Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
55 t., 2014, 117–120

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Realiųjų skaičių aksiomatika ir matematinės analizės dėstymo pradžia

Gintaras Puriuškis

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko g. 24, LT-2600 Vilnius
E. paštas: gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

Santrauka. Straipsnyje apžvelgiami realiųjų skaičių apibrėžimai. Iškeliamas aksiominio apibrėžimo korektiškumo klausimas. Pateikiami aibių pavyzdžiai, kurie atitinka kai kuriuos realiųjų skaičių apibrėžimus, tačiau nesutampa su mums įprasta realiųjų skaičių aibe. Atkreipiamas dėmesys į matematinės analizės dėstymo pradžią ir teiginių įrodymo formalumus.

Raktiniai žodžiai: realieji skaičiai, Dedekindo pjūvis, įrodymas.

1 Įvadas

Dauguma matematinės analizės vadovėlių ir matematinės analizės programų prasideda nuo realiųjų skaičių dėstymo. G.M. Fichtengolcas [1] ir W. Rudin [6] dėsto istoriškai susiformavusią realiųjų skaičių aksiomatiką, kur racionalus skaičius apibrėžiamas kaip p/q, kur $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, o iracionalieji skaičiai apibrėžiami Dedekindo pjūviais. Kai kurie vadovėliai (pvz. [2, 5]) realiuosius skaičius apibrėžia kaip begalinių dešimtainių trupmenų aibę. Kai kuriuose vadovėliuose (pvz. [2, 3]) yra duotas aksiominis realiųjų skaičių apibrėžimas. Galima ir visai nedėstyti realiųjų skaičių aksiomatikos. Pvz., E. Misevičius [4] nepateikia net realiųjų skaičių apibrėžimo. Tai yra gana protingas sprendimas, kadangi kiekvienas pirmo kurso studentas intuityviai supranta realaus skaičiaus sąvoką, todėl ją galima laikyti pirmine sąvoka, realiųjų skaičių savybes (pvz., $a+b=b+a$) galima laikyti aksiomomis.

Šio straipsnio tikslai yra du. Pirmas, paaiškinti, kad V. Kabailos vadovėlyje pateiktas aksiominis realiųjų skaičių apibrėžimas yra neteisingas ir nepritaikomas matematinės analizės teorijoje, taip pat nurodyti kitus aksiominių apibrėžimų trūkumus. Tai bus padaryta antrame skyriuje. Antras tikslas yra atkreipti analizės (ir ne tik) dėstytojų dėmesį į matematikos teorijų konstravimo principus ir į įrodymus, atsižvelgiant į vidurinės mokyklos mokymo specifiką.

2 Pavyzdžiai

Aksiominis apibrėžimas yra formuluojamas taip: realiaisiais skaičiais vadinsime bet kokią aibę A, jei yra apibrėžtos dvi funkcijos $f : A\times A \to A$ ir $g : A\times A \to A$, vadinamos sudėtimi ir daugyba, ir yra tenkinamos išvardintos sudėties, daugybos, tvarkos (palyginimo) bei pilnumo savybes (dar turi būti tenkinamas ir Archimedo principas, išskyrus V. Kabailos vadovėlį [3], čia Archimedo principas yra įrodinėjamas). Pilno apibrėžimo čia nepateiksime, kadangi jis yra didelės apimties, užima pusantro puslapio, apibrėžimą galite rasti vadovėliuose [2, 3, 5].

Perskaičius aksiominį realiųjų skaičių apibrėžimą pirmiausia kyla klausimas, ar realieji skaičiai gali būti ne skaičiai, o kokie nors kitokie objektai, kadangi apibrėžime aibė A yra bet kokia, nebūtinai skaičiai (vadovėlyje [2] tai yra netgi akcentuojama). Antras klausimas yra korektiškumo klausimas: ar realiųjų skaičių aibė yra vienintelė. Algebroje žiedai ar grupės yra apibrėžiami kaip aibės, tenkinančios tam tikras savybes. Žinome, kad žiedų ir grupių yra be galo daug. Todėl galima būtų numanyti, kad pagal aksiominį apibrėžimą realiųjų skaičių aibių irgi yra be galo daug. Pateiksime keletą pavyzdžių, kurie atitinka V. Kabailos vadovėlyje pateiktą aksiominį apibrėžimą, tačiau nesutampa su mums įprasta aibe $\mathbb{R}$.

Pirmiausia pastebėsime, kad realiųjų skaičių aibė negali būti tuščia aibe, kadangi joje egzistuoja nulinis elementas.

