

# Spūdaus skysčio tekėjimo išorinėje srityje lygčių aproksimacijos problemos

Teresė LEONAVIČIENĖ (MII)\*

el. paštas: *terese.brazauskaite@vpu.lt*

## 1. Uždavinio formulavimas

Šiame darbe nagrinėjamas klampaus spūdaus skysčio tekėjimo išorinėje srityje linearizuoto uždavinio aproksimacijos klausimas.

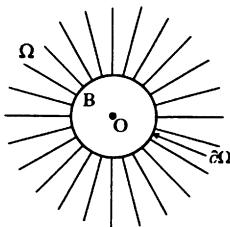
Tarkime, kad nagrinėjama sritis  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  turi tolydų kontūrą, o koordinatinių pradžios taškas nepriklauso nagrinėjamai sričiai (1 pav.).

Nagrinėjamas linearizuotas uždavinys turi tokį pavidalą:

$$\begin{cases} -\mu_1 \Delta \mathbf{v} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \nabla \sigma - \sigma \nabla \Phi = \mathbf{F}, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} (\rho_0 \mathbf{v}) = -\operatorname{div} (\sigma \mathbf{w}), & x \in \Omega, \\ \mathbf{v} = 0, & x \in \partial \Omega, \\ \mathbf{v}(x) \rightarrow 0, \quad \sigma(x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.1)$$

kur  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 \geq -\frac{2}{3}\mu_1$ ,  $\Phi$  – potencialas, kuris gali būti „didelis“,  $\mathbf{F}$ ,  $g$  ir  $\mathbf{w}$  – žinomi dydžiai, o  $\sigma$  ir  $\mathbf{v}$  – sistemos nežinomieji. Linearizuotai sistemai pritaikytas dekompozicijos metodas, aprašytas [2]. Dekompozicija taikoma greičio atžvilgiu:  $\mathbf{v} = \nabla \varphi + \mathbf{u}$ . Po dekompozicijos (1.1) sistema suskyla į trijų paprastesnių uždavinių visumą. Linearizuotos sistemos (1.1) sprendinys  $(\sigma, \mathbf{v})$  randamas apibrėžus tiesinį atvaizdį  $\mathcal{L}: \tau \rightarrow \sigma$ :

i) žinomam dydžiui  $\tau$  sprendžiamas Noimano tipo uždavinys



1 pav. Sritis  $\Omega$ .

\*Darbas atliktas remiant Lietuvos valstybiniam mokslo ir studijų fondui, sutartis T-576

$$\begin{cases} \Delta_{\rho_0} \varphi = -\operatorname{div}(\tau \mathbf{w}), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, & x \in \partial \Omega, \\ \varphi(x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.2)$$

kur  $\Delta_{\rho_0} = \operatorname{div}(\rho_0(x) \nabla)$ ,  $\rho_0 = \rho_* \exp \Phi$ . Išsprendę šį uždavinį, surandame  $\varphi$ .

ii) sprendžiame Stokso tipo sistemą:

$$\begin{cases} -\mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho_0 \nabla(\Pi/\rho_0) = \mathbf{G}, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}) = 0, & x \in \Omega, \\ \mathbf{u} = -\nabla \varphi, & x \in \partial \Omega, \\ \mathbf{u}(x) \rightarrow 0, \quad \Pi(x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.3)$$

kur

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = & \mathbf{F} + (2\mu_1 + \mu_2) \nabla(\rho_0^{-2} \nabla \rho_0 \mathbf{w} \tau) - (2\mu_1 + \mu_2) \nabla(\rho_0^{-1} \nabla \rho_0 \nabla \varphi) \\ & - (2\mu_1 + \mu_2) \rho_0^{-1} \nabla \rho_0 \operatorname{div} \frac{\tau \mathbf{w}}{\rho_0} + (2\mu_1 + \mu_2) \nabla \frac{g}{\rho_0}. \end{aligned}$$

Iš (1.3) surandame  $(\mathbf{u}, \Pi)$ .

iii)  $\sigma$  randame iš transporto lygties:

$$\begin{cases} \sigma + (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \left( \frac{\sigma \mathbf{w}}{\rho_0} \right) = \Pi, & x \in \Omega, \\ \sigma(x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.4)$$

Linearizuotos sistemos (1.1) sprendinys  $(\mathbf{v}, \sigma)$  randamas kaip  $(\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla \varphi, \sigma)$ , kur  $\sigma$  – operatoriaus  $\mathcal{L}$  nejudamas taškas:  $\varphi$  randamas iš (1.2) lygties, kur  $\tau = \sigma$ ,  $(\mathbf{u}, \Pi)$  – iš (1.3) lygties, kur  $\tau = \sigma$ .

