

# Geometrijos mokymas bendrojo lavinimo mokyklose: XXI a. problematika

Valentina DAGIENĖ (MII)

el. paštas: [dagiene@ktl.mii.lt](mailto:dagiene@ktl.mii.lt)

## 1. Įvadas

Geometrija – viena seniausių matematikos šakų, glaudžiai susijusi su taikymais. Todėl ir bendrojo lavinimo mokykloje nuo pat jaunesniųjų klasių geometrija, ypač planimetrija, užėmė ir iš dalies tebeužima gana tvirtą vietą. Mokiniai supažindinami su paprastomis geometrinėmis figūromis. Tačiau kur kas svarbiau – jie turėtų būti mokomi tyrinėti šias figūras, mėginti atrasti jų savybes, išvelgti dėsningumus.

Vyresnėse klasėse nemažas dėmesys skiriamas teorems, besiremiančiomis Euklido postulatais ir pan., įvertinti. Tokių formalių įrodymų ypač daug būta anksčiau – ir buvo reikalaujama, kad mokiniai išmoktų šių formalių metodų.

Lietuvos švietimo sistema smarkiai kinta, stipriai reformuotas matematikos mokymas. Pagrindinėje mokykloje geometrija nebeišskiriama kaip atskira matematikos dalis. Yra tik temos, kurios supažindina su pagrindinėmis geometrinėmis figūromis ir erdviniais kūnais, pateikia būdingiausias jų savybes (nereikalaujant formalių įrodymų), remiantis jomis sprendžiami praktinio pobūdžio uždaviniai.

Pagal profilinės mokyklos tikslijų ir gamtos mokslų bendrųjų programų projektą [1] vidurinės mokyklos bendrajame kurse geometrijos iš viso palikta labai mažai: tai temos, susiejančios geometrines figūras su lygtimis ir nelygybėmis. Tačiau šiuo straipsniu nesiekama analizuoti mūsų šalies matematikos mokymo bendrojo lavinimo mokykloje temų pagrįstumo ar bendrųjų programų deramumo. Pagrindinis tikslas – aptarti pasaulines geometrijos mokymo tendencijas XXI amžiuje, susieti su kompiuterinės technologijos panaudojimu.

## 2. Pažinimo procesai geometrijoje

Daugelis mokslininkų išskiria tris svarbiausius pažinimo procesus, atliekančius epistemologines funkcijas geometrijoje:

1. **Vizualizacija:** kai plokštumos arba erdvės daiktai vaizduojami supaprastintomis formomis ir šitaip padedama suvokti sudėtingą realybę.
2. **Konstravimas:** kai pasitelkus įvairias priemones kuriami geometriniai modeliai.

3. **Samprotavimai (pagrindimas):** kai apmąstomos vizualiai ar konstruojant įgytos žinios, kai jos formalizuojamos, iš vienu teiginių gaunami kiti ir pan.

Visi šie trys procesai daugelio kognityvinės psichologijos specialistų laikomi ugdytiniais nepriklausomai vienas nuo kito. Pavyzdžiui, samprotavimų gali būti mokoma nepriklausomai nuo vizualizacijos ar konstravimo, nes grindžiami aksiomomis, lemomis, teoremais.

Nėra abejonių, kad visi šie trys geometrijai būdingi pažinimo procesai yra svarbūs mokykloje. Tačiau kyla klausimas: kaip to mokyti, kad būtų prieinama moksleiviams, kad ugdytų reikalingiausius šiandienos ir ateities visuomenės gebėjimus?

Mūsų šalies mokyklos matematikos programa iki šiol daugiausia dėmesio skyrė samprotavimams, įrodymams ugdyti. Daugumai mokinių tai pernelyg sunku ar net neįveikiama. Todėl dabar ryškėja vizualizavimo ir konstravimo tendencijos.

Pasaulyje atlikti su geometrijos mokymu susiję švietimo tyrimai, kurių garsiausias iniciatorius laikomas R. Duval, rodo, kad tris pažinimo procesus geometrijoje geriausia mokyti atskirai, siekiant atskirai įgyvendinti jų apibrėžiamus tikslus [2, 3]. Tik po diferencijuoto darbo galima (ir reikia) aptarti ryšius tarp šių procesų.

### 3. Kompiuterinė technologija ir geometrijos mokymas

Kompiuteris, tiksliau jo programinė įranga, arba visa tai drauge vadinant technologija, švietimui suteikė daug naujų galimybių. Geometrijoje kompiuteris ypač akivaizdžiai talgina vizualizacijai gerinti.

Susiklostė puikios galimybės konstravimui – beveik visa geometrijai skirta programinė įranga pagrįsta konstravimu. Tačiau dėlto šiek tiek siaurėja vizualizavimo, o ypač samprotavimų galimybės ir tam būtina skirti papildomą dėmesį.

