LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
54 t., 2013, 72–74

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Simplekso metodo rekurenčiųjų formulių taikymo klausimu

Antanas Apynis

Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: antanas.apynis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame straipsnyje apibendrinama tam tikra simplekso metodo (jis taikomas tiesinio programavimo kanoniniam uždaviniui spręsti) rekurenčiųjų formulių (žr., pavyzdžiui, [1]) modifikacija. Taikant modifikuotas formules, kai tikslo funkcijos ir apribojimų sistemos lygčių koeficientai yra sveikieji skaičiai, galima pasiekti, kad nė vienoje iteracijoje pagrindinių skaičiavimų lentelėje nebūtų trupmeninių skaičių. Išsamų modifikuotų formulių išvedimą, grindžiamą tiesinių lygčių sistemos sprendimo Gauso metodu, galima rasti A. Apynio ir S. Stungurienės vadovėlyje „Verslo ir vadybos matematika“ [2].

Raktiniai žodžiai: simplekso metodas, kraštutinis taškas, bazė, rekurenčioji formulė, iteracija, tiesinio programavimo uždavinys.

Tiesinio programavimo kanoninis uždavinys formuluojamas taip:

$$\min\big\{\langle c,x\rangle\colon x\in X\big\},\quad X=\{x\in\mathbb{R}_n\colon Ax=b,\ x\geqslant 0\},\tag{1}$$

čia $c\in\mathbb{R}_n$, $b\in\mathbb{R}_m$, $A=(a_{ij})$, $r(A)=m$, $m<n$.

Pažymėjus matricos A stulpelius a^j, $j=1,2,\dots,n$, lygčių sistemą $Ax=b$ galima užrašyti skaliarinių lygčių sistema

$$\langle a^j,x\rangle=b_i,\quad i=1,2,\dots,m.$$

Leistinosios aibės X kraštutinis taškas nustatomas pagal tokį kriterijų. Tegu $x^0\in\mathbb{R}_n$, $x^0\neq 0$, yra neneigiamas lygties $Ax=b$ sprendinys. Jis yra aibės X kraštutinis taškas tada ir tik tada, kai matricos A stulpelių a^j, atitinkančių teigiamąsias sprendinio x^0 komponentes x^0_j, sistema

$$T\big(x^0\big)=\big\{a^j\colon x^0_j>0\big\}$$

yra tiesiškai nepriklausoma.

Kraštutinio taško x^0, $x^0\in X$, baze (žym. $B(x^0)$) vadinama kiekviena tiesiškai nepriklausoma matricos $A=(a^1,a^2,\dots,a^n)$ m stulpelių sistema, apimanti $T(x^0)$.

Jei $B(x^0)=T(x^0)$, tai kraštutinis taškas x^0 yra vadinamas neišsigimusiu kraštutiniu tašku.

Tegu x^0 yra neišsigimęs leistinosios aibės kraštutinis taškas ir $B(x^0)=\{a^1;a^2;\dots;a^m\}$. Matricą $B=(a^1,a^2,\dots,a^m)$ vadinsime bazės matrica. Likusius matricos A stulpelius vadinsime nebaziniais; jų sistemą žymėsime $D(x^0)$. Tada $D=(a^{j_{m+1}},\dots,a^n)$

bus nebazinių matricos A stulpelių sistema. Taip sugrupavus stulpelius, matricą A galima užrašyti pavidalu $A = (B, D)$.

Indeksų aibę $J = \{1; 2; \ldots; n\}$ suskaidysime į dvi aibes – bazinių indeksų aibę

$$J_B = \{j \in J\colon a^j \in B(x^0)\}$$

ir nebazinių indeksų aibę

$$J_D = \{j \in J\colon a^j \in D(x^0)\} = J \setminus J_B.$$

Pagal šias indeksų aibes vektorius c suskaidomas į c_B ir c_D, o vektorius x – į x_B ir x_D. Jei $J_B = \{1; 2; \ldots; m\}$, tai

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_D \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_D \end{pmatrix}.$$

Be to, neišsigimusio kraštutinio taško x^0 skaidinio komponentės x_B^0 ir x_D^0 tenkina sąlygą: $x_B^0 > 0$ ir $x_D^0 = 0$.

Neišsigimęs kraštutinis taškas x^0, $x^0 \in X$, yra (1) uždavinio sprendinys (optimalus taškas) tada ir tik tada, kai

$$\Delta_D = c_D - (B^{-1}D)^T c_B \geqslant 0.$$

Neoptimalumo atveju pereinama į gretimą kraštutinį tašką, tarkim, x^1, kuriame tikslo funkcijos reikšmė mažesnė negu taške x^0. Simplekso metodas pasižymi tuo, kad atliekant iteraciją vienas bazės $B(x^0)$ vektorius pakeičiamas nebaziniu vektoriumi.

Nebazinio vektoriaus (matricos A stulpelio) pasirinkimo taisyklė paprasta. Vektorių a^j, $j \in J_D$, atitinkanti Δ_D komponentė Δ_j turi būti neigiama. Tegu a^{j_0}, $j_0 \in J_D$, yra pasirinktasis vektorius, o jo koordinatės bazėje $B(x^0) = \{a^1; a^2; \ldots; a^m\}$ yra α_{ij_0}, $i = 1, 2, \ldots, m$. Iteracija atliekama tik tada, kai $\alpha_{ij_0} > 0$ bent vienam $i \in J_B$; priešingu atveju daroma išvada, kad (1) uždavinys sprendinių neturi.

