

О значениях тригонометрических функций числового аргумента

Юозас МАЧИС (МИИ)

e-mail: jmacys@ktl.mii.lt

В статье [1] рассмотрены элементарные подходы к доказательству того, что $\cos 1^\circ$ иррационален (а также иррациональны все значения тригонометрических функций аргумента, выражаемого рациональным количеством градусов – разумеется, за исключением хорошо знакомых значений $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ для синуса или косинуса и значений $0, \pm 1$ для тангенса или котангенса). Цель этой статьи – показать, как элементарно можно убедиться, что $\sin 1$ и $\cos 1$, а также $\sin \frac{1}{n}$ и $\cos \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (обращаем внимание – теперь аргумент числовой, т.е. измеряется в радианах!) иррациональны.

Сначала докажем так называемые неравенства Тейлора для функций $\sin x$ и $\cos x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} \quad (1)$$

и

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - \frac{x^{4m-2}}{(4m-2)!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - \frac{x^{4m-2}}{(4m-2)!} + \frac{x^{4m}}{(4m)!} \quad (2)$$

(ср. [2]). Начнем с доказательства неравенства $\sin x < x$. Поскольку у функции $x - \sin x$ производная $(x - \sin x)' = 1 - \cos x$ положительна, то функция возрастает, $x - \sin x > 0 - \sin 0$, т.е. $\sin x < x$. Подобным образом $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}$, поскольку производная $(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!})' = -\sin x + x$ положительна (это уже доказано!), поэтому $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} > \cos 0 - 1 + \frac{0^2}{2!}$, т.е. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}$. Опять $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$, ибо $(\sin x - x + \frac{x^3}{3!})' = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} > 0$. Теперь ясно, что $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, поскольку производная $(-\cos x + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})' = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}$ положительна. Продолжая получаем неравенства (1) и (2).

Для читателя может представлять интерес, как выглядело бы строгое доказательство методом математической индукции.

Не трудно убедиться, что неравенство (1) можно переписать в следующем виде:

$$(-1)^{n+1} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sin x \right) > 0, \quad (3)$$

(в самом деле, при $n = 2m$ получаем левое неравенство, а при $n = 2m + 1$ — правое).

Аналогично неравенство (2) записывается как

$$(-1)^n \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \cos x \right) > 0 \quad (4)$$

(при $n = 2m$ получаем правую часть, а при $n = 2m - 1$ — левую часть неравенства).

Для $n = 1$ неравенства (3) и (4) превращаются соответственно в неравенства $\sin x < x$ и $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}$, которые уже доказаны. Предположим, что они справедливы при $n = k$:

$$(-1)^{k+1} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} - \sin x \right) > 0, \quad (5)$$

$$(-1)^k \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \cos x \right) > 0. \quad (6)$$

Докажем, что они справедливы при $n = k + 1$, т.е. что

$$(-1)^k \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sin x \right) > 0, \quad (7)$$

$$(-1)^{k+1} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} - \cos x \right) > 0. \quad (8)$$

В самом деле, производная функции, стоящей в левой части неравенства (7), равна $(-1)^k \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \cos x \right)$, и на основании неравенства (6) положительна. Поэтому левая часть неравенства (7) — возрастающая функция, и ее значение в точке x больше значения в точке 0, равного нулю. Неравенство (7) доказано.

Аналогично производная левой части неравенства (8) равна левой части неравенства (5) (ибо $(-1)^{k+2} = (-1)^k$), следовательно, на основании неравенства (5) положительна. Поэтому функция от x , стоящая в левой части неравенства (8), возрастает и больше нуля — значения в точке 0. Неравенство (8) доказано.

На основании принципа математической индукции неравенства (3) и (4) (а тем самым и неравенства (1) и (2)) доказаны для любого n .

Сейчас мы уже подготовлены к доказательству иррациональности $\sin 1$ и $\cos 1$.

Положим $x = 1$ в формулах (1) и (2):

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots - \frac{1}{(4m-1)!} < \sin 1 < 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots - \frac{1}{(4m-1)!} + \frac{1}{(4m+1)!}, \quad (9)$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(4m-2)!} < \cos 1 < 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(4m-2)!} + \frac{1}{(4m)!}. \quad (10)$$

Предположим, что $\sin 1$ является рациональным числом, $\sin 1 = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}$). Перепишем последнее равенство в виде $\sin 1 = \frac{4p}{4q}$. Неравенство (9) напишем именно с этим q , а вместо $\sin 1$ подставим $\frac{4p}{4q}$:

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots - \frac{1}{(4q-1)!} < \frac{4p}{4q} < 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots - \frac{1}{(4q-1)!} + \frac{1}{(4q+1)!}.$$

Умножим последнее неравенство на $(4q+1)!$:

$$(4q+1)! - \frac{(4q+1)!}{3!} + \dots - \frac{(4q+1)!}{(4q-1)!} < 4p(4q-1)!(4q+1) < (4q+1)! - \dots - \frac{(4q+1)!}{(4q-1)!} + 1.$$

Видим, что левая часть неравенства является целым числом, а правая — целым числом, на единицу большим. Получаем, что целое число $4p(4q-1)!(4q+1)$ оказалось между двумя последовательными целыми числами, а такого быть не может. Противоречие означает, что наше предположение о рациональности числа $\sin 1$ было неверным. Следовательно, $\sin 1$ является иррациональным числом.

Иррациональность числа $\cos 1$ доказывается аналогично. Предположим, что $\cos 1$ рационален, т.е. $\cos 1 = \frac{p}{q} = \frac{4p}{4q}$. Тогда в неравенстве (10) полагая $m = q$, имеем:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(4q-2)!} < \frac{4p}{4q} < 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(4q-2)!} + \frac{1}{(4q)!}.$$

Умножаем это неравенство на $(4q)!$:

$$(4q)! - \frac{(4q)!}{2!} + \dots - \frac{(4q)!}{(4q-2)!} < 4p \cdot (4q-1)! < (4q)! - \frac{(4q)!}{2!} + \dots - \frac{(4q)!}{(4q-2)!} + 1.$$

Опять целое число $4p(4q-1)!$ оказалось между двумя последовательными целыми числами, а этого быть не может. Противоречие.

Для автора явилось неожиданностью, что в литературе по элементарной математике доказательство иррациональности $\sin 1$ и $\cos 1$ отсутствует, в то время как доказательство иррациональности числа e можно найти в энциклопедиях элементарной математики и даже в учебниках (см., например, [2]).

Обсудим еще следующий вопрос: что можно утверждать наверняка, зная, что $\sin 1$ и $\cos 1$ иррациональны. Во-первых, не удастся отсюда сделать вывод, что $\sin 2$ или $\cos 2$ иррациональны. Действительно, если $\sin \alpha$ иррационален, то вовсе не обязательно, что рационален и $\sin 2\alpha$: например, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ иррационален, но $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ рационален. Аналогично, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ иррационален, но $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ рационален.

С другой стороны, если $\cos \alpha$ рационален, то рационален и $\cos n\alpha$. В самом деле, если $\cos \alpha$ рационален, то рационален и $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$. Но тогда рационален и $\cos 3\alpha$, поскольку $\cos 3\alpha = (\cos 3\alpha + \cos \alpha) - \cos \alpha = 2\cos 2\alpha \cos \alpha - \cos \alpha$. Рационален и $\cos 4\alpha$, ибо $\cos 4\alpha = (\cos 4\alpha + \cos 2\alpha) - \cos 2\alpha = 2\cos 3\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha$ и т.д. Следовательно, рационален и $\cos n\alpha = \cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha - \cos(n-2)\alpha = 2\cos(n-1)\alpha \cos \alpha - \cos(n-2)\alpha$ (математическая индукция!).

Из этого факта сразу следует, что $\cos \frac{1}{n}$ иррационален. В самом деле, если бы $\cos \frac{1}{n}$ был рациональным, то рациональным был бы и $\cos(n \cdot \frac{1}{n}) = \cos 1$, а это не так.

Впрочем, не удастся таким же образом доказать, что $\sin \frac{1}{n}$ иррационален (ведь если $\sin \alpha$ рационален, то не обязательно рационален $\sin n\alpha$). Но можно непосредственно опереться на неравенство (1). Предположим противное, — что $\sin \frac{1}{n}$ рационален, $\sin \frac{1}{n} = \frac{p}{q} = \frac{4p}{4q}$. В неравенстве (1) положим $x = \frac{1}{n}$, $m = q$. Тогда

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + \dots + \frac{1}{(4q-1)!n^{4q-1}} < \frac{4p}{4q} < \frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + \dots - \frac{1}{(4q-1)!n^{4q-1}} + \frac{1}{(4q+1)!n^{4q+1}}.$$

Умножив это неравенство на $(4q+1)!n^{4q+1}$, получаем, что целое число $4p(4q-1)!(4q+1)n^{4q+1}$ оказывается между целыми числами

$$N = (4q+1)!n^{4q} - \frac{(4q+1)!n^{4q-2}}{3!} + \frac{(4q+1)!n^{4q-4}}{5!} - \dots - \frac{(4q+1)!n^2}{(4q-1)!}$$

и $N+1$, а этого быть не может.