Prieš gilinantį į kompiuterinės technologijos poveikį geometrijos mokymui reikia prisiminti dualią geometrijos paskirties prigimtį [7]:

- a) geometrija – erdvės ir erdvių ryšių nagrinėjimas;
- b) geometrija – aksiomų rinkinys ir deduktyvinių įrodinėjimų terpė.

Atliekami atskiri švietimo tyrimai, kurie bando apžvelgti, kaip kompiuterinė technologija veikia šias geometrijos veiklos sritis. Tyrimų rezultatai paprastai įtakoja kompiuterinių matematikos mokomųjų programų kūrimą.

Bendriausiu atveju galima išskirti tris šiuo metu labiausiai paplitusius kompiuterinės technologijos taikymo mokant geometriją būdus

1. Logo metodologiją ir Logo šeimos produktus (*LogoWriter, StarLogo, NetLogo, MicroWorlds, Komenskio Logo, Image* ir t.t.).
2. Profesionaliaus projektavimo programų paketus (CAD ir pan.).
3. Specialiųjų geometrijos mokomųjų programų panaudojimas (*Cabri, Geometer's SketchPad* ir pan.).

Logo (Lietuvoje šiuo metu plinta *Windows* operacinei sistemai *Komenskio Logo* programa) – ypatingai puiki priemonė susipažinti su geometrinėmis figūromis. Jau prieš keletą dešimčių pastebėta, kad Logo padeda ugdyti matematinę, algoritminę, procedūrinę

mąstymą [9]. Tačiau Logo reikalauja specialių pastangų tiek iš mokytojų, tiek iš mokinių pusės. Lietuvos mokyklose šia kryptimi pradėjo dirbti informatikos mokytojai, tačiau dar nesulaukta entuziazmo iš matematikų pusės.

Profesionali projektavimo programinė įranga CAD (*Computer Assisted Design*) naudojama įvairių darbų srityse, kur reikalingas trimačių vaizdų apdorojimas: architektūroje, robotikoje, pramoninime projektavime, inžinerijoje. Jei laikomasi požiūrio, kad vyresniųjų klasių moksleiviams reikia suteikti įgūdžių, kurių jiems prireiks profesiniame darbe, tai supažindinimas su projektavimo programomis kaip tik užima svarbią vietą. Yra straipsnių, pateikiančių projektavimo paketų naudojimo mokymui metodiką, ją pagrindžiančių [8]. Projektavimo kompiuterinės programos labiau tinka vyresniojo amžiaus moksleiviams, nes reikalauja specifinių žinių.

Pasaulyje naudojamos mokomosios programos geometrijai mokyti iš esmės remiasi dinaminių brėžinių kūrimu ir jų analizės galimybėmis. Geriausias savybes turi populiaros daugelyje šalių programos *Cabri* bei *Geometer's SketchPad*.

Tačiau šios programos nėra paprasti brėžinių redaktoriai. Pagrindinė jų savybė yra ta, kad leidžia nesunkiai konstruoti realių objektų modelius, aprašomus savybėmis ir tarpusavyje susietus. Todėl nubrėžtas geometrines figūras galima tampyti, perkėlinėti, uždėti viena ant kitos – vis tiek pagrindinės aprašytos savybės nekis. Taigi liniuotė ir matlankis brėžiniams braižyti nebėra būtini, tačiau reikalingi kiti, sudėtingesni analizavimo ir samprotavimų metodai.

Ypatingas dėmesys skiriamas įrodymams, pasitelkus kompiuterines programas, pavyzdžiui, *Geometer's SketchPad*. Anglijos ir Velso matematikos programose prigijęs procesais pagrįstas įrodinėjimų metodas (anglų k. *process-oriented approach*). Čia einama nuo empirinių tyrinėjimų link deduktyvinių apmąstymų ir formalių įrodymų. Tačiau, iš kitos pusės, empiriniai tyrinėjimai nebeįsivaizduojami be kompiuterinės technikos.

Dinaminis įrodymų procesas – labai svarbus metodas. Jį nagrinėja ir pagrindžia daugelis mokslininkų [5, 6]. Lietuvos matematikams edukologams reikėtų gerai išnagrinėti pastaruosius darbus ir pateikti konkrečius metodinius siūlymus matematikos mokytojams. Lietuvos mokyklos nuo kitų metų turės lokalizuotą ir legalią *Geometer's SketchPad* programą. Tačiau kaip ją taikyti mūsų matematikos pamokose, dar nėra parengta jokios medžiagos.

