Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 626–631

Apie vieną stabiliųjų dėsnių charakterizaciją ir jos stabilumo įvertį

Olga JANUŠKEVIČIENĖ, Romanas JANUŠKEVIČIUS (MII, VPU)
el.paštas: romjan@takas.lt

G. Polya 1923 m. įrodė, kad jei X_1 ir X_2 – nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su baigtine dispersija, tai X_1 ir $(X_1+X_2)/\sqrt{2}$ skirstiniai sutampa tada ir tik tada, kai X_1 yra normalusis skirstinys su nuliniu vidurkiu. Ar galima analogiška teorema statistikų X_1 ir $(X_1+X_2)/2^{1/\alpha}$ porai, jei $\alpha<2$? P. Levy sukonstravo pavyzdį, paneigiantį šią hipotezę. Jis įrodė, kad jei $(X_1+X_2)/2^{1/\alpha}$ ir $(X_1+X_2+X_3)/3^{1/\alpha}$ turi tokį pat skirstinį kaip ir X_1, tai X_1 turi griežtai stabilų skirstinį. Darbe nagrinėjamas šios charakterizacijos stabilumas λ_0-metrikoje.

Yra žinoma, kad stabiliųjų dėsnių klasė yra aibė skirstinių $\mathbb{F}(x;\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$, priklausančių nuo keturių parametrų, kurie kinta šiose srityse:

$$0<\alpha\leqslant 2,\quad -1\leqslant\beta\leqslant 1,\quad -\infty<\gamma<\infty,\quad \lambda>0.$$

Mus domins stabiliųjų dėsnių aibės poaibis – vadinamieji griežtai stabilūs skirstiniai. Pateiksime jų apibrėžimą pagal Feller [1].

Apibrėžimas. *Skirstinys $\mathbb{F}_X$ yra vadinamas griežtai stabiliu, jei jis nėra išsigimęs nulyje ir kiekvienam n egzistuoja konstanta $d_n>0$ tokia, kad*

$$\mathbb{F}_{S_n}(x)=\mathbb{F}_{d_nX}(x), \tag{1}$$

kur $S_n=X_1+\ldots+X_n$; $X,X_1,\ldots,X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, o $\mathbb{F}_X$ – atsitiktinio dydžio X skirstinys.

Įrodoma (žr. Feller [1]), kad $d_n=n^{1/\alpha}$ yra vienintelė galima normuojanti konstanta ir $0<\alpha\leqslant 2$. Taigi formulę (1) galima perrašyti taip:

$$\mathbb{F}_{S_n}(x)=\mathbb{F}_{n^{1/\alpha}X}(x). \tag{2}$$

P. Lévy teorema. *$\mathbb{F}_X$ yra griežtai stabilus, jei sąryšis (2) yra tenkinamas bent dviem n reikšmėms $n=2$ ir $n=3$.*

Charakteristinių funkcijų pagalba sąryšį (2) galima perrašyti taip:

$$f(t)=f^k(t/k^{1/\alpha}),\quad \alpha\in(0,2],\quad k=2,3, \tag{3}$$

kur $f(t)$ yra atsitiktinio dydžio X charakteristinė funkcija.

Mūsų tikslas – pratęsti autorių darbe [2] pradėtą P. Lévy teoremos stabilumo tyrimą. Tarę, kad sąryšiai (3) yra išpildomi su tam tikra paklaida ε, įsitikinsime, kad $f(t)$ tam tikra prasme yra artima griežtai stabilaus dėsnio charakteristinei funkcijai. „Matavimai" atliekami λ_0-metrikoje, kuri apibrėžiama taip:

$$\lambda_0(X,Y) = \lambda_0\big(f_X(t), f_Y(t)\big) = \sup_t |f_X(t) - f_Y(t)|.$$

Jei tolygioji metrika ρ, apibrėžiama skirstinių erdvėje, yra invariantiška daugiklio atžvilgiu, t.y. $\rho(cX, cY) = \rho(X,Y)$, tai metrika λ_0 yra tolygiosios metrikos analogas charakteristinių funkcijų erdvėje ir taip pat yra invariantinė daugiklio atžvilgiu.

