Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 405–410

Об иррациональности значений тригонометрических функций

Юозас МАЧИС (MII)
e-mail: jmacys@ktl.mii.lt

Знаем (или не раз видели в справочниках) многие значения тригонометрических функций – и, как правило, они иррациональны. Например, знаем, когда косинус равен 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, а других рациональных значений и не помним.

А может их и не бывает? Ну почему же – бывают. Скажем, совсем просто указать угол, косинус которого равен $\frac{1}{7}$ – это, например, $\arccos\frac{1}{7}$. Другими словами, мы должны уточнить свой вопрос: может ли $\cos\alpha^\circ$, если α – рациональное число, быть рациональным (и не равным 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1)?

Давайте сначала займемся более легким вопросом: может ли $\cos n^\circ$, если n – целое число, быть рациональным (и не равным 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1)?

Самым естественным способом сначала представляется следующий: вычислять значения и смотреть, что же получается. Знаем значения тригонометрических функций для углов 30° и 45°, следовательно, просто найти и значения для $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ – достаточно воспользоваться формулами разности углов. Но теперь все „известные“ углы делятся на 15, и теряем надежду получить еще что-нибудь.

Впрочем, переживать еще рано – можно вычислить значения тригонометрических функций угла в 18°. Отправляемся от очевидного равенства $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$. К левой части можно применить формулу косинуса тройного угла, но приятнее обойтись без нее: $\cos 54^\circ + \cos 18^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ + \cos 18^\circ$, $2\cos 36^\circ \cos 18^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ + \cos 18^\circ$, $2\cos 36^\circ = 2\sin 18^\circ + 1$, $2(1 - 2\sin^2 18^\circ) = 2\sin 18^\circ + 1$, $4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$, $\left(2\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Поскольку $\sin 18^\circ > 0$, то $2\sin 18^\circ + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Теперь можно вычислить $\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, затем значения функций угла $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$, а тогда и значения функций всех углов, кратных 3°.

Теперь число градусов всех рассматриваемых углов делится на 3, и мы опять застряли. Конечно, можно было бы выразить $\cos 3^\circ$ через $\cos 1^\circ$. Поскольку $\cos 3^\circ$ уже знаем, то решив полученное кубическое уравнение, нашли бы $\cos 1^\circ$. Но кубическое уравнение решать трудно и неинтересно, а тут еще $\cos 3^\circ$ неприятен. Поступим иначе. Отправимся от равенства

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Тогда $\cos 60^\circ + \cos 20^\circ = \frac{1}{2} + \cos 20^\circ$, $2\cos 40^\circ \cos 20^\circ = \frac{1}{2} + \cos 20^\circ$, $4\left(2\cos^2 20^\circ - 1\right)\cos 20^\circ = 1 + 2\cos 20^\circ$, $8\cos^3 20^\circ - 6\cos 20^\circ - 1 = 0$.

Получили уравнение с целыми коэффициентами, кубическое относительно $\cos 20^\circ$. Известно, что если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами имеет имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, то q является делителем старшего коэффициента, а p – делителем свободного члена. Поэтому рациональными корнями уравнения $8x^3 - 6x - 1 = 0$ могли бы быть лишь числа из множества $\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\}$, однако легко убедиться, что ни одно из них не подходит. В нашем случае и того проще: поскольку $\cos 60^\circ < \cos 20^\circ < \cos 0^\circ$, то $\frac{1}{2} < \cos 20^\circ < 1$, и $\cos 20^\circ$ быть рациональным не может.

Вообще говоря, это уравнение можно решить в кубических и квадратных радикалах, но вряд ли это интересно. Мало того, невозможно при этом обойтись без комплексных чисел. А в принципе – решив уравнение нашли бы функции угла 20°, тогда и угла $2^\circ = 20^\circ - 18^\circ$, наконец угла $1^\circ = 2^\circ : 2$. Вычислив значения всех „целых“ углов до 45°, убедились бы, что других рациональных значений, кроме известных, не получаем. Тогда из формул приведения следует, что это верно и для всех целых n.

Мы ставили перед собой задачу доказать, что $\cos n^\circ$ рациональных значений (кроме упомянутых) не принимает, но фактически это еще не сделали. Впрочем, кое-что мы сделали: хотя и не вычислили $\cos 20^\circ$, но доказали его иррациональность.

Теперь легко доказать, например, что $\cos 10^\circ$ также иррационален. Допустим противное – что $\cos 10^\circ$ рационален. Согласно формуле косинуса двойного угла $\cos 20^\circ = 2\cos^2 10^\circ - 1$, и правая часть равенства рациональна, а левая – иррациональна. Противоречие.

