LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
54 tomas, 2013, 146–150

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Eilučių propedeutika mokykloje

Juozas Juvencijus Mačys, Jurgis Sušinskas

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
E. paštas: juozas.macys@mii.vu.lt, jurgis.susinskas@mii.vu.lt

Santrauka. Skaičiaus π ir skaičiaus e eilučių pavyzdžiais demonstruojama, kad mokykloje eilutes galima traktuoti kaip mnemonines taisykles arba kaip dvigubųjų nelygybių sistemas. Pateikiama teorinių žinių apie minėtas konstantas, paliečiami jų istorijos klausimai.

Raktiniai žodžiai: skaičius π, skaičius e, eilutė, mnemoninė taisyklė, dviguboji nelygybė.

> Propedeutika [graik. propaideuō – „iš anksto apmokau“] – parengiamasis mokymas; mokslo įvadas, glausta įvadinė kurios nors temos apžvalga.
>
> Iš tarptautinių žodžių žodynų

1 Skaičius $\pi = 3{,}14159\ldots$

Mokinys nuo pradinių klasių žino, kad π (pi) – tai apskritimo ilgio C ir jo skersmens santykis: $\pi = \frac{C}{2R}$, kur R apskritimo spindulys. Jau pats π apibrėžimas padeda bent apytikriai nustatyti, kam jis lygus: užtenka paimti kuo didesnį ritinio formos daiktą, išmatuoti jo skersmenį, tada apjuosti ritinį siūlu, išmatuoti jo ilgį ir apskaičiuoti siūlo ilgio ir skersmens santykį. Nors taip randamos reikšmės tikslumas nedidelis, bet jau babiloniečiai žinojo artinį $\pi \approx \frac{25}{8}$ $(= 3{,}125)$.

Teorinį būdą nustatyti π reikšmę bet kuriuo tikslumu išrado senovės graikų mokslininkas Archimedas (287–212 m.pr.m.e.): užtenka apskaičiuoti į vienetinio skersmens apskritimą įbrėžtų ir apie jį apibrėžtų taisyklingųjų daugiakampių perimetrus, kai kraštinių skaičius dvigubinamas. Šis būdas buvo vartojamas iki pat eilučių teorijos atsiradimo, t. y. net du tūkstantmečius. Beje, tobulėjant skaičiavimų menui, π reikšmė skaičiuojant šiuo būdu viduramžiais pasiekė net 38 ženklų po kablelio tikslumą.

Šiame pranešime pagrindinį dėmesį skirsime formulėms, pagal kurias π galima apytiksliai apskaičiuoti turint tik paprasčiausią skaičiuoklį, atliekantį aritmetikos veiksmus (taigi iš principo – net skaičiuoklio neturint).

Parašykime formulę

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots - \frac{4}{4n-1} + \frac{4}{4n+1} - \frac{4}{4n+3} + \cdots . \tag{1}$$

Tokiai „begalinei sumai“ (nors niekas negali sudėti be galo daug skaičių) įmanoma suteikti griežtą prasmę, remiantis ribos ir eilutės sąvokomis. Bet mokykloje sužinomi tik pagrindiniai (matematinės) analizės faktai, ir norėtųsi apsieiti be minėtų sąvokų.

Pasirodo, kad į (1) formulę galima žiūrėti kaip į mnemoninę (atsiminti padedančią) taisyklę: visiškai aišku, kaip paeiliui parašomi nauji dėmenys, ir kuo daugiau dėmenų imsime, tuo tikslesnę gausime π reikšmę. Jei paeiliui imsime 1, 2, 3 ir t. t. dėmenis, tai gausime seką

$$\pi_1 = 4, \quad \pi_2 = \frac{8}{3} = 2{,}66\ldots, \quad \pi_3 = \frac{52}{15} = 3{,}46\ldots, \quad \pi_4 = \frac{304}{105} = 2{,}89\ldots,$$
$$\pi_5 = 3{,}33\ldots, \quad \pi_6 = 2{,}97\ldots, \quad \pi_7 = 3{,}28\ldots, \quad \pi_8 = 3{,}01\ldots, \quad \ldots.$$

Nelyginiai jos nariai, 1-as, 3-as, 5-as, … ir t. t., duoda vis tikslesnes reikšmes su pertekliumi, o nelyginiai, 2-as, 4-as, 6-as ir t. t., – vis tikslesnes π reikšmes su trūkumu. Visas tas reikšmes suveskime į 1 lentelę (žr. sekantį psl.). Iš lentelės matome, kad artiniai π_n lėtai artėja prie π reikšmės, užtat jų aritmetiniai vidurkiai $\tilde{\pi}_n = (\pi_n + \pi_{n+1})/2$ labai greitai pasiekia 2 teisingus ženklus po kablelio. Yra ir dar geresnių būdų pagreitinti π_n artėjimą prie π (žr. straipsnį [1] šiame leidinyje).