#### 4. Kokių geometrijos temų labiausiai reikėtų mokyti

XIX a. suformuotas geometrijos mokymo turinys, pagrįstas daugiausiai aksiomomis ir formaliaisiais įrodymais, šiandien nebėra aktualus, skatinantis mokymosi motyvaciją. Yra žymiai įdomesnių ir šiandienę mokinių motyvaciją labiau skatinančių temų. Tačiau pirmiausia išskyla klausimas, kaip geometrijos kursą galima būtų papildyti nauja medžiaga. Galimi keli būdai:

1. Nors ir oficialiai nenuartata, tačiau nauja medžiaga palaiapsniui įterpinėjama į seną programą.

2. Nauja medžiaga pridedama mokant pagal senąją programą pastarajai mažinant valandų skaičių.
3. Dalis senosios mokymo medžiagos išmetama ir vietoj to įdedama nauja.

Skirtingos šalys elgiasi ar yra pasielgusios įvairiai. Apie tai pateikiama straipsniuose [4].

Kokios gi naujos temos siūlomos mokyti geometrijai bendrojo lavinimo mokyklose?

Dažniausiai aptarinėjamos šios idomos ir šiandien daugeliui darbų aktualios temos:

1. Grafai. 2. Kodavimas, šifravimas. 3. Paviršiai. 4. Ornamentai. 5. Mazgai. 6. Briunai-niai. 7. Fraktalai.

Tačiau daugumą šių temų be kompiuterio išmokyti sunku. Todėl norint įtraukti kai ką iš šių temų, reikia galvoti ir apie kompiuterinės technologijos panaudojimą.

## 5. Išvados

1. Išnagrinėjus pasaulines geometrijos mokymo bendrojo lavinimo mokykloje XXI amžiaus tendencijas būtina pagrįsti Lietuvos matematikos mokymo programoje esamų geometrijos temų aktualumą arba jų atsisakyti.
2. Atsižvelgiant į pasaulines tendencijas reikėtų papildyti matematikos mokymą šiuolaikiškais temomis, kurios būtų patrauklios moksleiviams. Jas reikėtų mokyti panaudojant kompiuterines technologijas.
3. Geometrinėms figūroms, jų savybėms bei ryšiams tarp jų suvokti gerai tinka Logo mokymas. Lietuvoje tam sudarytos sąlygos: lokalizuota ir legali (tik mokymo tikslams) Komenskio Logo programa, parengta mokomoji medžiaga.
4. Geometrinėms tyrinėjimams, ypač figūrų konstravimui, vizualizavimui būtina panaudoti kompiuterinę technologiją. Lietuvos mokykloms nupirktą ir lokalizuotą *Geometer's SketPad* programa. Ji tinka ir samprotavimams ugdyti, nes leidžia kurti scenarijus, aprašyti ir įrodinėti teiginius.

## Literatūra

- [1] *Bendrojo lavinimo mokyklos bendrosios programos ir išsilavinimo standartai. Tikslieji ir gamtos mokslai, XI–XII klasei*. Projektas, Vilnius, Leidybos centras (1999).
- [2] R. Duval, Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processes, *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematic Education*, Springer, 142–157 (1995).
- [3] R. Duval, Geometry from a cognitive point of view, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, An ICMI Study, Kluwer Academic Pub., 25–52 (1998).
- [4] G. Graumann, R. Hölzl, K. Krainer, M. Neubrand, H. Stuve, Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre, *Journal für Mathematik-Didaktik*, 17, 163–237 (1996).
- [5] C. Hoyles, K. Jones, Proof in Dynamic Geometry contexts, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, An ICMI Study, Kluwer Academic Pub., 121–128 (1998).
- [6] G. Howson, *National Curricula in Mathematics*, Leicester, Mathematical Association, UK (1991).
- [7] M.M. Lindquist, A.P. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching Geometry K–12*, NCTM 1987, yearbook (1987).

- [8] I. Osta, CAD tools and teaching of geometry, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, An ICMI Study, Kluwer Academic Pub., 128–144 (1998).
- [9] S. Papertas, *Minčių audros: vaikai, kompiuteriai ir veiksmingos idėjos*, Vilnius, Žara (1995).

## Problems on the teaching of geometry in comprehensive schools for 21st century

V. Dagienė

The main aim of this paper is to identify current major trends in geometry and to discuss perspectives concerning its teaching in schools, for today and for tomorrow. Geometry involves three kinds of cognitive processes which fulfill specific epistemological functions: (1) visualization processes with regard to space representation for the illustration of a statement, for the heuristic exploration of a complex situation, etc.; (2) construction processes by tools: construction of figurations can work like a model; (3) reasoning in relationship to discursive processes for extension of knowledge, for proof, for explanation. The paper deals with relationship between geometry and computer technology. Among all school subjects, geometry stands as one which is bound to be influenced most profoundly by the recent progress both in hardware and software development. The purpose is to examine some influence of computer technology in the teaching and learning of geometry.