Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
55 t., 2014, 96–99

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Paviršiaus kreivių glaustiniai paviršiai

Kazimieras Navickis

Vilniaus universitetas, matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjama trimatės Euklido erdvės paviršių vidinė diferencialinė geometrija, analizuojant jų kreivių kontaktą su aukštesniųjų eilių glaustiniais algebriniais paviršiais. Glaustinių paviršių panaudojimas leidžia analizuoti paviršiaus ir jo kreivių vidines savybes, kurios priklauso nuo aukštesniųjų eilių išvestinių [1].

Raktiniai žodžiai: paviršius, glaustinė sfera, glaustinis paviršius.

1. Tarkime, kad trimatės Euklido erdvės E_3 paviršiaus

$$S : \vec{r} = \vec{r}(u^i) \quad (i, j, \ldots = 1, 2)$$

kreivė γ apibrėžta vidinėmis parametrinėmis lygtimis $u^i = u^i(t)$. Jei $\{\vec{e}_\alpha\}$ yra standartinė ortonormuotoji erdvės E_3 bazė, tai

$$S : \vec{r} = x^\alpha(u^i) \cdot \vec{e}_\alpha \quad (\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3).$$

Išilgai kreivės γ galioja lygybė $\vec{r} = \vec{r}(u^i(t))$. Pažymėkime

$$\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}, \quad \vec{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}, \quad \ldots, \quad \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}, \quad \vec{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}, \quad \ldots.$$

Remiantis Gauso ir Petersono–Kodaci–Mainardi lygtimis [2]

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij} \cdot \vec{r}_k + A_{ij} \cdot \vec{n}, \qquad \vec{n}_i = A^j_i \cdot \vec{r}_j,$$

čia Γ^k_{ij} – Kristofelio antrosios rūšies simboliai, A_{ij} – paviršiaus S antrosios kvadratinės formos koeficientai,

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{W}, \qquad W = \sqrt{g}, \qquad g = \det(g_{ij}), \qquad g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j, \qquad \vec{n}_i = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i}.$$

Pažymėkime

$$u^i_p = \frac{d^p u^i}{dt^p}, \qquad \vec{a}_p = \vec{r}^{(p)} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Tada

$$\vec{a}_1 = u^i_1 \cdot \vec{r}_i, \quad \vec{a}_2 = \Gamma^i_2 \cdot \vec{r}_i + B_2 \cdot \vec{n}, \quad \vec{a}_3 = \Gamma^i_3 \cdot \vec{r}_i + B_3 \cdot \vec{n}, \quad \ldots, \quad \vec{a}_p = \Gamma^i_p \cdot \vec{r}_i + B_p \cdot \vec{n},$$

čia

$$\Gamma_2^i = u_2^i + \Gamma_{jk}^i \cdot u_1^j \cdot u_1^k, \qquad B_2 = A_{ij} \cdot u_1^i \cdot u_1^j,$$
$$\Gamma_3^i = \frac{d\Gamma_2^i}{dt} + \left(\frac{\partial \Gamma_2^i}{\partial u^j} + \Gamma_2^k \cdot \Gamma_{kj}^i\right) \cdot u_1^j + B_2 \cdot A_1^i, \qquad B_3 = \frac{dB_2}{dt} + \left(\frac{\partial B_2}{\partial u^i} + \Gamma_2^i \cdot A_{ji}\right) \cdot u_1^i,$$
$$\ldots$$
$$\Gamma_p^i = \frac{d\Gamma_{p-1}^i}{dt} + \left(\frac{\partial \Gamma_{p-1}^i}{\partial u^j} + \Gamma_p^k \cdot \Gamma_{kj}^i\right) \cdot u_1^j + B_{p-1} \cdot A_1^i,$$
$$B_p = \frac{dB_{p-1}}{dt} + \left(\frac{\partial B_{p-1}}{\partial u^i} + \Gamma_{p-1}^i \cdot A_{ji}\right) \cdot u_1^i.$$

Kreivės γ vienetinis liestinės vektorius taške $M(u^i(t)) \in \gamma \subset S$

$$\vec{\tau}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{u_1^i \cdot \vec{r}_i}{\sqrt{g_{ij} \cdot u_1^i \cdot u_1^j}}.$$

Pažymėkime

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{g} \cdot \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix},$$
$$A^k = -\sqrt{g} \cdot B_2 \cdot g^{ki} \cdot \sigma_{ij} \cdot u_1^i, \qquad \tilde{B} = \sqrt{g} \cdot \sigma_{ij} \cdot u_1^i \cdot \Gamma_2^j,$$
$$h^k = \sqrt{g} \cdot \tilde{B} \cdot g^{kj} \cdot \sigma_{ij} \cdot u_1^i, \qquad \tilde{h} = \sqrt{g} \cdot \sigma_{ij} \cdot A^i \cdot u_1^j.$$