Taigi tarkime, kad metrikoje λ_0 sąryšiai (3) išpildomi ne tiksliai, o tik apytiksliai, su paklaida ε:

$$\lambda_0\Big(X, k^{-1/\alpha}\sum_{j=1}^{k} X_j\Big) = \lambda_0\big(f(t), f^k(t/k^{1/\alpha})\big) \leqslant \varepsilon, \quad \alpha \in (0,2], \quad k = 2,3. \tag{4}$$

Teorema. *Tarkime, kad X, X_1, X_2 ir X_3 yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę simetriški atsitiktiniai dydžiai. Jei egzistuoja $\alpha \in (0,2]$ toks, kad kai $k = 2,3$ yra išpildomi sąryšiai* (4), *tai egzistuoja C, priklausantis tik nuo α toks, kad*

$$\inf_{Y\in S} \lambda_0(X_j, Y) \leqslant C\varepsilon^{\delta}, \tag{5}$$

kur $\delta = 1/(b+\max(1,\alpha))$, b – Feldmano [3] *konstanta, o S – griežtai stabilių simetrinių atsitiktinių dydžių klasė, prie kurios yra prijungtas išsigimęs atsitiktinis dydis.*

Pastebėsime, kad stabilumo įverčio (5) eilė yra geresnė už atitinkamą stabilumo eilę λ-metrikoje darbe [2], nes pastarosios eilė yra tik $\delta/(1+\alpha)$, o formulėje (5) ši eilė yra δ.

Įrodymas. Iš sąryšio (4) turime, kad

$$f(t) = f^k(t/k^{1/\alpha}) + R(t), \quad |R(t)| \leqslant \varepsilon, \quad k = 2,3; \quad |t| \leqslant \infty. \tag{6}$$

Kadangi nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra simetriški, tai jų charakteristinė funkcija $f(t)$ yra reali. Pažymėkime

$$U = \inf\{|f(t)| : |t| \leqslant \infty\}.$$

Iš (6) turime, kad

$$\begin{aligned} U &= \inf\big\{|f^2(t/2^{1/\alpha}) + R(t)| : |t| \leqslant \infty\big\} \leqslant \\ &\leqslant U^2 + \sup\big\{|R(t)| : |t| \leqslant \infty\big\} \leqslant U^2 + \varepsilon, \\ U^2 &- U + \varepsilon \geqslant 0. \end{aligned}$$

Tarkime, kad $0 \leqslant \varepsilon < 1/4$. Tada arba

$$U \leqslant (1-\sqrt{1-4\varepsilon})/2, \tag{7}$$

arba

$$U \geqslant (1+\sqrt{1-4\varepsilon})/2. \tag{8}$$

Tarkime iš pradžių, kad yra teisinga nelygybė (7). Kadangi $\varepsilon < 1/4$, tai iš (7) gauname, kad

$$\inf_t |f(t)| < 1/2.$$

O kadangi $f(0)=1$, $f(t)$ yra tolydi ir reali, tai egzistuoja toks teigiamas u_0, kad

$$f(u_0)=1/2; \quad f(u) \geqslant 1/2, \quad \text{kai} \quad u \leqslant u_0. \tag{9}$$

Pažymėkime

$$f_*(t)=f(tu_0). \tag{10}$$

Remiantis (6) nesunku patikrinti, kad kai $|t| \leqslant \infty$, tai

$$f_*(t)=f_*^k(t/k^{1/\alpha})+r_*(t), \quad |r_*(t)| \leqslant \varepsilon, \quad k=2,3. \tag{11}$$

Be to, iš (9) gauname, kad

$$s_*=\min\{|t| : |f_*(t)|=1/2\} \leqslant 1. \tag{12}$$

Tolimesnis įrodymas grindžiamas diofantinių aproksimacijų teorija. Šioje teorijoje įrodyta (žr. [3]), kad bet kuriems natūraliems r ir k egzisuota absoliučios konstantos b ir b' tokios, kad

$$|r\ln 2 - k\ln 3| > b'r^{-b}.$$

Konstantos b ir b' vadinamos Feldmano konstantomis. Darbe [3] įrodyta, kad $b>1$.

Pasinaudodama šiuo rezultatu, O. Januškevičienė [4] įrodė, kad jei ε – bet koks teigiamas skaičius, tenkinantis sąlygą

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-\varkappa b}M-(b'M/\ln 3)^{1/b}\varepsilon^{-\varkappa} \geqslant 2^{b(1-b)}(b'/\ln 3)^{1/b-1}, \\ &M=2\cdot 3^b(\ln 3)^{1+b}/((2^{1/b}-1)b'\alpha^b), \quad \varkappa>0, \end{aligned} \tag{13}$$

tai bet kuriam natūraliajam skaičiui m egzistuoja natūralusis skaičius m' ir atitinkantis jį natūralusis skaičius n' tokie, kad

$$|m'\alpha_2 - n'\alpha_1| \leqslant \varepsilon^{\varkappa}, \tag{14}$$

$$0 \leqslant m-m' < M\varepsilon^{\varkappa b}, \tag{15}$$

kur $\alpha_1 = -\alpha^{-1}\ln 2$, $\alpha_2 = -\alpha^{-1}\ln 3$.

