

Эллиптическое уравнение с полурегулярным вырождением

Бронюс КВЯДАРАС (MII, VDU)
e-mail: *mathematica@kti.mii.lt*

Известно (см. напр. [1]), что обыкновенное дифференциальное уравнение

$$z^2 y'' + zb(z)y' + c(z)y = 0$$

с аналитическими в окрестности нуля коэффициентами $b(z)$ и $c(z)$ имеет фундаментальные решения

$$y_1(z) = z^{\rho_1} \varphi(z), \quad y_2(z) = z^{\rho_2} \psi(z) \quad \text{либо} \quad y_2(z) = z^{\rho_1} \psi(z) \ln z + z^{\rho_2} \chi(z). \quad (1)$$

Здесь $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ – однозначные аналитические в окрестности нуля функции, а ρ_1 и ρ_2 – корни уравнения $\rho(\rho - 1) + b(0)\rho + c(0) = 0$.

Возникает вопрос: существуют ли какие-либо уравнения в частных производных, решения которых имеют те же свойства. Как показал А. Янушаускас [2], эллиптическое уравнение

$$z^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) + z \left(b_0(z, x) \frac{\partial u}{\partial z} + \sum_{i=1}^n b_i(z, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + c(z, x)u = 0,$$

с аналитическими при $|z| < r_0$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega = \{x \in C^n \mid |x_i - x_i^0| < r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$ коэффициентами имеет два семейства решений вида (1) с аналитическими функциями $\varphi(z, x)$ и $\psi(z, x)$, причем $\varphi(x) = \varphi(0, x)$ и $\psi(x) = \psi(0, x)$ могут быть любыми аналитическими в Ω функциями. При этом требовалось, чтобы $b_0(0, x)$ и $c(0, x)$ были константами.

В этой работе будем исследовать уравнение

$$z^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) + zb(x) \frac{\partial u}{\partial z} + c(x)u = 0 \quad (2)$$

и покажем, что и в тех случаях, когда $b(x)$ и $c(x)$ зависят от x , оно имеет одно или два семейства решений вида

$$u_1 = z^{\rho_1(x)}\varphi(z, z \ln z, x), \quad u_2 = z^{\rho_2(x)}\psi(z, z \ln z, x),$$

где $\varphi(z, y, x)$ и $\psi(z, y, x)$ – аналитические функции всех переменных, а $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ корни определяющего уравнения

$$\rho(\rho - 1) + b(x)\rho + c(x) = 0. \tag{3}$$

Будем предполагать, что

- 1) коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ являются аналитическими функциями комплексных переменных $x \in \Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid |x_i| < r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$;
- 2) коэффициенты действительны при действительных значениях аргументов;
- 3) оператор

$$L_2(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \tag{4}$$

сильно эллиптичен;

- 4) существует константа M , что $\frac{Mr}{m(x)}$, где $0 < r \leq \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $m(x) = r - x_1 - x_2 - \dots - x_n$, является общей мажорантой всех коэффициентов уравнения; (Напомним, (см. напр. [1]) что мажорантой аналитической в окрестности точки x° функции $f(x)$ называется аналитическая функция $g(x)$, если для всех целых значений $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right| \leq \frac{\partial^m g}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_n = m.$$

Факт, что $g(x)$ мажорирует $f(x)$ будем писать $f(x) \ll g(x)$.)

- 5) решения определяющего уравнения (3) $\rho_1 = \rho_1(x)$ и $\rho_2 = \rho_2(x)$ перенумерованы так, чтобы $\text{Re} \rho_1 \geq \text{Re} \rho_2$ а $\frac{Mr}{m(x)}$ является мажорантой для $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$.

Основной результат сформулирован ниже.

