Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 597–602

Obligacijų rinkos modeliavimas trinominio medžio pagalba

Jelena ARTAMONOVA (VU), Remigijus LEIPUS (VU, MII)*
el. paštas: remigijus.leipus@maf.vu.lt

Reziumė. Šiame darbe nagrinėjamas diskretaus laiko obligacijų rinkos Ho–Lee modelio apibendrinimas. Pateikiamos būtinos ir pakankamos sąlygos tam, kad obligacijų rinkos modelis būtų nearbitražinis ir nepriklausantis nuo kelio.

Raktiniai žodžiai: bearbitražė obligacijų rinka, Ho–Lee modelis.

1. Įvadas

Ho ir Lee (1986) metais pasiūlė obligacijų rinkos modelį, kuris remiasi binominiu medžiu. Šio modelio konstrukcija yra analogiška gerai žinomam akcijų rinkos Cox, Ross ir Rubinstein (1979) binominiam modeliui, kuriame laikoma, kad akcijos kaina iš esamos būsenos sekančiu laiko momentu gali patekti tik į dvi būsenas, t.y., pakilti arba nukristi. Ho ir Lee (1986), remdamiesi arbitražo metodologija, pasiūlė obligacijų kainas aprašyti pradinės būsimosios normos (angl. forward rate) kreivės, veikiamos tam tikros perturbacijų funkcijos, pagalba.

Tam, kad tiksliau aprašyti Ho–Lee modelį, tarkime, kad kiekvienam išpirkimo momentui $N = 0, ..., N^*$ ($N^* < \infty$) egzistuoja nulinio kupono obligacija, kurios kaina momentu n yra $P(n, N) > 0$ ($n = 0, \ldots, N$). Tarkime, kad išpirkimo momentu N išmokamas 1 litas, t.y., su kiekvienu $N \leqslant N^*$ teisinga lygybė $P(N, N) = 1$.

Obligacijų kainų dinamika Ho–Lee modelyje aprašoma lygtimis

$$P_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(n, N) = \frac{P_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}}(n-1, N)}{P_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}}(n-1, n)}\, h(\varepsilon_n; n, N), \qquad P(0, N) > 0;$$

čia $n = 1, \ldots, N$, $N \leqslant N^*$, ε_n yra atsitiktiniai dydžiai įgyjantys reikšmes -1 ir $+1$, o $h(\cdot; n, N) : \{-1; 1\} \to (0, \infty)$ yra tokios teigiamos „perturbacijų" funkcijos, kad $h(\cdot; N, N) = 1, \forall N = 1, \ldots, N^*$ ir $h(-1; n, N) < h(1; n, N)$. Taikydami nearbitražinės rinkos prielaidą ir laikydami, kad binominis medis yra susirišantis, Ho ir Lee parodė kad homogeniniu atveju, t.y., kuomet $h(\cdot; n, N) = h(\cdot; N-n)$, egzistuoja toks skaičius $\alpha \in (0, 1)$ kuriam

$$h(-1; N-n) = \frac{\Delta^{N-n}}{\alpha+(1-\alpha)\Delta^{N-n}}, \quad h(1; N-n) = \frac{1}{\alpha+(1-\alpha)\Delta^{N-n}};$$

*Remia Lietuvos VMSF programa „Lietuvos ekonomikos matematiniai modeliai makroekonominiams procesams prognozuoti" (registracijos Nr. C-03004).

čia

$$\Delta = \frac{h(-1;1)}{h(1;1)} = \frac{\alpha h(-1;1)}{1-(1-\alpha)h(-1;1)}.$$

Įvairūs Ho–Lee binominio modelio apibendrinimai buvo nagrinėjami Jensen, Nielsen (1992), Sommer (1996), Leipaus (1999) ir kituose darbuose. Šiame darbe pateikiamas Ho–Lee modelio apibendrinimas, kuomet perturbacijų funkcija priklauso nuo trijų „šokų“, kurie gali būti tiek priklausomi tiek ir nepriklausomi vienas nuo kito. Bearbitražės obligacijų rinkos apibrėžimas, bei atitinkamo trinominio medžio sąvoka įvedami 2 skyrelyje. Trinominės bearbitražės obligacijų rinkos kriterijai pateikiami 3 skyrelyje.