Pirmas pavyzdys, kai $A = \{a\}$ yra sudaryta iš vienintelio elemento a, nebūtinai skaičiaus. Sudėtį ir daugybą apibrėšime taip:

$$f(a,a) = g(a,a) = a.$$

Taip apibrėžus aibę A ir funkcijas f, g yra tenkinamos visos apibrėžimo sąlygos, taigi $A = \{a\}$ yra realiųjų skaičių aibė. Čia nulinį ir vienetinį elementus atitinka tas pats a. Pagal apibrėžimą nulinis ir vienetinis elementai nebūtinai yra skirtingi. Pastebėsime, kad bet kokia baigtinė aibė, turinti n elementų, tenkinančių tvarkos savybę $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, tenkina ir pilnumo savybę.

Aibės, sudarytos iš dviejų elementų ir tenkinančios visas savybes tikriausiai neegzistuoja, kadangi nenuliniam elementui dar turi egzistuoti jam priešingas trečias elementas. Norint tai įrodyti pakanka perrinkti visas įmanomas funkcijas f ir g (tokių funkcijų yra baigtinis skaičius, jei A yra baigtinė), tačiau tai nėra šio straipsnio tikslas.

Antras pavyzdys, kai $A = \{-1, 0, 1\}$ yra sudaryta iš trijų elementų. Sudėtį ir daugybą apibrėšime taip:

$$\begin{gathered} f(a,0) = a + 0 = a, \qquad f(1,1) = 1 + 1 = 1, \\ f(-1,-1) = -1 + (-1) = -1, \qquad f(1,-1) = 0, \\ f(a,b) = f(b,a), \qquad g(a,0) = a \cdot 0 = 0, \qquad g(a,1) = a, \\ g(-1,-1) = 1, \qquad g(a,b) = g(b,a) \end{gathered}$$

$\forall a, b \in A$. Tarsime, kaip įprasta, kad $-1 \leqslant 0 \leqslant 1$. Tada nulinis elementas yra 0, o vienetinis yra 1. 1 ir -1 yra atvirkštiniai patys sau. Nesunku patikrinti, kad visos V. Kabailos pateikto apibrėžimo savybės yra tenkinamos. Šis pavyzdys būtų netinkamas, jei V. Kabailos pateikto apibrėžimo tvarkos savybėse nelygybės būtų griežtos. Vadovėlyje [2] šios nelygybės yra griežtos.

Dar vienas, trečias pavyzdys yra žinomas, kai A yra atviras intervalas $(-l, l)$, $l > 0$, tačiau šio pavyzdžio detaliai nebenagrinėsime. Šis pavyzdys tenkina ne tik V. Kabailos, bet ir vadovėlių [2, 5] aksiominius apibrėžimus.

Vienintelis vadovėlis [2] iškelia korektiškumo klausimą: kiek gi tokių aibių egzistuoja. Ir atsako, kad tam tikra prasme vienintelė: įrodo, kad visos aibės, tenkinančios vadovėlio [2] apibrėžimą, yra izomorfiškos palyginimo, sudėties ir daugybos atžvilgiu.

Izomorfizmo apibrėžimą žr. [2, 502 psl.]. Atkreipsime dėmesį, kad pirmas ir antras pavyzdžiai netenkina vadovėlio [2] apibrėžimo, kadangi jokia baigtinė aibė negali tenkinti Archimedo principo. Tuo tarpu trečias pavyzdys tinka, intervalai $(-l, l)$ ir $(-\infty, \infty)$ yra izomorfiški palyginimo, sudėties ir daugybos atžvilgiu.

Antras pavyzdys parodo, kad V. Kabailos pateiktas apibrėžimas yra nepritaikomas tolimesnei matematinės analizės teorijai, kadangi nėra prasmės dėstyti ribų teorijos, kai realiųjų skaičių aibę sudaro baigtinis skaičius elementų, t. y. joje nėra nė vieno ribinio elemento. Ribos apibrėžimas paprasčiausiai neturi prasmės tokioje aibėje.

Trečias pavyzdys parodo, kad ir korektiškas apibrėžimas vadovėlyje [2] yra sunkiai pritaikomas praktiškai dėstant matematinę analizę, kadangi yra iškreipiamos sveikųjų, racionaliųjų ir iracionaliųjų skaičių sąvokos. Pvz., natūriniai ir aplamai racionalūs skaičiai iš intervalo $(-\infty, \infty)$ izomorfiškai yra atvaizduojami į intervalo $(-l, l)$ skaičius, kurie nebūtinai turi pavidalą p/q. Taigi, reikėtų iš naujo apibrėžti ir paaiškinti sveikųjų, racionaliųjų ir iracionaliųjų skaičių sąvokas. Tai yra vienas iš aksiominio apibrėžimo trūkumų, kurių galima būtų nurodyti ir daugiau.