Теорема. Пусть выполнены условия 1)–5). Если $\nu(x) = \rho_1(x) - \rho_2(x)$ не является целым числом, то уравнение (2) имеет семейство аналитических при $|z| < \delta$, $x \in \Omega$ решений вида

$$u(z, x) = z^{\rho_1(x)}\varphi(z, z \ln z, x),$$

причем $\varphi(0, 0, x)$ может быть любой аналитической в Ω функцией, для которой $\frac{Mr}{m(x)}$ является мажорантой. Если при этом $\operatorname{Re} \nu(x) < 2$, то существует и второе семейство

$$u(z, x) = z^{\rho_2(x)} \psi(z, z \ln z, x),$$

где $\psi(0, 0, x)$ любая аналитическая в Ω функция с мажорантой $\frac{Mr}{m(x)}$.

Положим $u = z^{\rho(x)} v$. Подставив это выражение и его производные в уравнение (2), после несложных преобразований для v получаем уравнение

$$z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + [b(x) + 2\rho(x)] \frac{\partial v}{\partial z} + z [L_2(v) + tL(\rho, v) + tL_2(\rho)v + t^2L(\rho, \rho)v] = 0, \quad (5)$$

где $t = \ln z$,

$$L(\rho, v) = 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad L(\rho, \rho) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}.$$

Решений этого уравнения будем искать в виде ряда

$$v(z, t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(t, x) z^{2k} \quad (6)$$

с коэффициентами $v^{(k)}$, зависящими от x , $t = \ln z$.

Подставляя (6) и его производные в уравнение (5) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем рекуррентную систему уравнений для определения $v^{(k)}(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^{(k)}}{\partial t^2} + (4k + \nu(x)) \frac{\partial v^{(k)}}{\partial t} + 2k(2k + \nu(x))v^{(k)} &= -L_2(v^{(k-1)}) \\ -t [L(\rho_1, v^{(k-1)}) + L_2(\rho_1)v^{(k-1)}] - t^2 L(\rho_1, \rho_1)v^{(k-1)}, & \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим через $F_k(t, x)$ ($F_0(t, x) = 0$) правую часть уравнений (7). Так как $\operatorname{Re} \nu(x) \geq 0$, $\nu(x) \neq 0$, то, как нетрудно проверить, его решением при $k \geq 1$ будет

$$v^{(k)}(t, x) = \frac{1}{\nu(x)} \int_{-\infty}^t [e^{-2k(t-s)} - e^{-(2k+\nu)(t-s)}] F_k(s, x) ds. \quad (8)$$

При $k = 0$ решением будет любая голоморфная в Ω функция $\varphi(x)$.

Лемма 1. Если $v^{(0)}(x) = \varphi(x)$ какая либо аналитическая в Ω функция, то при $k = 1, 2, 3, \dots$ полиномиальное решение $v^{(k)}(t, x)$ уравнения (7) является полиномом $2k$ -ой степени.

Доказательство. За решение $v^{(0)}(x)$ уравнения (7) при $k = 0$ возьмем любую голоморфную в Ω функцию $\varphi(x)$. Тогда правая часть уравнения (7) при $k = 1$

$$-F_1(t, x) = L_2(\varphi) + t[L(\rho_1, \varphi) + L_2(\rho_1)\varphi] + t^2L(\rho_1, \rho_1)\varphi$$

будет полиномом второй степени по t ибо $\varphi(x)$ и $\rho_1(x)$ от t не зависят. Так как $2 + \nu(x) \neq 0$, то уравнение (7) будет иметь единственное полиномиальное решение $v^{(1)}(t, x)$, полином второй степени [3]. Методом математической индукции нетрудно доказать, что при любом $k > 1$ существует единственное полиномиальное решение $v^{(k)}(t, x)$, полином $2k$ -ой степени. Так как $\operatorname{Re} \nu(x) \geq 0$, то это решение, как легко проверить, представимо интегралом (8).