Разумеется, таким же образом можно доказывать иррациональность $\cos \frac{1}{n}$ — при этом нам не понадобилась бы формула для $\cos n\alpha$ (или ее следствия).

К сожалению, таким методом не удастся доказать, что иррациональны, например, $\sin 2$ или $\cos \frac{2}{7}$. На самом же деле верно, что значения $\sin r$, $\cos r$, $\operatorname{tg} r$ (число r рационально и не равно 0) всегда иррациональны. Но это намного более трудная задача.

Вернемся к числу e . В статье [3] показано, как при помощи теории пределов можно доказать, что число e иррационально. Разумеется, проще воспользоваться производными.

Докажем неравенство Тейлора ($x > 0$) для функции e^{-x} (для функции e^x оно гораздо сложнее — см. [2]):

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < e^{-x} < 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (11)$$

Его доказательство совершенно аналогично доказательству неравенств (1) и (2). Поскольку $e^{-x} < 1$, то производная функции $f(x) = e^{-x} - 1 + x$, равная $-e^{-x} + 1$, положительна, поэтому $e^{-x} - 1 + x > f(0) = 0$, т.е. $1 - x < e^{-x}$. Однако производная функции $e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!}$ равна $-e^{-x} + 1 - x$ и отрицательна, поэтому $e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} < 0$, а значит $e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!}$. Продолжая процедуру, получаем формулу (11).

Если доказывать формулу (11) строго, методом математической индукции, то ее удобно записать в следующем виде:

$$(-1)^m \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^m \frac{x^m}{m!} - e^{-x} \right) > 0 \quad (12)$$

(при $m = 2n - 1$ получаем левую часть неравенства (11), а при $m = 2n -$ правую). При $m = 1$ имеем уже доказанное неравенство $1 - x < e^{-x}$. Если оно уже доказано для m , то оно справедливо и для $m + 1$:

$$(-1)^{m+1} \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^m \frac{x^m}{m!} - (-1)^{m+1} \frac{x^{m+1}}{m!} - e^{-x} \right) > 0.$$

В самом деле, левая часть последнего неравенства возрастает, поскольку ее производная положительна в силу неравенства (12).

Теперь положим $x = 1$ в неравенстве (11):

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(2n-1)!} < e^{-1} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!}. \quad (13)$$

Отсюда уже вытекает, что e – число иррациональное. Предположим противное, – что e рационально, $e = \frac{q}{p}$ ($q, p \in \mathbb{N}$). Тогда $e^{-1} = \frac{p}{q} = \frac{2p}{2q}$. Полагая в неравенстве (13) $n = q$, получаем

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(2q-1)!} < \frac{2p}{2q} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(2q-1)!} + \frac{1}{(2q)!}.$$

Умножим неравенство на $(2q)!$. Тогда

$$(2q)! - \frac{(2q)!}{1!} + \dots - \frac{(2q)!}{(2q-1)!} < 2p(2q-1)! < (2q)! - \frac{(2q)!}{1!} + \dots - \frac{(2q)!}{(2q-1)!} + 1.$$

В левой и правой частях неравенств стоят два последовательных целых числа, и между ними не может втиснуться целое число. Противоречие.

Из иррациональности числа e с очевидностью следует, что иррациональны и числа $e^{\frac{1}{n}}$, $\pm n \in \mathbb{N}$ (т.е. числа $\frac{1}{e}$, \sqrt{e} , $\sqrt[3]{\frac{1}{e}}$ и т.п.). Однако доказать иррациональность чисел e^n (а тем самым и e^r , $r \in \mathbb{Q}$) значительно труднее.

Литература

- [1] Ю. Мачис, Об иррациональности значений тригонометрических функций, *Liet. matem. rink.*, **42** (spec. nr.), 405–410 (2002).
- [2] Н. Виленкин, О. Ивашев-Мусатов, С. Шварцбурд, *Алгебра и математический анализ. Учебник для школ с усиленным изучением математики*, ч. 1, ч. 2. Москва, Просвещение (1983, 1984).
- [3] Ю. Мачис, Почему число e иррационально? *Alfa plus Omega*, **3**, 56–61 (2002) (на литовском языке).

Apie skaitinio argumento trigonometrinių funkcijų reikšmės

J. Mačys

Elementariai įrodyta, kad reikšmės $\sin 1$, $\cos 1$, taip pat $\sin \frac{1}{n}$, $\cos \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (argumentas skaitinis) iracionalios.