Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 157–162

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Simetrija kaip matematinių uždavinių sprendimo taktika

Aistė Elijio, Dovilė Malijonytė

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: aiste.elijio@gmail.com, d.malijonyte@gmail.com

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjama simetrija kaip taktika spręsti įvairius matematinius uždavinius. Nors mokykliniame matematikos kurse, mokantis geometrijos temų, nagrinėjama ašinė ir centrinė simetrijos, sprendžiami su šiomis simetrijos rūšimis susiję nesudėtingi uždaviniai, tačiau simetrijos panaudojimas galėtų būti kur kas platesnis. Ji ypatingai padeda kaip taktika sprendžiant nestandartinius matematikos uždavinius. Straipsnyje pateikiami šios taktikos pritaikymo pavyzdžiai ir pristatomi simetrijos panaudojimo mokykloje tyrimo rezultatai.

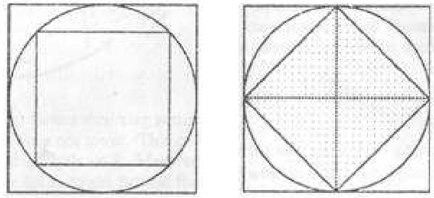
Raktiniai žodžiai: simetrija, nestandartiniai uždaviniai, sprendimo strategija ir taktika.

Įvadas

Kai kurios matematinės idėjos natūraliai yra labai artimos žmogui. Viena iš jų – simetrijos idėja. Atrodo, kad žmogaus prigimtyje glūdi trauka grožiui, tvarkai ir harmonijai, kuri labai tampriai siejasi su simetrija. Pasaulio sandaroje, mus supančioje aplinkoje mes taip pat pastoviai susiduriame su simetrija: pastatai, augalai, gyvūnai, mažiausios ląstelės ir molekulės pasižymi simetrija. Netgi nuostabios melodijos skambesys glaudžiai siejasi su ja [2]. Taigi simetrija galėtų būti labai dėkinga tema matematikos pamokose, atskleidžiant jos grožį ir matematikos ryšius su kitais mokomais dalykais bei supančiu pasauliu. Be to, simetrija kaip sprendimo taktika galėtų būti taikoma kur kas plačiau nei tik sprendžiant tiesmukiškus geometrinius uždavinius, prašančius surasti simetrišką tašką ar figūrą. Pavyzdžiui, sprendžiant įvairius, ypač nestandartinius, probleminius uždavinius, viena iš esminių strategijų yra ieškoti tam tikros tvarkos, kuri leistų praplėsti turimą informaciją ir tokiu būdu priartėti prie sprendimo. Jei pavyksta atrasti tam tikrą simetriją, iki tol buvusioje neaiškioje situacijoje pradedame įžvelgti tvarką ir sistemą, ir tuo būdu dažnai iš pažiūros sudėtingo uždavinio sprendimas tampa akivaizdus. Tuo būdu, simetrijos plačiąja prasme paieškos tampa viena iš efektyvių taktikų, galinčių padėti spręsti ne tik geometrijos uždavinius.

1 Simetrija – matematinių uždavinių sprendimo taktika

Šioje dalyje pateiksime kelias iliustracijas to, kaip simetrijos idėja galėtų būti taikoma sprendžiant įvairius matematikos uždavinius ir galvosūkius. Šiuo atveju bus svarbu



1 pav. Kvadratų plotų santykis.

ieškoti simetrijos neįtikėtinose vietose, dažnai labiau naudojantis intuityviu simetrijos kaip harmonijos, tvarkos, atitikmens apibrėžimu.

1.1 Simetrija geometrijos uždaviniuose

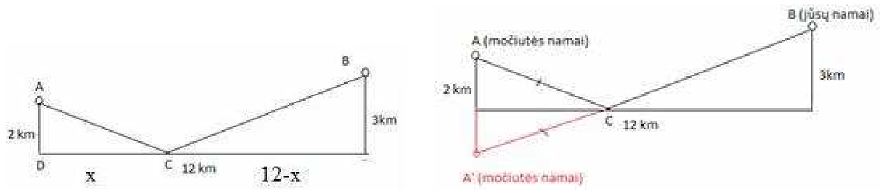
Geometrijos uždaviniuose su simetrija susiduriame dažniausiai, tačiau ir čia svarbu mokytis įžvelgti konkrečiame uždavinyje, ar simetrija jau yra, ar galbūt ją galima įvesti, kaip ja pasinaudoti.

1 PAVYZDYS. Į kvadratą yra įbrėžtas apskritimas, o į šį apskritimą įbrėžtas dar vienas kvadratas (žr. 1 pav., kairėje). Reikia rasti dviejų kvadratų plotų santykį [3].