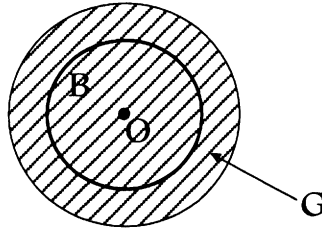
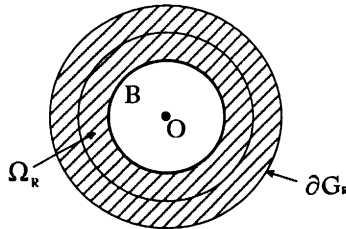
Šiame darbe pateiksime formalų (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) uždavinių aproksimacijos modelį, kuris galėtų būti realizuotas modeliuojant spūdaus klampaus skysčio tekėjimą skaitiniais metodais.

Pirmasis uždavinys, kuris kyla nagrinėjant uždavinius išorinėje srityje, tai – begalinių sričių keitimas baigtinėmis sritimis.

## 2. Srities $\Omega$ aproksimavimas

Norėdami begalinę sritį  $\Omega$  pakeisti baigtine sritimi, konstruosime rutulių seką  $\{G_R\}$ , kur  $R \rightarrow \infty$ ,  $R \geq 1$ .  $\Omega_R = G_R \cap \Omega$  – sritis, kurioje spėsime aproksimuotą uždavinį. Kai  $R \rightarrow \infty$ , tai  $\Omega_R \rightarrow \Omega$ . Kadangi uždavinys begalybėje keičiamas uždaviniu baigtinėje srityje, tai, suprantama, kad turime suformuluoti ir papildomas kraštines sąlygas ant krašto  $\partial G_R$ , pakeisiančias sąlygas, suformuluotas begalybei. Norėdami įvertinti tokios aproksimacijos paklaidą, sprendinio ieškosime remdamiesi [3, 4] darbuose pateiktomis idėjomis. Tegul aproksimuoto uždavinio sprendinį sudaro dvi komponentės (sprendinys turi asimptotinę išraišką), kurių viena yra atitinkamai suformuluoto vidinio uždavinio srityje  $G$ , o antroji – išorinio uždavinio srityje  $\Omega$  sprendinys. Sprendinį užrašysime 3 skyrelyje, o dabar pateiksime nagrinėjamas sritis.

2 pav. pavaizduota sritis  $G$ , kurioje bus nagrinėjamas vidinis uždavinys.

2 pav. Sritis  $G$ .3 pav. Sritis  $\Omega_R$ .

Jei  $\xi \in G$ , o  $R > 1$ , tai  $x = \xi R$ ,  $x \in G_R$ .

3 pav. pavaizduosime sritį  $\Omega_R$ , kurioje nagrinėjamas aproksimuotas uždavinys. Išsiaiškinę begalinės srities  $\Omega$  aproksimacijos klausimą, pereikime prie pagalbinių uždavinių aproksimacijos.

### 3. Formali pagalbinių uždavinių aproksimacija

Kaip jau esame minėję, šiame darbe detaliau suformuluosime (1.1) uždavinio pagalbinių uždavinių aproksimacijas.

Pirmiausia, panagrinėkime Noimano tipo uždavinio (1.2) aproksimaciją srityje  $\Omega_R$ :

$$\begin{cases} -\Delta_{\rho_0} \varphi^R = \Psi, & x \in \Omega_R, \\ \frac{\partial \varphi^R}{\partial n} = 0, & x \in \partial \Omega, \\ \varphi^R = 0, & x \in \partial G_R. \end{cases} \quad (3.1)$$

Aproksimacijos uždavinio sprendinio ieškosime asimptotine išraiška:

$$\varphi^R \simeq \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k} (\Phi_k(\xi) + \varphi_k(x)), \quad (3.2)$$

kur  $\varphi_0 = \frac{c_0}{2\pi|x|} + O(|x|^{-(2+\epsilon)})$  yra tikslus (1.2) uždavinio sprendinys ([1]).