Пусть

$$F_k(t, x) = \sum_{l=0}^{2k} F_k^{(l)}(x)t^l.$$

Интегрируя (8) выражение по частям получаем

$$v^{(k)}(t, x) = \frac{1}{2^2 k(k + \bar{\nu}(x))} \sum_{l=0}^{2k} \sum_{m=0}^{2k-l} (-1)^m \frac{(l+m)!}{2^m l! k^m} \sum_{p=0}^m \left(\frac{k}{k + \bar{\nu}(x)} \right)^p F_k^{(l+m)}(x)t^l. \quad (9)$$

Сейчас вычислим мажоранту $v^{(1)}(t, x)$. Из (9) при $k = 1$

$$v^{(1)}(t, x) = \frac{1}{4(1 + \bar{\nu}(x))} \sum_{l=0}^2 \sum_{m=0}^{2-l} (-1)^m \frac{(l+m)!}{2^m l!} \sum_{p=0}^m \left(\frac{1}{1 + \bar{\nu}(x)} \right)^p F_1^{(l+m)} t^l,$$

а

$$F_1^{(0)}(x) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \ll 2n^2 \frac{M^2 r^2}{m^4(x)},$$

$$F_1^{(1)}(x) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \left(2 \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \varphi(x) \right) \ll 4n^2 \frac{M^3 r^3}{m^5(x)},$$

$$F_1^{(2)}(x) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_j} \varphi(x) \ll n^2 \frac{M^4 r^4}{m^6(x)}.$$

По предположению $\operatorname{Re} \nu(x) \geq 0$ поэтому $\left| \frac{1}{1+\nu(x)} \right| < 1$ и

$$v^{(1)}(t, x) \ll \frac{n^2 M^4 r^4}{4(1+\nu_0)m^6(x)} \left(2 \frac{m^2(x)}{M^2 r^2} + 4 \frac{m(x)}{Mr} + \frac{3}{2} - 2t \left(2 \frac{m(x)}{Mr} + 1 \right) + t^2 \right).$$

Предположим, что $M \geq 10$, $\gamma > \sqrt{\frac{17}{12}}$. Тогда в области $\Omega_r = \{x \mid \sum_{i=1}^n |x_i| < r\}$, $\frac{m(x)}{Mr} \leq \frac{1}{5}$ и

$$v^{(1)}(t, x) \ll \frac{n^2 M^4 r^4}{4(1+\nu_0)m^6(x)} \frac{67}{55} (\gamma - t)^2. \quad (10)$$

Лемма 2. Если все коэффициенты уравнения (2) $a_{ij}(x), b(x), c(x)$, корни определяющего уравнения (3) $\rho_1(x), \rho_2(x)$ и $v^{(0)}(x) = \varphi(x)$ мажорируется функцией $\frac{Mr}{m(x)}$, $\nu(x) = \rho_1(x) - \rho_2(x) \neq 0$, $\min_{\sum_{i=1}^n |x_i| \leq r_0 \leq r} \operatorname{Re} \nu(x) = 2\nu_0$, $M \geq 10$, $\gamma = 2$, то верно мажорантное соотношение

$$v^{(k)}(t, x) \ll N \frac{\Gamma(k + \frac{6}{5}) \Gamma(k + \frac{7}{5}) n^{2k} M^{3k+1} r^{3k+1}}{2^{2k} k! \Gamma(1+k+\nu_0) m^{5k+1}(x)} (\gamma - t)^{2k},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N = \frac{\Gamma(1+\nu_0)}{\Gamma(\frac{6}{5}) \Gamma(\frac{7}{5})}. \quad (11)$$