Из этого доказательства совершенно ясно: если косинус двойного угла иррационален, то иррационален и косинус одинарного угла.

Вообще, если косинус кратного угла иррационален, то иррационален и косинус одинарного угла (например, поскольку $\cos 30^\circ$ иррационален, то иррационален и $\cos 1^\circ$ или $\cos 6^\circ$). Это доказать просто, опираясь на следующее утверждение: косинус кратного угла $\cos n\alpha$ выражается в виде многочлена степени n относительно $\cos\alpha$ с целыми коэффициентами. Оно просто доказывается при помощи математической индукции, но мы сформулируем и докажем выриант этого утверждения, более удобный для дальнейшего изложения.

Лемма 1. *$2\cos n\alpha$ выражается в виде многочлена n-ой степени относительно $2\cos\alpha$ с целыми коэффициентами, причем старший коэффициент равен единице:*

$$2\cos n\alpha = (2\cos\alpha)^n + a_{n-1}(2\cos\alpha)^{n-1} + \dots. \tag{1}$$

Доказательство. Если $n = 1$, то $2\cos\alpha = 2\cos\alpha$. Если $n = 2$, то $2\cos 2\alpha = (2\cos\alpha)^2 - 2$.

Поскольку $\cos(n+2)\alpha + \cos n\alpha = 2\cos\alpha(n+1)\alpha$, то $\cos(n+2)\alpha = 2\cos\alpha\cos(n+1)\alpha - \cos n\alpha$. Поэтому если наше утверждение верно для n и $n+1$, то оно верно и для $n+2$. Согласно принципу математической индукции, лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $\cos n\alpha$ *иррационален, то и* $\cos\alpha$ *иррационален.*

Доказательство. Предположим противное – что $\cos\alpha$ рационален. Тогда согласно лемме 1 $\cos n\alpha$ тоже рационален. Противоречие. Лемма доказана.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы убедиться в иррациональности $\cos n^\circ$ (кроме случаев, когда он равен 0, $\pm\frac{1}{2}$, ±1).

Поскольку $\cos 20^\circ$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ иррациональны, то на основании леммы 2 иррациональны и $\cos 1^\circ$, $\cos 2^\circ$, $\cos 3^\circ$, $\cos 4^\circ$, $\cos 5^\circ$, $\cos 6^\circ$, $\cos 9^\circ$, $\cos 10^\circ$, $\cos 15^\circ$.

Поскольку иррационален $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$, то иррациональны и $\cos 8^\circ$, $\cos 12^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\cos 24^\circ$, $\cos 36^\circ$. (Впрочем, конкретное значение $\sin 18^\circ$ нас не интересует – достаточно убедиться, что оно иррационально. Делается это аналогично как и в случае $\cos 20^\circ$, ибо $\sin 18^\circ$ удовлетворяет уравнению $4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$, полученному выше.)

Просмотрим остальные значения. Первое из них – $\cos 7^\circ$. Умножив 7° на 26, получим 182°. Поскольку $\cos 182^\circ = -\cos 2^\circ$ иррационален, то иррационален и $\cos 7^\circ$.

Далее идет $\cos 11^\circ$. Поскольку $11^\circ \cdot 17 = 187^\circ$, а $\cos 187^\circ = -\cos 7^\circ$ иррационален, то $\cos 11^\circ$ иррационален тоже.

Так можно проверить все значения до $\cos 89^\circ$ (разумеется, автор это проделал; при этом возможны и некоторые усовершенствования перебора). Тогда из формул приведения следует, что и при всех других целых n рациональными могут быть лишь значения косинуса 0, $\pm\frac{1}{2}$, ±1. Из тех же формул следует, что то же утверждение верно и для $\sin n^\circ$. Нетрудно разобраться и с тангенсами, но мы это пока отложим.

Впрочем, мы уже многому научились, и, например, доказать, что $\cos 17^\circ$ иррационален, теперь умеем в нескольких словах: косинус кратного угла $\cos 30 \cdot 17^\circ = \cos(540^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ иррационален, поэтому и косинус одинарного угла $\cos 17^\circ$ иррационален.

Аналогично можно сократить и доказательство факта, что $\cos n^\circ$ иррационален.

Знаем, что $\cos 60^\circ$ рационален, а $\cos 45^\circ$ и $\cos 20^\circ$ – иррациональны. Поскольку $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$ иррационален, то иррациональны также $\cos 40^\circ$ и $\cos 80^\circ$. На остальные (от 5 до 85) числа, кратные числу 5, делится число $N = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$, а поскольку остаток числа N при делении на 180 равен 150, то $\cos N^\circ$ иррационален. Поэтому иррациональны и косинусы делителей числа N.