Taigi skaičių π galima apibrėžti taip:

Vienintelį skaičių x, su kiekvienu $n \in \boldsymbol{N}$ tenkinantį visas nelygybes

$$\begin{aligned}
&4\left(1 - \frac{1}{3}\right) < x < 4,\\
&4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) < x < 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right),\\
&4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) < x < 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right),\\
&\quad\vdots\\
&4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1}\right) < x < 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4n-3}\right),
\end{aligned}$$

vadiname π.

Žinoma, šį apibrėžimą galima užrašyti dar trumpiau:

Skaičių x, su kiekvienu natūraliuoju n tenkinantį nelygybę

$$4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1}\right) < x < 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{4n-3}\right), \quad (2)$$

vadiname skaičiumi π.

Suvokti, kodėl toks skaičius vienintelis, nesunku. (2) nelygybė reiškia, kad x patenka į ilgio $\frac{1}{4n-1}$ intervalą, o tie intervalai yra vienas kitame, ir jų ilgis artėja prie 0.

Baigdami skyrelį, paaiškinsime, kaip gimsta (1) formulė. Žinoma, tai ne įrodymas, nors kiekvieną žingsnį galima ir pagrįsti.

Kadangi arktangentas – tai kampas, kurio tangentas lygus x, tai

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x.$$

Diferencijuokime šią lygybę remdamiesi sudėtinės funkcijos išvestinės taisykle ir prisiminkime nykstamosios geometrinės progresijos sumą bei tangento išvestinę $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$:

$$1 = \left[1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)\right](\operatorname{arctg} x)' = (1 + x^2)(\operatorname{arctg} x)',$$

1 lentelė. Eilutės (1) dalinės sumos π_n ir vidurkiai $\tilde{\pi}_n = (\pi_n + \pi_{n+1})/2$.

n	π_n		$\tilde{\pi}_n$	
1	4.		3.3333333	
2		2.6666667		3.0666667
3	3.4666667		3.1809524	
4		2.8952381		3.1174603
5	3.3396825		3.1578644	
6		2.9760462		3.1298923
7	3.2837385		3.1504052	
8		3.0170718		3.1347189
9	3.2523659		3.1471028	
10		3.0418396		3.1370777
11	3.2323158		3.1453593	
12		3.0584028		3.1384028
13	3.2184028		3.1443287	
14		3.0702546		3.1392201
15	3.2081857		3.1436695	
16		3.0791534		3.1397595
17	3.2003655		3.1432227	
18		3.0860798		3.1401339
19	3.1941879		3.1429059	
20		3.0916238		3.1404043
21	3.1891848		3.1426732	
22		3.0961615		3.1406060
23	3.1850504		3.1424972	
24		3.0999440		3.1407604
25	3.1815767		3.1423610	
26		3.1031453		3.1408812
27	3.1786170		3.1422534	
28		3.1058897		3.1409775
29	3.1760652		3.1421669	
30		3.1082686		3.1410555
31	3.1738423		3.1420963	
32		3.1103503		3.1411195
33	3.1718887		3.1420380	
34		3.1121872		3.1411727
35	3.1701583		3.1419892	
36		3.1138202		3.1412175
37	3.1686147		3.1419481	
38		3.1152814		3.1412554
39	3.1672295		3.1419130	
40		3.1165966		3.1412879
41	3.1659793		3.1418829	
42		3.1177865		3.1413159
43	3.1648453		3.1418568	
44		3.1188683		3.1413402
45	3.1638121		3.1418341	
46		3.1198561		3.1413615
47	3.1628668		3.1418142	
48		3.1207616		3.1413801
49	3.1619987		3.1417967	
50		3.1215947		3.1413966

todėl

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots .$$

Jų pirmykštės gali skirtis tik konstanta,

$$\operatorname{arctg} x + C = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots .$$

Paėmę $x = 0$, nustatome, kad $C = 0$, taigi

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots .$$

Įstatę čia $x = 1$ ir padauginę abi puses iš 4, gauname (1) formulę.

2 Skaičius $e = 2{,}71828\ldots$

Skaičius e matematikoje atsirado jau daug vėliau, XVII amžiuje. Pasakodami jo atsiradimo istoriją, remsimės interneto enciklopedija *Wikipedia*.

Šveicarų matematikas Jakobas Bernulis (Jacob Bernoulli, 1654–1705) šią konstantą atrado tirdamas tokį klausimą apie sudėtinius procentus. Bankas už kiekvieną indėlio dolerį moka 100% palūkanų į metus. Jeigu palūkanos apskaičiuojamos vieną kartą metams baigiantis, kiekvienas įdėtas doleris užauga iki \$ 2. Kas atsitiktų, jeigu palūkanos būtų priskaičiuojamos ne vieną kartą per metus, o dažniau?