Доказательство. Соотношение (11) верно при $k = 0$ и при $k = 1$ ((10) формула). Согласно методу математической индукции нам достаточно доказать, что если (11) верно при $k \geq 1$, то оно верно и при $k + 1$. Используя соотношение (11) и мажоранты для $L_2(v^{(k)})$, $L(\rho_1, v^{(k)})$, $L(\rho_1, \rho_1)$, $L_2(\rho_1)$ находим

$$F_{k+1}^{(l)}(x) \ll N R_k \frac{n^2 M^3 r^3}{m^5(x)} \frac{2k!}{(l-2)!(2k-l)!} \left[\frac{\gamma^2}{(2k+1-l)(2k+2-l)} + 2 \left(k + \frac{2}{5} \right) \frac{\gamma}{(l-1)(2k+1-l)} + \left(k + \frac{1}{5} \right) \left(k + \frac{2}{5} \right) \frac{1}{(l-1)l} \right] \gamma^{2k-l},$$

где через R_k обозначен множитель при $(\gamma - t)^{2k}$ в соотношении (11). Подставив эти выражения в (9) имея в виду, что $\left| \frac{k}{k+\nu(x)} \right| \leq 1$, для коэффициентов решения

$$v^{(k+1)}(t, x) = \sum_{l=0}^{2k+2} v_l^{(k+1)}(x) t^l,$$

получаем

$$v_i^{(k+1)}(x) \ll NR_k \frac{n^2 M^3 r^3 (k + \frac{6}{5}) (k + \frac{7}{5})}{4(k+1)(k+1+\nu_0)m^5(x)} \frac{(2k+2)!}{l!(2k+2-l)!} \left[\frac{(l-1)l\gamma^2}{2(2k+1)(k+1)^3} + \frac{(2k+2-l)}{(2k+1)(k+1)^2} \left(1 + \frac{l+1}{2(k+1)^2} \right) \gamma + \sum_{m=0}^{2k-l} \frac{(2k+2-l)!}{(2k-l-m)!} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)^{m+1}} \times \left(m+1 + \frac{(m+2)(l+m+1)}{(k+1)^2} + \frac{(m+3)(l+m+1)(l+m+2)}{4(k+1)^4} \right) \gamma^{-m} \right] \gamma^{2k-l}. \quad (12)$$

Очевидно, что

$$\frac{n^2 M^3 r^3 (k + \frac{6}{5}) (k + \frac{7}{5})}{4(k+1)(k+1+\nu_0)m^5(x)} R_k = R_{k+1},$$

поэтому для доказательства соотношения (11) для $k+1$ достаточно доказать, что при некотором $\gamma > 1$ множитель в квадратных скобках, (которого обозначим через $S(k, l)$) при $l = 0, 1, \dots, 2k$ не превышает γ^2 . При этом прямым вычислением находим

$$v_{2k+2}^{(k+1)}(x) \ll NR_{k+1}, \quad v_{2k+1}^{(k+1)}(x) \ll 2NR_{k+1} \frac{(2k+2)!}{(2k+1)!}.$$

Нетрудно доказать, что при каждом фиксированном $k = 1, 2, \dots$ $S(k) = S(k, 0) > S(k, l)$, $l = 1, 2, \dots, 2k$. Последовательность $\{S(k)\}$ монотонно возрастает и

$$S(k) \leq \left(1 + \frac{1}{k+1} \right)^2 \sum_{m=0}^{2k} (m+1)\gamma^{-m}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Возьмем возрастающую последовательность функций

$$f_k(\tau) = \sum_{m=0}^{2k} (m+1)\tau^k = \frac{d}{dt} \sum_{m=0}^{2k+1} \tau^k, \quad 0 < \tau < 1,$$

$k = 1, 2, \dots$ Ясно, что $f_k(\tau) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2}$. Отсюда и из (13) вытекает, что если $\gamma = \frac{1}{\tau}$, то

$$S(k) \leq \left(1 + \frac{1}{k+1} \right)^2 \frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2},$$

и существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = S_0 \leq \frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2}$, и если положим $\gamma = 2$, то $S(k) \leq 4$, $k = 1, 2, \dots$. Значит в (12) соотношении положив $\gamma = 2$ получаем что

$$v_i^{(k+1)}(x) \ll NR_{k+1} \frac{(2k+2)!}{(2k+2-l)!!} 2^{2k+2-l} \quad l = 0, 1, \dots, 2k+2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(t, x) &= \sum_{l=0}^{2k+2} v_l^{(k+1)}(x) t^l \ll \sum_{l=0}^{2k+2} NR_{k+1} \frac{(2k+2)!}{(2k+2-l)!!} 2^{2k+2-l} (-t)^l \\ &= NR_{k+1} (2-t)^{2k+2}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное соотношение с (11) видим, что когда $\gamma = 2$ утверждение леммы справедливо.