3 Matematinės analizės dėstymo pradžia

Iš to, kas pasakyta antrame skyriuje galime daryti išvadą, kad dėstyti studentams aksiominį realiųjų skaičių apibrėžimą yra netikslinga. Dėstyti matematinę analizę reikėtų pradėti nuo pirminių sąvokų, aksiomų, apibrėžimų ir teiginių įrodymo aiškinimo. Pirmiausia reikėtų supažindinti su aibės ir jo elemento savoka, priminti natūrinių ir sveikųjų skaičių aibes, apibrėžti racionaliuosius skaičius, jų sudėtį ir daugybą, paaiškinti, kad paprasčiausios racionaliųjų skaičių savybės (pvz., $a + b = b + a$) yra aksiomos, o realiems skaičiams tai nėra aksiomos. Vieną, kitą savybę galima įrodyti pagal Dedekindą. Dėstant pagal Dedekindą nekyla apibrėžimo korektiškumo klausimo.

Taip pat pradedant dėstyti matematinę analizę reikėtų išaiškinti, ką reiškia įrodyti teiginį. Dauguma dėstytojų paprastai visiškai neaiškina, ką reiškia įrodyti teiginį, tarsi tai būtų paprasčiausias ir visiems savaime suprantamas dalykas. Tačiau taip nėra, todėl studentai pradeda nebesuprąsti dėstomo dalyko ir matematiką pradeda mokytis mintinai. Tai nėra gerai, mokymosi rezultatai kartais būna apgailėtini. Reikėtų atsižvelgti ir į tai, kad vidurinėje mokykloje mokiniai nemokomi arba labai mažai mokomi įrodynėti. Norint ištaisyti šią spragą turėtų atkreipti dėmesį ne vien matematinės analizės dėstytojas, bet ir kitų disciplinų dėstytojai, dirbantys su pirmakursiais.

Galima būtų paaiškinti, kaip teiginio įrodymą supranta fizikai ir kaip matematikai, kokie čia yra skirtumai. Teiginio įrodymas – tai teiginio paaiškinimas pagal tam tikras taisykles. Dalis šių taisyklių yra išvardintos matematikos enciklopedijoje [7]. Teiginio įrodymas yra gana subtilus dalykas, kai kurie įrodymai moksleivių matematikos olimpiadose ir analizėje suprantami skirtingai. Ši tema yra gana plati ir apie tai galima būtų parašyti atskirą straipsnį.

Kartais yra sunku suprąsti, kodėl yra įrodinėjami kai kurie visiškai akivaizdūs teiginiai, pvz., Archimedo principas. Archimedo principas vienuose vadovėliuose (pvz., [3, 4]) yra įrodinėjamas, kituose [2] nėra, vienuose vadovėliuose (pvz., [1, 6]) yra įrodinėjamas teiginys $a+b = b+a$, kituose [3] nėra. Taigi dėstant matematinę analizę kyla klausimas, kokius teiginius reikia įrodynėti, o kokių nereikia? Tai priklauso nuo to, kokias aksiomas ir kokius apibrėžimus pasirinksime. Deja, daugumoje vadovėlių nėra detaliai išvardintos visos aksiomos. Taigi nuo to ir reikėtų pradėti dėstyti – nuo matematikos teorijos (nebūtinai analizės) konstravimo principų (aksiomos, apibrėžimai, teiginiai ir jų įrodymai).

Literatūra

[1] G.M. Fichtengolcas. *Matematinės analizės pagrindai.* Nauka, Maskva, 1964 (rus.).

[2] V. Iljinas and E. Pozniakas. *Matematinės analizės pagrindai,* 1 d. Mokslas, Vilnius, 1981.

[3] V. Kabaila. *Matematinė analizė.* Mokslas, Vilnius, 1986.

[4] E. Misevičius. *Matematinė analizė.* VU leidykla, 2001.

[5] S.M. Nikolskij. *Matematinės analizės kursas.* Nauka, Maskva, 1983 (rus.).

[6] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Education India Pvt. Ltd., New Delhi, 2013.

[7] I.M. Vinogradovas. *Matematikos enciklopedija,* 2 d. Sovetskaja enciklopedija, Maskva, 1970 (rus.).

SUMMARY

Axioms of real numbers, and the beginning teaching of the analysis
G.Puriuškis

This paper provides an overview of the definitions of real numbers. We pose the axiomatic definition of correctness question. Provided examples of sets that are consistent with some definitions of real numbers, but not in with us usual set of real numbers. Attention is drawn to the mathematical analysis of teaching beginning and claims proof of clearance.

Keywords: axioms of real numbers, cut real numbers, proof.