Istatę  $\varphi_0$  į (3.2), turime:

$$\varphi_0 + R^{-1} \Phi_1\left(\frac{x}{R}\right) = R^{-1} \left( \frac{c_0}{2\pi\xi} + \Phi_1(\xi) \right) + O(R^{-2}), \quad \text{kai } R \rightarrow \infty,$$

o iš (3.1) trečiosios lygties randame  $\Phi_1(\xi) = -\frac{c_0}{2\pi\xi}$ ,  $\xi \in \partial G$ .

$\Phi_1(\xi)$  yra vidinio uždavinio

$$\begin{cases} -\Delta_{\rho_0} \Phi_1(\xi) = 0, & \xi \in G, \\ \Phi_1(\xi) = -\frac{c_0}{2\pi\xi}, & \xi \in \partial G, \end{cases} \quad (3.3)$$

sprendinys.

Nustatysime  $\varphi_1(x)$ . Nulio aplinkoje skleisime funkciją  $\Phi_1(\xi)$  Teiloro eilute:

$$\Phi_1(\xi) = \Phi_1(0) + O(|\xi|). \quad (3.4)$$

Kadangi ant srities  $\Omega$  krašto  $\partial\Omega$  turime Noimano tipo kraštinę sąlygą, tai randame:

$$\frac{\partial\varphi^R}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n} \left( \varphi_0 + R^{-1}(\Phi_1(\xi) + \varphi_1(x)) \right) \Big|_{\partial\Omega}.$$

Istatę (3.4) į paskutiniąją lygybę, turime:

$$\frac{\partial\varphi^R}{\partial n} = 0 + \frac{\partial}{\partial n} \left( R^{-1}(\Phi_1(0) + \varphi_1(x)|_{\partial\Omega}) \right) + O(R^{-2}). \quad (3.5)$$

Kadangi  $\frac{\partial\varphi^R}{\partial n}$  turi tenkinti (3.1) antrąją lygtį, tai iš (3.5) gauname

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi_1(x) = -\frac{\partial}{\partial n} \Phi_1(0), \quad x \in \partial\Omega.$$

Taigi,  $\varphi_1(x)$  yra išorinio uždavinio

$$\begin{cases} -\Delta_{\rho_0} \varphi_1(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial n} = -\frac{\partial\Phi_1(0)}{\partial n}, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

sprendinys ir  $\varphi_1(x) \sim O(|x|^{-1})$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ .

Tuomet formaliai:

$$|\varphi^R(x) - \varphi(x)| = |R^{-1}(\Phi_1(\xi) + \varphi_1(x)) + O(R^{-2})|, \quad x \in \Omega_R.$$

Vadinasi,  $|\varphi^R(x) - \varphi(x)| = O(R^{-1})$ , kai  $R \rightarrow \infty$ ,  $x \in \Omega$ .

Pereikime prie Stokso tipo uždavinio aproksimacijos:

$$\begin{cases} -\mu_1 \Delta u^R (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} u^R + \rho_0 \nabla (\Pi^R / \rho_0) = G, & x \in \Omega_R, \\ \operatorname{div} (\rho_0 u^R) = 0, & x \in \Omega_R, \\ u^R = -\nabla \varphi, & x \in \partial\Omega, \\ u^R = 0, & x \in \partial G_R. \end{cases} \quad (3.6)$$

Šio uždavinio sprendinio ieškome pavidalu:

$$u^R \simeq u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k} \left( U_k \left( \frac{x}{R} \right) + u_k(x) \right), \quad (3.7)$$

$$\Pi^R \simeq \Pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k} \left( \frac{1}{R} P_k \left( \frac{x}{R} \right) + p_k(x) \right), \quad (3.8)$$

kur  $(u_0, \Pi_0)$  – tikslus (1.3) uždavinio sprendinys srityje  $\Omega$  ([1]):

$$u_0 = \mathfrak{U}(\theta) + O(|x|^{-1-\varepsilon}), \quad \Pi_0 = \pi(\theta) + O(|x|^{-2-\varepsilon}).$$