Tada iš bazės $B(x^0)$ pašalinamas vektorius a^{i_0}, tenkinantis tokią sąlygą:

$$\frac{x_{i_0}^0}{\alpha_{i_0 j_0}} = \min\left\{\frac{x_i^0}{\alpha_{ij_0}}\colon i \in J_B,\ \alpha_{ij_0} > 0\right\}.$$

Naujo kraštutinio taško x^1, $x^1 \in X$, bazė yra

$$B(x^1) = \{a^1; \ldots; a^{i_0-1}; a^{j_0}; a^{i_0+1}; \ldots; a^m\}.$$

Bazės matricą pažymėkime B_1. Tegu D_1 yra nebazinių matricos A stulpelių matrica.

Kraštutinio taško x^1 optimalumui tikrinti reikia apskaičiuoti vektorių

$$\Delta_{D_1} = c_{D_1} - (B_1^{-1}D_1)^T c_{B_1} \tag{2}$$

ir patikrinti, ar jis turi neigiamų komponenčių.

Sandaugai $B_1^{-1}D_1$ rasti nebūtina skaičiuoti atvirkštinę matricą B_1^{-1}, nes vektorių a^j, $j \in J_{D_1}$, koordinatėms β_{ij} bazėje $B(x^1)$ apskaičiuoti galima taikyti rekurenčiąsias formules:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha_{ij}\alpha_{i_0 j_0} - \alpha_{ij_0}\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}, & \text{kai } i \neq j_0,\ j \neq i_0, \\ \frac{\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}, & \text{kai } i = j_0,\ j \neq i_0, \end{cases} \tag{3}$$

ir

$$\beta_{ii_0} = \begin{cases} -\frac{\alpha_{ij_0}}{\alpha_{i_0j_0}}, & \text{kai } i \neq j_0, \\ \frac{1}{\alpha_{i_0j_0}}, & \text{kai } i = j_0. \end{cases} \tag{4}$$

Šiose formulėse α_{ij} yra vektorių a^j, $j \in J_{D_1}$, koordinatės bazėje $B(x^0)$.

Pažymėjus $\overline{\beta}_{ij} = \alpha_{i_0j_0}\beta_{ij}$, $i \in J_{B_1}$, $j \in J_{D_1}$, (3) ir (4) formulės bus tokios

$$\overline{\beta}_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}\alpha_{i_0j_0} - \alpha_{ij_0}\alpha_{i_0j}, & \text{kai } i \neq j_0,\ j \neq i_0, \\ \alpha_{i_0j}, & \text{kai } i = j_0,\ j \neq i_0, \end{cases} \tag{5}$$

ir

$$\overline{\beta}_{ii_0} = \begin{cases} -\alpha_{ij_0}, & \text{kai } i \neq j_0, \\ 1, & \text{kai } i = j_0. \end{cases} \tag{6}$$

Šios formulės yra pranašesnės už (3)–(4) formules tuo, kad taikant jas visose iteracijose galima išvengti trupmeninių skaičių (kai vektoriaus c komponentės ir matricos A elementai yra sveikieji skaičiai).

Analogiškai galima pertvarkyti ir rekurenčiąsias formules kraštutinio taško x^1 koordinatėms rasti, ir vektoriaus Δ_{D_1} komponentėms apskaičiuoti.

Esminis dalykas yra tai, kad modifikuotos rekurenčiosios formulės (5)–(6) išvedamos kraštutinio taško x^1 standartinę bazę

$$B(x^1) = \{a^1; \ldots; a^{i_0-1}; a^{j_0}; a^{i_0+1}; \ldots; a^m\}$$

pakeitus modifikuota baze $\overline{B}(x^1)$, kurią sudaro vektoriai

$$\overline{a}^i = \frac{1}{\alpha_{i_0j_0}} a^i, \quad i = 1, \ldots, i_0 - 1, j_0, i_0 + 1, \ldots, m.$$

Skaičiai $\overline{\beta}_{ij}$, $i \in J_{B_1}$, $j \in J_{D_1}$, yra vektorių a^j, $j \in J_{D_1}$, koordinatės modifikuotoje bazėje $\overline{B}(x^1)$.

Taikant modifikuotas rekurenčiąsias formules techninių skaičiavimo sunkumų atsiranda tik apskaičiuojant optimaliojo taško koordinates. Bet jie yra nepalyginamai mažesni už tuos, kurie lydi simplekso lentelių pildymą taikant standartines (3)–(4) rekurenčiąsias formules.

Literatūra

[1] A. Apynis. *Optimizavimo metodai.* Vilniaus universiteto leidykla, Vilnius, 2005.

[2] A. Apynis ir S. Stungurienė. *Verslo ir vadybos matematika.* UAB „Ciklonas“, Vilnius, 2012.

SUMMARY

On application of recurrence formulas of simplex method

A. Apynis

The article analyses a possibility to simplify calculations by using modified recurrence formulas of simplex method for solving problems of linear programming.

Keywords: linear programming, simplex method, recurence formulas.