Если брать числа от 1 до 89, которые не делятся на на 5, то их наименьшим общим кратным является число $M = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89$. Если разделить M на 180, получается остаток 72 (в этом убедится легко, если перемножить не сами числа, а их остатки от деления на 180, например, вместо $2^8 \cdot 3^4 = 36 \cdot 2^6 \cdot 3^2 = 36(30+2)(10-1)$ можно брать $36 \cdot 2(10-1)$, далее $72 \cdot (-1) = -72$ и т. п.). Поскольку $\cos 72°$ иррационален, то иррационален $\cos M°$, а следовательно и косинусы всех делителей числа M.

Итак, мы убедились, что $\cos n°$ (исключая значения 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1) принимает лишь иррациональные значения. Оказывается, что то же верно не только для целых аргументов, но вообще для любых рациональных, т. е. значений косинусов $\cos\frac{m°}{n}$ (m, n – целые).

Существует красивое геометрическое доказательство этого факта (см. [1]). К сожалению, оно длинновато, и, кроме того, понятно желание иметь короткое алгебраическое доказательство.

Впрочем, на самом деле мы уже знаем не только то, что косинус целого аргумента иррационален – многое знаем и о дробных аргументах. Например, ясно, что $\cos\frac{20°}{17}$ иррационален, поскольку $20°$ является кратным угла $\frac{20°}{17}$.

Однако вопрос остается открытым для таких углов, как $\frac{60°}{17}$, $\frac{180°}{17}$ – косинус кратных аргументов рационален, а тогда теорема 1 не работает (если $\cos n\alpha$ рационален, то о $\cos\alpha$ ничего определенного сказать нельзя: хотя $\cos 180° = 0$ рационален, но $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ иррационален, а $\cos 60° = \frac{1}{2}$ – рационален).

Поэтому осталось рассмотреть углы $\frac{m \cdot 60°}{n}$, или (что одно и то же) углы $\frac{m \cdot 360°}{n}$ (понятно, в таком виде записывается любой рациональный аргумент: $\frac{p°}{q} = \frac{p \cdot 360°}{360q}$). Докажем, что $\cos\frac{m \cdot 360°}{n}$ иррационален всегда, за исключением значений 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1. Тем самым у нас будет новое доказательство, что косинус с целочисленным аргументом из рациональных значений тоже принимает лишь перечисленные.

Нам потребуется аналог приведенного выше утверждения о рациональных корнях многочлена. Впрочем, им удобно пользоваться и при доказательстве иррациональности $\cos 18°$ и $\cos 20°$, приведенном выше.

Лемма 3. *Если старший коэффициент многочлена с целыми коэффициентами равен 1, то рациональные корни многочлена являются целыми числами.*

Доказательство. Допустим, что многочлен

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

имеет рациональный корень $x_0 = \frac{p}{q}$; можем считать, что у p и q нет других общих делителей, кроме ± 1. Тогда справедливо равенство

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Умножим обе его части на q^{n-1}:

$$\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0.$$

Все слагаемые левой части, начиная со второго, являются целыми числами, поэтому и $\frac{p^n}{q}$ – целое число. Но у p и q нет общих множителей, поэтому $q = \pm 1$. Это означает, что $x_0 = \pm p$, и рациональный корень является целым числом. Лемма доказана.

Положим в формуле (1) $\alpha = \frac{m\cdot 360^\circ}{n}$ и обозначим $2\cos\frac{360^\circ m}{n} = x$. Тогда

$$2\cos 360^\circ m = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots,$$

или

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots - 2 = 0. \tag{2}$$

Предположим, что $\cos\frac{360^\circ m}{n}$ рационален. Тогда и $2\cos\frac{360^\circ n}{m} = x$ рационален. Поскольку старший коэффициент многочлена (2) равен 1, то его рациональные корни согласно лемме 3 целы, поэтому $2\cos\frac{360^\circ m}{n}$ является целым числом. Но $\left|2\cos\frac{360^\circ m}{n}\right| \leqslant 2$, и $2\cos\frac{360^\circ m}{n}$ может равняться лишь 0, ± 1, ± 2, а сам косинус $\cos\frac{360^\circ m}{n}$ – лишь 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1.

Итак, мы доказали, что $\cos\frac{m^\circ}{n}$ всегда иррационален, за исключением тех случаев, когда он равен 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1. Можно сказать и так: $\cos r^\circ$ при рациональных r всегда иррационален, за исключением значений $r = 60k$ и $r = 180k + 90$, $k \in \mathbf{Z}$.