Доказательство теоремы. Из (6) и (11) вытекает, что

$$v(z, t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(x, t) z^{2k} \ll N \sum_{k=0}^{\infty} R_k (2-t)^{2k} z^{2k}.$$

Последняя сумма является гипергеометрической функцией, которая сходится, если

$$|(2-t)z| = \left| z \ln \frac{e^2}{z} \right| < \frac{2\sqrt{m^5(x)}}{\sqrt{M^3 r^3}}.$$

Следовательно, существует окрестность точки $z = 0$, в которой существует решение $u(z, \ln z, x)$ уравнения (2), причем $v(0, 0, x) = \varphi(x)$ — любая голоморфная в Ω функция.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, заметим, что при $\rho = \rho_2(x)$ в уравнениях (7) вместо $\nu(x)$ будет $-\nu(x)$. Но так как $\operatorname{Re} \nu(x) < 2$, то интеграл (8) будет существовать. Тогда в выражении (9) вместо k необходимо брать $k - \tilde{\nu}(x)$, а вместо $k + \tilde{\nu}(x) - k$. Так как $\left| \frac{k - \tilde{\nu}(x)}{k} \right| \leq 1$, то все остальные оценки останутся справедливыми. В соотношении (11)

$$R_k = \frac{\Gamma(k + \frac{6}{5}) (k + \frac{7}{5}) n^{2k} M^{3k+1} r^{3k+1}}{2^{2k} k! \Gamma(1 + k - \nu_0) m^{5k+1}(x)}, \quad 2\nu_0 = \max \operatorname{Re} \nu(x).$$

Так как $\nu_0 < 1$, то $\Gamma(1 + k - \nu_0)$ определена при всех $k = 0, 1, \dots$ и мажорирующей функцией будет гипергеометрическая функция, сходящаяся в окрестности $z = 0$. Следовательно будет существовать решения

$$u(z, \ln z, x) = z^{\rho_2(x)} v(z, \ln z, x)$$

уравнения (2) при любой голоморфной в Ω функции $\psi(x) = v^{(0)}(x) = v(0, 0, x)$. Теорема доказана.

Литература

- [1] Ф. Трикоми, *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, Москва (1962).
 [2] А.И. Янушаускас, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*, Наука, СО, Новосибирск, (1979).
 [3] Б. Квядарас, Об одной системе вырождающихся интегродифференциальных уравнений, *Сб. Дифференциальные уравнения и их применение*, вып. 38, 38–51 (1986).

Pusiaureguliariai išsigimstanti elipsinė lygtis

B. Kvedaras

Įrodoma, kad išsigimstanti elipsinė lygtis

$$z^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) + zb(x) \frac{\partial u}{\partial z} + c(z, x)u = 0,$$

su analiziniais srityje $\Omega \subset C^n$ koeficientais turi dvi sprendinių šeimas taško $z = 0$ aplinkoje turinčios pavidalą

$$u_1 = z^{\rho_1(x)} \varphi(z, z \ln z, x), \quad u_2 = z^{\rho_2(x)} \psi(z, z \ln z, x).$$

Funkcijos φ ir ψ yra analizinės visų kintamųjų funkcijos, o ρ_1 ir ρ_2 – lygties

$$\rho(\rho - 1) + b(x)\rho + c(x) = 0.$$

sprendiniai.