Remdamiesi analogiškais samprotavimais kaip ir Noimano tipo uždaviniui, gauname, kad

$$U_1(\xi) = -\mathfrak{U}(\theta), \quad \xi \in \partial G,$$

ir  $U_1(\xi)$  yra vidinio uždavinio

$$\begin{cases} -\mu_1 \Delta U_1(\xi) - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} U_1(\xi) + \rho_0 \nabla (P_1/\rho_0) = \mathbf{G}, & \xi \in G, \\ \operatorname{div} (\rho_0 U_1(\xi)) = 0, & \xi \in G, \\ u_1(\xi) = -\mathfrak{U}(\theta), & \xi \in \partial G \end{cases}$$

sprendinys.  $u_1(x)$  yra išorinio Stokso tipo uždavinio

$$\begin{cases} -\mu_1 \Delta u_1(x) - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} u_1(x) + \rho_0 \nabla (p_1(x)/\rho_0) = \mathbf{G}, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} (\rho_0 u_1(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ u_1(x) = -U_1(0), & x \in \partial \Omega \end{cases}$$

sprendinys. Parašysime formalų aproksimacijos paklaidos įvertį:

$$|u^R(x) - u(x)| = \left| R^{-1} \left( U_1 \left( \frac{x}{R} \right) + u_1(x) \right) + O(R^{-2}) \right|, \quad x \in \Omega_R.$$

Taigi, formaliai  $|u^R - u| = O(R^{-1})$ ,  $x \in \Omega$ .

Analogiškai galime aproksimuoti ir transporto uždavinį (1.4).

Srityje  $\Omega_R$  aproksimuojame transporto uždavinį:

$$\begin{cases} \sigma^R + (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \left( \frac{\sigma^R \mathbf{w}}{\rho_0} \right) = \Pi^R, & x \in \Omega_R, \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0, & x \in \partial \Omega. \end{cases} \quad (3.9)$$

Tegul šio uždavinio sprendinio išraiška:

$$\sigma^R \simeq \sigma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k} \left( \frac{1}{R} \mathcal{G}_k \left( \frac{x}{R} \right) + \sigma_k(x) \right).$$

Iš [5] žinome, kad funkcijos  $\sigma$  ir  $\Pi$  turi tas pačias sferines komponentes. Todėl formaliai  $\sigma^R$  ieškosime pavidalu:

$$\sigma^R \simeq \Pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k} \left( \frac{1}{R} P_k \left( \frac{x}{R} \right) + \sigma_k(x) \right). \quad (3.10)$$

Statome (3.10) ir (3.8) į (3.9):

$$R^{-1} \sigma_1(x) + (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \left( \left[ \Pi_0 + R^{-1} \left( \frac{1}{R} P_1 \left( \frac{x}{R} \right) + \sigma_1(x) \right) \right] \frac{\mathbf{w}}{\rho_0} \right) = R^{-1} p_1(x).$$

Tuomet  $\sigma_1$  ir  $\mathcal{G}_1(\xi)$  nustatome taip:

$$\sigma_1(x) + (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \left( \frac{\sigma_1(x) \mathbf{w}}{\rho_0} \right) = p_1(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\mathcal{G}_1(\xi) = P_1(\xi) = -\pi(\theta).$$

Formaliai įvertinkime skirtumą:

$$|\sigma^R - \sigma| = \left| R^{-1} \left( \frac{1}{R} \mathcal{G}_1(\xi) + \sigma_1(x) \right) + O(R^{-2}) \right|, \quad x \in \Omega_R.$$

Turime, kad formali aproksimacijos paklaida transporto uždaviniui yra  $|\sigma^R - \sigma| = O(R^{-1})$ . Taigi, visų trijų pagalbinių uždavinių aproksimacijos paklaida yra  $O(R^{-1})$  eilės.

#### 4. Formali linearizuotos sistemos aproksimacija

Kai jau esame išsprendę visus tris pagalbinius uždavinius, pagal dekompozicijos metodo apibrėžimą, remdamiesi tiesiniu atvaizdžiu  $\mathcal{L}: \tau^R \rightarrow \sigma^R$ , galime sukonstruoti formalų linearizuotos sistemos sprendinį  $(v^R, \sigma^R)$  ir formaliai įvertinti tokios aproksimacijos paklaidą.

