order of hypersurfaces in Euclidean $n$-space. Various geometric interpretations are given. This yields a affinely invariant consideration of the local properties of a given hypersurface which depend on the derivatives of higher order.

*Keywords*: hypersurface, osculating hypersurface, affine differential geometry.