Kreivės γ binormalės ir pagrindinės normalės vienetiniai vektoriai

$$\vec{\tau}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{A^i \cdot \vec{r}_i + \tilde{B} \cdot \vec{n}}{\sqrt{g_{ij} \cdot A^i \cdot A^j + \tilde{B}^2}}, \qquad \vec{\tau}_2 = \frac{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \times \vec{a}_1}{|(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \times \vec{a}_1|} = \frac{h^i \cdot \vec{r}_i + \tilde{h} \cdot \vec{n}}{\sqrt{g_{ij} \cdot h^i \cdot h^j + \tilde{h}^2}}.$$

Šios kreivė kreivumas k ir sukinys κ taške M:

$$k = \frac{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|^3} = \frac{\sqrt{g_{ij} \cdot A^i \cdot A^j + \tilde{B}^2}}{(g_{ij} \cdot u_1^i \cdot u_1^j)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \kappa = \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)}{(|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|)^2} = \frac{g_{ij} \cdot A^i \cdot \Gamma_3^j + \tilde{B} \cdot B_3}{g_{ij} \cdot A^i \cdot A^j + \tilde{B}^2}.$$

Kreivės γ glaustinės sferos $OS_M(\gamma)$ centro $C(x_C^\alpha)$ radiusas-vektorius

$$\vec{r}_C = \vec{r}\big(u^i(t)\big) + \frac{1}{k} \cdot \vec{\tau}_2 - \frac{k'}{k^2 \cdot \kappa \cdot |\vec{a}_1|} \cdot \vec{\tau}_3.$$

Jos spindulys R randamas iš lygybės

$$R^2 = \frac{1}{k^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{k'}{k \cdot \kappa \cdot |\vec{a}_1|}\right)^2\right].$$

Šiame darbe įrodoma tokia teorema.

1 teorema. *Glaustinę sferą $OS_M(\gamma)$ apibrėžia lygtis $OS_M(\gamma)$: $f=0$, kurioje*

$$f = \det\big[U-V, V^{(1)}, V^{(2)}, V^{(3)}\big]$$

ir

$$U^t = \big[(X^1)^2+(X^2)^2+(X^3)^2, X^1, X^2, X^3\big], \qquad V^t = \big[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2, x^1, x^2, x^3\big]$$

– matricos-eilutės, (X^α) – kintamas glaustinės sferos $OS_M(\gamma)$ taškas, (x^α) – kreivės γ taškas.

Paviršiaus $S : \vec{r} = \vec{r}(u^i)$ kreivės $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(u^i(t))$ k-osios eilės glaustinį paviršių $OS_M^{(k)}(\gamma)$ apibrėšime lygtimi $OS_M^{(k)}(\gamma) : f = 0$, kurioje

$$\begin{gathered}
f = \det\big[U-V, V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(N_k)}\big],\\
U^t = [U_k, U_{k-1}, \dots, U_1], \qquad V^t = [V_k, V_{k-1}, \dots, V_1],\\
U_m^t = \big[(X^1)^p \cdot (X^2)^q \cdot (X^3)^r\big], \qquad V_m^t = \big[(x^1)^p \cdot (x^2)^q \cdot (x^3)^r\big],\\
p+q+r=m, \quad m=1,2,\dots,k, \quad N_k = \frac{1}{6}\cdot k\cdot\big(k^2+6\cdot k+11\big).
\end{gathered}$$

Glaustinis k-osios eilės paviršius $OS_M^{(k)}(\gamma)$ su kreive γ jos taške M turi ne mažesnės kaip N_k eilės lietimąsi.

2. Tarkime, kad trimatės Euklido erdvės E_3 paviršius S apibrėžtas išreikštine lygtimi $S : x^3 = f^3(x^1, x^2)$. Šio paviršiaus kreivės γ lygtis:

$$\gamma : \vec{r} = \big\{x^1(t); x^2(t); f^3(x^1(t), x^2(t)\big\}.$$

Išvestinių $x^{(p)i} = \frac{d^p x^i}{dt^p}$ $(i, j, \ldots = 1, 2,\ p = 1, 2, \ldots)$ pagalba apibrėšime diferencialinį operatorių

$$\partial^\# = x^{(1)i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{p\ge 1} x^{(p+1)i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^{(p)i}}.$$

Diferencialinis operatorius $\partial^\#$ leidžia nagrinėti aukštesniųjų eilių diferencialinius operatorius

$$D^{(m)} = \underbrace{\partial^\# \circ \cdots \circ \partial^\#}_{m}.$$

Išilgai kreivės γ teisinga lygybė

$$\vec{a}_m = \vec{r}^{(m)} = x^{(m)i}\cdot\vec{e}_i + D^{(m)} f^3 \cdot \vec{e}_3 = a_m^\alpha \cdot \vec{e}_\alpha.$$