Be abejo, šį uždavinį nesunku išspręsti, pasižymėjus, tarkime, mažesniojo kvadrato kraštinę x, tada, pasinaudojus Pitagoro teorema, gauti antrojo kvadrato kraštinę $x\sqrt{2}$ ir galiausiai apskaičiuoti plotus ir jų santykį. Tačiau uždavinio sprendimas tampa ypač grakščiu, pastebėjus simetriją – galų gale apskritimas yra absoliučiai simetriškas, tad niekas nepasikeis jį sukiojant kokiu nori kampu. Taigi pasukus apskritimą kartu su vidiniu kvadratu 45^o kampu, gausime tokį brėžinį (žr. 1 pav., dešinėje). Dabar plotų santykis tampa akivaizdus.

2 PAVYZDYS. Jūsų namai yra 3 km į šiaurę nuo upės, kuri teka iš rytų į vakarus. Jūsų močiutė gyvena 12 km į vakarus ir 1 km į pietus nuo jūsų namų. Kas dieną jūs einate iš savo namų pas močiutę. Tačiau pirma nueinate prie upės (pasisemti vandens močiutei). Koks yra trumpiausias kelionės atstumas [3]?

Įprastas uždavinio sprendimas paprastai remtųsi funkcijos minimumo ieškojimu. Be abejo, reikėtų dar teisingai sudaryti šią funkciją, pasižymėjus, tarkime, atitinkamus atstumus x ir $(12 - x)$ (žr. 2 pav., kairėje), pasinaudojus Pitagoro teorema ir gavus kelionės atstumo funkciją $S(x) = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(12 - x)^2 + 3^2}$. Aišku, čia mums prireiktų ieškoti išvestinės, spręsti lygtis ir pan. Taigi turime rimtą uždavinį vyriausiųjų klasių mokiniams. Panašūs dažnai pasitaiko kaip vieni paskutinių valstybiniuose matematikos egzaminuose. Tačiau gal galime čia įžvelgti simetriją ir tokiu būdu pasilengvinti sau darbą? Iš pirmo žvilgsnio simetrijos čia nedaug, tačiau ją galėtume įsivesti, jei pastebėtume, kad mūsų kelionės atstumas nepasikeistų, jei „perkeltume“ močiutės namus simetriškai upės atžvilgiu (žr. 2 pav., dešinėje). Dabar mums tereikėtų surasti trumpiausią atstumą tarp dviejų plokštumos taškų, kuris, kaip žino ir jaunesniųjų klasių mokiniai, yra atkarpa, jungianti šiuos taškus. Uždavinio sprendime nelieka nei nežinomųjų, nei funkcijos, nei išvestinių skaičiavimo, tik gana nesudėtingas Pitagoro teoremos pritaikymas įžambinei surasti.



2 pav. Trumpiausio kelio paieška.

1.2 Simetrija kitose mokyklinės matematikos srityse

Kad ir kokia naudinga simetrija yra geometrijoje, dar netikėčiau ji padeda kitose matematikos srityse. Čia vėl pateiksime kelis pavyzdžius, iliustruojančius simetrijos idėjos pritaikymą.

3 PAVYZDYS. Išspręskite lygtį $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ [3].

Be abejo, šią lygtį galima išspręsti įvairiais būdais, tačiau paprastai mokyklinėje matematikoje tokio laipsnio lygtys nėra nagrinėjamos. Vis dėlto, jei čia pastebėsime ir pritaikysime simetrijos idėją koeficientams ir tada nežinomųjų laipsniams, galėsime nesunkiai įveikti šią lygtį, kelis kartus išspręsdami gerai pažįstamas kvadratines lygtis. Taigi iš pradžių galime padalinti abi lygties puses iš x^2 ($x \neq 0$):

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Be abejo, gauta lygtis neatrodo paprastesnė, tačiau joje galime įžvelgti simetriją, be to, galime surinkti „panašius“ narius:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0.$$

Įsivedę pasižymėjimą $t = x + \frac{1}{x}$ ir pastebėję, kad $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, gausime naują lygtį: $t^2 + t - 1 = 0$. O tokias lygtis, be abejo, mokame nesunkiai spręsti.

4 PAVYZDYS. Įrodykite, kad $d(n)$ yra nelyginis tada ir tik tada, kai n yra natūralaus skaičiaus kvadratas. Čia $d(n)$ yra n daliklių skaičius, įskaitant 1 ir n [3].