Kadangi bet kuriai charakteristinei funkcijai $g(t)$ teisingas sąryšis $g(t) = \overline{g(-t)}$, o charakteristinė funkcija $f(t)$ yra reali, tai $f(t) = f(-t)$. Todėl pakanka nagrinėti tik dešinę pusašę $t > 0$.

Pažymėkime

$$y = \ln t, \quad \chi(\ln t) = \ln f(t)$$

ir tarkime iš pradžių, kad $0 < t \leqslant 1$. Iš (11) ir (9) gauname, kad

$$\chi(y) = k\chi(y + \alpha_{k-1}) + r_{k-1}(\exp y), \quad k = 2, 3, \tag{16}$$

$$|r_{k-1}(t)| \leqslant 16\varepsilon, \quad 0 < t \leqslant 1. \tag{17}$$

Toliau naudingas dar vienas žymėjimas:

$$H(y) = \chi(y)\exp(-\alpha y).$$

Šio žymėjimo dėka sąryšį (16) galima perrašyti tokiu būdu:

$$H(y) = H(y + \alpha_j) + r_j(\exp y)\exp(-\alpha y), \quad j = 1, 2.$$

Dabar jau galime įvertinti $|H(y) - H(\alpha_1)|$, jei $y = n\alpha_1 + m\alpha_2$, kur m, n – neneigiami sveiki skaičiai. Iš tiesų,

$$\begin{aligned}
H(y) &= H(n\alpha_1 + m\alpha_2) = H\big((n-1)\alpha_1 + m\alpha_2\big) \\
&\quad - r_1\big(\exp\big\{(n-1)\alpha_1 + m\alpha_2\big\}\big)\exp\big\{-\alpha(n-1)\alpha_1 + m\alpha_2\big\} = \ldots \\
&= H(\alpha_1 + m\alpha_2) - \sum_{j=1}^{n-1} r_1\big(\exp(j\alpha_1 + m\alpha_2)\big)\exp\big\{-\alpha(j\alpha_1 + m\alpha_2)\big\} \\
&= H(\alpha_1) - \sum_{j=0}^{m-1} r_2\big(\exp(\alpha_1 + j\alpha_2)\big)\exp\big\{-\alpha(\alpha_1 + j\alpha_2)\big\} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n-1} r_1\big(\exp(j\alpha_1 + m\alpha_2)\big)\exp\big\{-\alpha(j\alpha_1 + m\alpha_2)\big\}.
\end{aligned}$$

Sumas su liekamaisiais nariais nesunku įvertinti, prisiminus (17):

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=0}^{m-1} r_2\big(\exp(\alpha_1 + j\alpha_2)\big)\exp\big\{-\alpha(\alpha_1 + j\alpha_2)\big\}\right| \\
&\qquad \leqslant 16\varepsilon\Big(\exp\big\{-\alpha(\alpha_1 + m\alpha_2)\big\} - \exp\{-\alpha\alpha_1\}\Big) \\
&\qquad \leqslant 16\varepsilon\exp\big(-\alpha(\alpha_1 + m\alpha_2)\big);
\end{aligned}$$

$$\Bigl|\sum_{j=1}^{n-1} r_1\bigl(\exp(j\alpha_1+m\alpha_2)\bigr)\exp\bigl(-\alpha(j\alpha_1+m\alpha_2)\bigr)\Bigr|$$
$$\leqslant 16\varepsilon\Bigl(\exp\bigl\{-\alpha(n\alpha_1+m\alpha_2)\bigr\}-\exp\bigl(-\alpha(\alpha_1+m\alpha_2)\bigr)\Bigr)$$
$$\leqslant 16\varepsilon\exp(-\alpha y).$$

Dabar nesunku įvertinti ir patį skirtumą $H(y)-H(\alpha_1)$:

$$|H(y)-H(\alpha_1)|\leqslant\Bigl|\sum_{j=0}^{m-1} r_2\bigl(\exp(\alpha_1+j\alpha_2)\bigr)\exp\bigl(-\alpha(\alpha_1+j\alpha_2)\bigr)\Bigr|$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1} r_1\bigl(\exp(j\alpha_1+m\alpha_2)\bigr)\exp\bigl\{-\alpha(j\alpha_1+m\alpha_2)\bigr\}\leqslant 32\varepsilon\exp(-\alpha y). \tag{18}$$