Glaustai pateiksime aproksimuoto linearizuoto uždavinio sprendinio paieškos algoritmą:

- i) pasirenkame  $\tau_0^R$ ,
- ii) sprendžiame Noimano tipo uždavinį ir nustatome  $\varphi_0^R$ ,
- iii) sprendžiame Stokso tipo uždavinį ir sužinome  $(u_0^R, \Pi_0^R)$ ,
- iv) iš transporto lygties randame  $\sigma_0^R$ .

Tuomet, tarę, kad  $\tau_1^R = \sigma_0^R$ , vėl kartojame ii)–iv) žingsnius, nustatome  $\sigma_1^R$  ir t.t. Iš [1] žinome, kad  $\mathcal{L}$  – sutraukiantis atvaizdis specialiose svorinėse erdvėse su atitinkamai apibrėžta norma  $\|\cdot\|$ . Tuomet  $\sigma^R$ , kuris turi (3.10) išraišką, yra operatoriaus  $\mathcal{L}$  nejudamas taškas, t.y.,  $\sigma^R$  ir atitinkami  $u^R$ ,  $\varphi^R$  bus linearizuoto uždavinio sprendinys  $(v^R, \sigma^R)$ , kur  $v^R = u^R + \nabla \varphi^R$ . Todėl procesą galima tęsti tol, kol pasiekiamo norimą tikslumą.

Vadinasi, kiekvienoje srityje  $\Omega_R$  gauname seką:

$$\sigma_0^R \rightarrow \sigma_1^R \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n^R.$$

Pereikime prie algoritmo paklaidos įverčio.

Jau žinome, kad Noimano tipo, Stokso tipo ir transporto lygties aproksimacijos uždavinius galime išspręsti darydami  $O(R^{-1})$  eilės paklaidą.

Formaliai įvertinsime linearizuoto uždavinio sprendinio paklaidą  $\|v - v^R\| + \|\sigma - \sigma^R\|$ . Kiekvienam  $\varepsilon > 0$  egzistuoja toks  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , kad

$$\begin{aligned} \|v - v^R\| &\leq \|v - v_n\| + \|v_n - v_n^R\| + \|v_n^R - v^R\| \leq 2\varepsilon + \|v_n - v_n^R\| \\ &\leq 2\varepsilon + |u_n - u_n^R| + |\nabla\varphi_n - \nabla\varphi_n^R| + |\sigma_n - \sigma_n^R|, \end{aligned}$$

kur  $\{v_n\}$  – teoriškai gaunamų sprendinių seka srityje  $\Omega$  ([1]), o  $\{v_n^R\}$  – formalių aproksimacijų seka srityje  $\Omega_R$ .  $v_n = \nabla\varphi_n + u_n$ , o  $v_n^R = \nabla\varphi_n^R + u_n^R$ .

Naudodami formalius pagalbinių uždavinių įverčius, gauname

$$\|v - v^R\| \leq 2\varepsilon + O(R^{-1}).$$

Todėl pakankamai mažiems  $\varepsilon$ :

$$\|v - v^R\| \simeq O(R^{-1}).$$

## Literatūra

- [1] T. Leonavičienė, K. Pileckas, Asymptotic behaviour at infinity of exterior three-dimensional steady compressible flow. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, (2002) (to appear).
- [2] A. Matsumura and T. Nishida, Initial boundary value problems for equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, *Comm. Math. Phys.*, **89**, 445–464 (1983).
- [3] S.A. Nazarov and M. Specovius-Neugebauer, Approximation of exterior problems. Optimal conditions for the Laplacian, *Analysis*, **16**, 305–324 (1996).
- [4] S.A. Nazarov and M. Specovius-Neugebauer, Approximation of exterior boundary value problems for the Stokes system, *Asymptotic Anal.*, **14**, 233–255 (1997).
- [5] S.A. Nazarov, A. Sequeira and J.H. Videman, Asymptotic behaviour at infinity of three-dimensional steady viscoelastic flows, *Pacific J. of Math.* (2002) (to appear).

## The approximation problems of solutions of the compressible fluid flow in an exterior domain

T. Leonavičienė

The approximation of solutions of the three-dimensional steady compressible flow (linearized problem) in an exterior domain is studied. The formal error estimates are obtained.