Šioje situacijoje simetrija yra tame, kad kiekvieną n daliklį d galime suporuoti su atitinkamu dalikliu n/d. Pavyzdžiui, jei $n = 36$, tai natūralu suporuoti daliklį 2 su 18, daliklį 3 – su 12, ir t. t. Tuo būdu kiekvienas daliklis turės jį atitinkantį „porininką“, taigi jų skaičius visada bus lyginis, išskyrus tą atvejį, kai turėsime natūralaus skaičiaus kvadratą ir daliklio „porininkas“ sutaps su juo pačiu.

5 PAVYZDYS. Apskaičiuokite integralo $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ reikšmę [3].

Ir šiuo atveju uždavinį galime spręsti įvairiai. Tačiau, jei mintyse įsivaizduosime sinuso ir kosinuso funkcijų grafikus tarp 0 ir $\frac{\pi}{2}$, tai pastebėsime, kad jie simetriški $x = \frac{\pi}{4}$ atžvilgiu. Taigi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx,$$

Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B, **53**, 2012, 157–162.

o tai reiškia, kad mūsų ieškomas integralas yra:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

1.3 Simetrija matematiniuose žaidimuose

Matematiniai žaidimai – gana dažnai pasitaikanti nestandartinių, olimpiadinių matematikos uždavinių rūšis. Skirtingai nei įprastuose žaidimuose, čia paprastai egzistuoja pergalinga žaidimo strategija, kuria žaisdamas pirmasis ar antrasis žaidėjas visada užsitikrins sau pergalę, nesvarbu, kaip protingai bežaistų kitas žaidėjas. Uždavinio sprendimas – surasti tą pergalingą strategiją. Viena iš dažnai puikiai veikiančių tokių uždavinių sprendimo taktikų yra simetrijos paieškos. Paprastai nesunku laimėti, jei pavyksta surasti tam tikrą simetriją, kuri užtikrina, kad, simetriškai kartodamas priešininko ėjimus, visada turėsiu, kur eiti, kol mano priešininkas tai galės daryti. Pateikiame kelis nesudėtingus tokių uždavinių pavyzdžius.

6 PAVYZDYS. Du žaidėjai žaidžia degtukais. Degtukus jie ima vienas po kito iš dviejų dėžučių. Kiekvienas žaidėjas savo ėjimu gali paimti bet kokį skaičių degtukų iš bet kurios dėžutės (tik iš vienos vienu ėjimu). Vienoje dėžutėje yra 73 degtukai, kitoje – 56. Laimi tas žaidėjas, kuris paima paskutinius degtukus. Kaip turi žaisti pirmasis žaidėjas, kad laimėtų [1]?

Tam, kad šiuo atveju atrastume pergalingą strategiją, iš pradžių turime sukurti simetrinę situaciją. Tai gali padaryti pirmasis žaidėjas, pirmu ėjimu sulygindamas abiejose dėžutėse esančių degtukų skaičių. Tada jam tereikės simetriškai kartoti antrojo žaidėjo ėjimus – tam paėmus kažkokį degtukų skaičių iš vienos dėžutės, tiek pat paimti iš kitos. Tokiu būdu, tol, kol antrasis žaidėjas turės ėjimą, tol jį turės ir pirmasis žaidėjas. Taigi jis užsitikrins sau pergalę.

7 PAVYZDYS. Kairiajame languotos juostos 1×2012 langelyje guli trys sagos. Du žaidėjai žaidžia žaidimą su tokiomis taisyklėmis: kiekvienas jų vienu ėjimu gali perkelti bet kurią vieną sagą į dešinę pusę per bet kurį skaičių langelių. Pralaimi tas žaidėjas, kuriam jau nebelieka jokio ėjimo juostoje. Kuris žaidėjas turi pergalingą strategiją? Kodėl [1]?

Šiuo atveju vėl laimėtų pirmasis žaidėjas, jei pirmuoju ėjimu perkeltų vieną iš sagų į patį paskutinį dešinėje juostos pusėje esantį langelį, o po to kartotų antrojo žaidėjo ėjimus su kita saga.

2 Simetrijos panaudojimo mokykloje tyrimas

2.1 Tyrimo tikslai ir struktūra

Tyrimas siekė išsiaiškinti, ar mokiniai pastebi simetriją juos supančioje aplinkoje, matematikoje ir kituose mokykloje dėstomuose dalykuose bei kaip dažnai ją taiko spręsdami matematinius uždavinius ir galvosūkius.