Pakartoję samprotavimus, pateikiamus autorių darbe [2], iš (13), (14), (15) ir (18) gauname, kad egzistuoja toks C, priklausantis tik nuo α, kad kai $|t|\leqslant 1$, tai

$$\bigl|f_*(t)-\exp(-2|\ln f_*(2^{-1/\alpha}s_*)|s_*^{-\alpha}|t|^\alpha)\bigr|\leqslant C\varepsilon^\delta. \tag{19}$$

Srities $|t|>1$ nagrinėjimui jau pakanka tik vieno iš dviejų sąryšių (11):

$$f_*(t)=f_*^2(t/2^{1/\alpha})+r_*(t),\qquad |r_*(t)|\leqslant\varepsilon. \tag{20}$$

Perėjimas iš zonos $|t|\leqslant 1$, kurioje teisingas tipo (19) įvertis, į zoną $|t|>1$ remiantis tipo (20) lygtimi ir negadinant pastarojoje zonoje įverčio, analogiško įverčiui (19), buvo detaliai išnagrinėtas autorių darbuose [2] ir [5], todėl šio perėjimo nekartosime.

Kadangi metrika λ_0 yra invariantinė daugiklio atžvilgiu, tai iš nelygybės (19), teisingos visiems realiems t, gauname įvertį (5).

Lieka išnagrinėti atvejį (8). Jei $\forall\varepsilon\in[0,1/4)$

$$U=\inf\bigl\{|f(t)|: t\leqslant\infty\bigr\}\geqslant(1+\sqrt{1-4\varepsilon})/2\geqslant 1-2\varepsilon,$$

tai iš sąlygų $f(t)=\operatorname{Re}f(t)$ ir $f(0)=1$ išplaukia, kad

$$f(t)\geqslant(1+\sqrt{1-4\varepsilon})/2\geqslant 1-2\varepsilon,\quad \forall t\in\mathbf{R}^1.$$

O tai reiškia, kad

$$\lambda_0(X,\mathrm{I\!I})\leqslant 2\varepsilon,$$

kur $\mathrm{I\!I}$ pažymėtas išsigimęs nulyje atsitiktinis dydis (jo charakteristinė funkcija visoje t ašyje yra lygi 1).

Pagaliau pastebėsime, kad jei $\varepsilon \geqslant 1/4$, tai visada galima parinkti C taip, kad teoremos teiginys (5) būtų teisingas. Iš tiesų, lengva pastebėti, kad bet kuriems atsitiktiniams dydžiams W_1 ir W_2

$$\lambda_0(W_1, W_2) \leqslant 2.$$

Apibrėžkime C taip:

$$C(1/4)^\delta = 2, \quad \text{t.y.,} \quad C = 2^{1+2\delta}.$$

Akivaizdu, kad taip apibrėžus C, įvertis (5) teisingas visiems $\varepsilon \geqslant 1/4$, nes

$$C\varepsilon^\delta = 2^{1+2\delta}\varepsilon^\delta \geqslant 2^{1+2\delta}(1/4)^\delta = 2.$$

Teorema įrodyta.

Literatūra

[1] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 2, Wiley, New-York–London–Sydney (1966).

[2] R. Yanushkevichius, O. Yanushkevichiene, Stability of Levy's characterization theorem, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **70**, 457–472 (1985).

[3] Н.И. Фельдман, Улучшение оценки линейной формы от логарифмов алгебраических чисел, *Математический сборник*, **77**, N 3, 423–436 (1968).

[4] О.Л. Янушкявичене, Оценка устойчивости одной характеризации экспоненциального закона, *Теория вероятностей и ее применения*, **29**, N 2, 279–288 (1984).

[5] R. Yanushkevichius, O. Yanushkevichiene, Limit theorems in the problems of stability, *Lecture Notes in Math.*, **982**, 254–282 (1983).

On the stability of one characterization of the stable distributions

O. Yanushkevichiene, R. Yanushkevichius

As early as 1923, Georg Pólya wrote: "The Gaussian error law possesses the property that it remains valid under a linear combination of errors. The Gaussian error law can be characterized by this property to some extent – it is the only law that admits steadiness with respect to linear combinations of errors". The idea of using linear combinations of i.i.d. random variables to characterize the stable distributions has been extended by P. Lévy. We investigate the stability of this characterization.