Поскольку $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{2}{1+\cos 2\alpha} - 1$, то $\operatorname{tg}^2\alpha$ может быть рациональным лишь если $\cos 2\alpha$ рационален, т. е. когда $\cos 2\alpha = 0$, $\pm\frac{1}{2}$, 1. Если $\cos 2\alpha = 0$, то $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$; если $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg}^2\alpha = 3$; если $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{3}$; если $\cos 2\alpha = 1$, то $\operatorname{tg}^2\alpha = 0$. Видим, что $\operatorname{tg} r^\circ$ при рациональных r может быть рациональным лишь когда $\operatorname{tg} r^\circ = 0$ и $\operatorname{tg} r^\circ = \pm 1$, т. е. при $r = 180k$ и $r = 180k \pm 45$, $k \in \mathbf{Z}$.

Еще проще с синусом: если у $\sin r^\circ$ аргумент r рационален, то и аргумент $90 - r$ у $\cos(90^\circ - r^\circ)$ рационален. Следовательно, $\sin r^\circ$ при r рациональном тоже может принимать рациональные значения лишь 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1. Иными словами, $\sin r^\circ$ при рациональном r всегда иррационален, за исключением значений $r = 90k$ и $r = 180k \pm 30$, $k \in \mathbf{Z}$.

Впрочем, мы собственно доказали даже чуть-чуть больше: $\operatorname{tg}^2 r^\circ$, $r \in \mathbf{Q}$, всегда иррационален, за исключением значений 0, $\frac{1}{3}$, 1, 3. Из равенства $\operatorname{tg}^2 r^\circ = \frac{1}{\cos^2 r^\circ} - 1$ следует, что $\cos^2 r^\circ$ (а поэтому и $\sin^2 r^\circ = 1 - \cos^2 r^\circ$) из рациональных значений может принимать лишь 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1.

Полученные результаты представим в виде следующего утверждения.

Теорема. *Если аргумент в градусах выражается рациональным числом, то значение синуса и косинуса (за исключением 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1) и тангенса (за исключением 0, ± 1) иррациональны. Более того, квадраты значений синуса и косинуса (за исключением 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1) и квадраты значений тангенса (за исключением 0, $\frac{1}{3}$, 1, 3) иррациональны.*

Таким образом, намного шире стал круг известных нам иррациональных чисел: если раньше мы знали (и умели доказать), что иррациональными являются числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и т. п., то теперь убедились, что иррациональны „почти все“ значения тригонометрических функций, если аргумент выражается рациональным числом градусов: $\sin 17^\circ$, $\sin \frac{1^\circ}{17}$, $\cos 19^\circ$, $\operatorname{tg} \frac{2^\circ}{7}$ и т. д.

Мало того – мы сейчас можем утверждать, что, например, $\arcsin \frac{1}{3}$, выраженный в градусах, представляет собой иррациональное число. Действительно, предположим противное – пусть $\arcsin \frac{1}{3} = r^\circ$, $r \in \mathbf{Q}$. Тогда $\sin r^\circ = \frac{1}{3}$. Но мы знаем, что синус рационального числа градусов либо иррационален, либо равен 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1. Пришли к противоречию. Аналогично убеждаемся, что иррациональным числом градусов выражаются $\arcsin r$ (r – рационально, $r \neq 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$), $\arccos r$ (r – рационально, $r \neq 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$) и $\operatorname{arctg} r$ (r – рационально, $r \neq 0, \pm 1$).

И наконец – предостережение: мы доказали, что $\sin 1^\circ$ иррационален, но это не означает, что $\sin 1$ (синус одного радиана) иррационален. Если же перейти на язык радианов, то мы доказали, что $\sin \frac{\pi}{17}$, $\cos 17\pi$ и вообще $\sin r\pi$, $\cos r\pi$, $\operatorname{tg} r\pi$ (r рационально) иррациональны, за исключением хорошо известных значений.

Впрочем, можно доказать, что $\sin 1$, $\cos \frac{1}{17}$ и вообще $\sin r$, $\cos r$, $\operatorname{tg} r$ (аргумент r – не равное нулю рациональное число радиан) являются иррациональными, но это уже другая тема.

Литература

[1] А. Нивен, *Числа рациональные и иррациональные*, Мир, Москва (1966) (см. приложение книги: И.М. Яглом, *Доказательство иррациональности значений тригонометрических функций*, с. 168–187).

Apie trigonometrinių funkcijų reikšmių iracionalumą

J. Mačys

Pateiktas trumpas algebrinis įrodymas, kad racionaliuoju laipsnių skaičiumi išreiškiamo argumento sinuso reikšmės (išskyrus $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$), kosinuso reikšmės (išskyrus $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$) ir tangento reikšmės (išskyrus $0, \pm 1$) iracionalios.