Buvo apklausti 28 III–IV gimnazijos klasių mokiniai. Tyrimą sudarė du etapai. Tiek pirmą, tiek antrą etapą sudarė dvi dalys: teoriniai klausimai ir praktinės užduotys, tikrinančios, ar mokiniai sugebės išspręsti konkrečius uždavinius remdamiesi simetrija kaip sprendimo strategija. Po pirmojo tyrimo etapo buvo vedama 45 min.

3 pav. Mokinių atsakymai apie simetriją mokomuosiuose dalykuose.

paskaita apie simetriją, siekiant parodyti, kaip ji gali būti panaudojama. Paskaitos metu buvo pavaizduotas filmukas, pademonstruoti įdomūs faktai, iliustracijos bei uždavinių sprendimas naudojant simetriją. Antrojo etapo metu teorinė dalis buvo lygiai tokia pati kaip ir pirmojo etapo metu, o praktinės užduotys šiek tiek skyrėsi, nors kai kurios buvo analogiškos pirmojo etapo užduotims, kas leido palyginti rezultatus ir padaryti išvadas, kaip mokiniai įsisavino informaciją apie simetriją.

2.2 Tyrimo rezultatai

Po pirmojo tyrimo etapo buvo akivaizdu, kad mokinių supratimas apie simetriją buvo gana siauras ir paviršutiniškas. Apklausoje mokiniai pateikė tik elementariausius pavyzdžius, kur yra sutinkama simetrija mūsų aplinkoje, ir nors dauguma siejo simetriją su geometrija, bet tik ketvirtadalis sutiko, kad simetrija galėtų padėti sprendžiant algebros uždavinius. Spręsdami šio etapo užduoties praktinius uždavinius, mokiniai retai naudojo simetriją.

Po 45 min. paskaitos apie simetriją, mokinių antrojo tyrimo etapo rezultatai pagerėjo labai ženkliai.

Pavyzdžiui, atsakinėdami į klausimą, kur sutinka simetriją aplinkoje, mokiniai atsakė kur kas išsamiau nei pirmojo tyrimo etapo metu. Buvo pateikta žymiai daugiau ir sudėtingesnių pavyzdžių. Be to, jei pirmojo etapo metu daugiau nei ketvirtadalis mokinių prisipažino niekur nematantys simetrijos, šįkart visi apklausoje dalyvavę mokiniai į šį klausimą atsakė teigiamai ir pateikė pavyzdžių.

Į klausimą, kur mokiniai susiduria su simetrija mokykloje mokomuose dalykuose, kai kurių pasirinktų atsakymų padaugėjo 2 ir daugiau kartų (žr. 3 pav. pateiktą diagramą).

Akivaizdžiai matyti, jog po pamokos apie simetriją mokinių matomumo spektras žymiai praplatėjo. Mokiniams taip pat geriau sekėsi spręsti ir praktinius uždavinius.

Taigi, kaip atskleidė tyrimo rezultatai, mokiniams tereikia padėti pastebėti, pamatyti simetriją. Vos viena pamoka apie simetriją ženkliai pagerino rezultatus.

3 Išvados

Gebėjimas pastebėti ir pasinaudoti simetrijos idėja, sprendžiant įvairius matematikos uždavinius (tame tarpe ir gana sudėtingus olimpiadinius), gerokai palengvina sprendimo procesą ir daugeliu atvejų padaro jį įdomesniu.

Mokiniai nėra pratę įžvelgti simetriją juos supančioje aplinkoje, įvairiuose mokomuosiuose dalykuose ir net pačioje matematikoje (išskyrus tiesmukiškus geometrijos uždavinius). Tačiau atliktas eksperimentas parodė, kad, net truputį praplėtus jų simetrijos supratimą, rezultatai ženkliai pasikeičia. Taigi galimybės naudotis šia natūralia matematine idėja atrodo kur kas platesnės nei šiuo metu paprastai yra panaudojamos.

Literatūra

[1] M. Gardneris. *Matematika laisvalaikiui.* Šviesa, Kaunas, 1989.

[2] P. Tannenbaumas ir R. Arnoldas. *Kelionės į šiuolaikinę matematiką.* TEV, Vilnius, 1995.

[3] P. Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving.* John Wiley & Sons, Inc., 1999.

SUMMARY

Symmetry as tactics of solving mathematical problems

A. Elijio, D. Malijonytė

The article explores symmetry as tactics in solving various mathematical problems. Although in Mathematics curriculum while learning about Geometry, symmetry is taught and simple straightforward exercises are solved, it is argued that the application of symmetry could be much wider. It is especially useful as a strategy in solving non-standard math problems. The article presents examples of the use of such tactics as well as results from the experiment on the use of symmetry at school.

Keywords: symmetry, non-standard problems, problem-solving strategy and tactics.