Kreivės γ liestinės vienetinis vektorius

$$\vec{\tau}_1 = \frac{a_1^\alpha \cdot \vec{e}_\alpha}{\sqrt{\delta_{\alpha\beta}\cdot a_1^\beta \cdot a_1^\beta}}.$$

Pažymėkime

$$e_{\alpha\beta}^\gamma = \begin{vmatrix} \delta_1^\gamma & \delta_2^\gamma & \delta_3^\gamma \\ \delta_\alpha^1 & \delta_\alpha^2 & \delta_\alpha^3 \\ \delta_\beta^1 & \delta_\beta^2 & \delta_\beta^3 \end{vmatrix}, \qquad b^\gamma = e_{\alpha\beta}^\gamma \cdot a_1^\alpha \cdot a_2^\beta, \qquad c^\alpha = e_{\beta\gamma}^\alpha \cdot b^\beta \cdot a_1^\gamma.$$

Kreivės γ binormalės ir pagrindinės normalės vienetiniai vektoriai

$$\vec{\tau}_2 = \frac{b^\alpha \cdot \vec{e}_\alpha}{\sqrt{\delta_{\alpha\beta} \cdot b^\alpha \cdot b^\beta}}, \qquad \vec{\tau}_3 = \frac{c^\alpha \cdot \vec{e}_\alpha}{\sqrt{\delta_{\alpha\beta} \cdot c^\alpha \cdot c^\beta}}.$$

Kreivės γ kreivumo ir sukinio

$$k = \frac{\sqrt{\delta_{\alpha\beta} \cdot b^\alpha \cdot b^\beta}}{(\delta_{\alpha\phi} \cdot a_1^\alpha \cdot a_1^\beta)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \kappa = \frac{\delta_{\alpha\beta} \cdot b^\alpha \cdot a_3^\beta}{\delta_{\alpha\beta} \cdot b^\alpha \cdot b^\beta}$$

reikšmės taške $M \in \gamma \subset S$ leidžia užrašyti kreivės γ glaustinės sferos lygtį. Norimos eilės glaustinių paviršių lygtys aptariamu atveju panašios į atitinkamas lygtis, aptartas anksčiau.

3. Tarkime, kad trimatės Euklido erdvės E_3 paviršius S apibrėžtas neišreikštine lygtimi

$$S : F\bigl(x^1, x^2, x^3\bigr) = 0$$

ir taškas $M \in S$ yra toks. kad dalinės išvestinės $F_3 = \frac{\partial F}{\partial x^3}$ reikšmė taške M nelygi nuliui. Taško M tam tikroje aplinkoje paviršius S aprašomas lygtimi $S : x^3 = f^3(x^1, x^2)$; be to, funkcijos $f^3(x^1, x^2)$ dalinės išvestinės $f_i^3 = \frac{\partial f^3}{\partial x^i}$ išreiškiamos funkcijos F dalinėmis išvestinėmis $F_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}$ šitaip:

$$f_i^3 = -\frac{F_i}{F_3} \quad (i, j, \ldots = 1, 2).$$

Paviršiaus S kreivę γ galima apibrėžti vidinėmis lygtimis $x^i = x^i(t)$. Tokiu atveju kreivės γ vektorinė lygtis standartinės ortonormuotos bazės $\{\vec{e}_\alpha\}$ atžvilgiu:

$$\gamma : \vec{r} = x^i(t) \cdot \vec{e}_i + f^3(x^i(t)) \cdot \vec{e}_3.$$

Išvestinės $\vec{a}_p = \vec{r}^{(p)}(t)$ apskaičiuojamos diferencialinių operatorių $D^{(p)}$ pagalba:

$$\vec{a}_p = x^{(p)i} \cdot \vec{e}_i + D^{(p)} f^3 \cdot \vec{e}_3 = a_p^\alpha \cdot \vec{e}_\alpha \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Kreivės γ taškui $M \in \gamma \subset S$ galime priskirti glaustinę sferą ir norimos eilės glaustinius paviršius pagal anksčiau pateiktas formules.

Literatūra

[1] W. Blaschke. *Affine Differentiakgeometrie*. Berlin, 1923.

[2] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewod Cliffs, NJ, 1976.

SUMMARY

Osculating surfaces of curves on surfaces

K. Navickis

Oosculating sphere have been studied in classical differential geometry [1]. In this article the osculating surfaces of higher order of space curves on surfaces in Euclidean space is considered. We study the intrinsic differential geometry of curves on surfaces by analyzing their contact with surfaces of higher order.

Keywords: surface, osculating sphere, osculating surface.