Jeigu palūkanos būtų apskaičiuojamos du kartus į metus, tai palūkanos už kiekvienus 6 mėnesius būtų 50%, taigi pradinis \$1 būtų dauginamas iš 1,5 dukart ir virstų $\$1{,}5^2 = \$2{,}25$ metų gale. Jei palūkanos būtų apskaičiuojamos 4 kartus per metus, tai indėlio doleris taptų $\$1{,}25^4 = \$2,4414\ldots$, o jeigu 12 kartų į metus, tai $\$(1 + \frac{1}{12})^{12} = \$2{,}692597\ldots$. Taigi jei palūkanos būtų apskaičiuojamas n kartų į metus, tai kaskart palūkanos būtų $\frac{100}{n}$ procentų, o per metus doleris virstų $\$(1+\frac{1}{n})^n$.

Ši seka didėja, kai n didėja. Skaičiuojant palūkanas kas savaitę ($n = 52$) doleris virstų \$2,692597..., o skaičiuojant kas dieną ($n = 365$) – virstų \$2,714567.... Kai n didėja be galo ($n \to \infty$), tai galutinė suma artėja prie tam tikro skaičiaus, kurį vadiname e; sakoma, kad tolydžiai skaičiuojant palūkanas, galutinė suma pasiektų e dolerių (t. y. \$2,7182818...). Taigi indėlio pradinis \$1, esant metinei palūkanų normai R ir skaičiuojant palūkanas tolydžiai, po t metų virstų $\$e^{Rt}$. (Pavyzdžiui, kai metinės palūkanos yra 5%, tai $R = \frac{5}{100} = 0{,}05$.)

Beje, matematikoje (kaip ir visur) dažnai atradimas priskiriamas ne žmogui, padariusiam jį pirmąkart. Pavyzdžiui, skaičiumi e puikiausiai naudojosi logaritmų išradėjas škotų matematikas Džonas Neperis (John Napier, 1550–1617). Žymenį e šiai konstantai vėliau priskyrė garsusis šveicarų matematikas Leonardas Oileris (Leonhard Euler, 1707–1753).

Skaičių e mokykloje galima traktuoti panašiai kaip ir skaičių π. Nuosekliai apgalvoti žingsnius paliekame skaitytojui, o praleistus teiginių įrodymus galima rasti vadovėliuose [2, 3, 4].

Prie to paties skaičiaus (jau mažėdama) artėja ir seka

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2, \left(1+\frac{1}{2}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ldots .$$

Taigi skaičių e galima apibrėžti taip:

Skaičių x, tenkinantį nelygybę

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

su kiekvienu n, vadiname skaičiumi e.

Bet dar svarbiau, kad prie skaičiaus e artėja seka

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

o patį skaičių e galima apibrėžti taip.

Skaičių x, tenkinantį nelygybę

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < x < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!} \tag{3}$$

su kiekvienu n, vadiname skaičiumi e.

(3) nelygybė labai tiksli – pavyzdžiui, jau paėmę $n = 5$, randame e reikšmę 3 ženklų po kablelio tikslumu.

Beje, remiantis (3) nelygybe nesunku įrodyti, kad e yra iracionalus. Tarkime priešingai, kad e yra racionalus, t. y. $e = \frac{p}{q}$ ($p \in \boldsymbol{N}$, $q \in \boldsymbol{N}$). Kadangi, nelygybė teisinga su visais $n \in \boldsymbol{N}$, tai ji teisinga ir su $n = q$:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q \cdot q!}. \tag{4}$$

Padauginkime (4) nelygybę iš $q! \cdot q$:

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) q \cdot q! < p \cdot q! < \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) q \cdot q! + 1. \tag{5}$$

Kairėje turime sveikąjį skaičių, dešinėje – vienetu didesnį skaičių. Taigi sveikasis skaičius $p \cdot q!$ atsidūrė tarp dviejų gretimų sveikųjų skaičių. Prieštara.

Literatūra

[1] G. Fichtengolcas. *Matematinės analizės pagrindai.* I, II. Mintis, Vilnius, 1967.

[2] J.J. Mačys. Madhavos formulės. *Liet. mat. rink. LMD darbai, ser. B*, **54**:140–145, 2013.

[3] N.J. Vilenkin i dr. *Algebra i načala analiza dlia* 10 (11) *klassa.* Prosveščenije, Moskva, 1992 (1988).

[4] N. Vilenkinas ir kt. *Algebra ir matematinė analizė* X–XI *klasei.* Šviesa, Kaunas, 1987.

SUMMARY

Propedeutics of series in a school

J.J. Mačys, J. Sušinskas

By examples of series for number π and number e we demonstrate that in a school one can to interpret series as mnemonic rules or as systems of double inequalities.

Keywords: number pi, number e, series, mnemonic rule, double inequality.