2. Apibrėžimai ir sąvokos

Tegul Ω yra rinkos būsenų aibė, $\mathcal{F}$ žymi Ω poaibių σ algebrą; $\mathbb{F}$ yra σ algebrų šeima $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \cdots \subset \mathcal{F}_{N^*} = \mathcal{F}$, o $\mathbf{P}$ yra duotas tikimybinis matas erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$.

Laikysime, rinkoje yra nerizikingas vertybinis popierius, kurio kaina momentu n yra A_n, čia $\{A_n, n = 0, \ldots, N^*\}$ yra $\mathbb{F}$-numatoma teigiamų atsitiktinių dydžių seka, t.y., A_0 yra $\mathcal{F}_0$-matus, o A_n yra $\mathcal{F}_{n-1}$-matus atsitiktinis dydis kiekvienam $n \geqslant 1$. Sakykime, kad nuliniu momentu galime įsigyti $N^* + 1$ nulinio kupono obligacijų, kurių kainos yra $P(0,0), \ldots, P(0, N^*)$. Šiomis obligacijomis, kurių kainos yra $P(n, N), n = 1, \ldots, N, N \leqslant N^*$, prekiaujama momentais $n = 1, \ldots, N^*$. Laikoma, kad kainų procesas $\{P(n, N),\ n = 1, \ldots, N\}_{N \leqslant N^*}$ yra suderintas su filtracija $\mathbb{F}$ ir $P(N, N) = 1$ visiems $N \leqslant N^*$.

2.1 APIBRĖŽIMAS. Aibę

$$\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P}, \{A_n, n = 0, \ldots, N^*\}, \{P(n, N), n = 0, \ldots, N\}_{N \leqslant N^*}\big)$$

vadinsime diskretaus laiko obligacijų rinka.

2.2 APIBRĖŽIMAS. Diskretaus laiko obligacijų rinka yra *nearbitražinė*, jei egzistuoja toks $\mathbf{P}$-ekvivalentus matas $\mathbf{P}^*$, kad su kiekvienu $N \leqslant N^*$

$$\big\{P(n, N)/A_n, n = 0, \ldots, N\big\}$$

yra martingalas $\mathbf{P}^*$ atžvilgiu, t.y.,

$$\mathbf{E}^*\left(\frac{P(n, N)}{A_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \frac{P(n-1, N)}{A_{n-1}} \quad \text{visiems } n = 1, \ldots, N,\ N \leqslant N^*.$$

Toliau laikykime, kad rinkos būsenų aibė yra $\Omega = \{0, 1, 2\}^{N^*}$ ir matas $\mathbf{P}$ apibrėžtas taip:

$$\mathbf{P} = \left\{\tfrac{1}{3}\,\delta_0 + \tfrac{1}{3}\,\delta_1 + \tfrac{1}{3}\,\delta_2\right\}^{N^*};$$

$\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ yra σ algebra generuota pirmųjų $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{N^*}) \in \Omega$ koordinačių; čia ε_i $(i = 1, 2, \ldots, N^*)$ įgyja reikšmes 0,1,2; $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n, n = 0, \ldots, N^*\}$. Įvesime trinominio ir susirišančio medžio sąvokas.

2.3 APIBRĖŽIMAS. Aibė

$$\{P(0,N),\, P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(n,N);\ \varepsilon_i \in \{0,1,2\}, n=1,\dots,N, N \leqslant N^*\}$$

vadinama *trinominiu medžiu*, startuojančiu iš $\{P(0,N), N=0,\dots,N^*\}$.

Toliau trinominį medį vadinsime tiesiog medžiu ir žymėsime trumpai

$$\{P(0,N),\, P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(n,N)\}.$$

2.4 APIBRĖŽIMAS. Medis $\{P(0,N), P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(n,N)\}$ vadinamas *susirišančiu*, jei visiems $n=0,\dots,N$, $N \leqslant N^*$ ir $\tilde{\varepsilon}_i \in \{0,1,2\}$, tokiems, kad $\sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, galioja lygybė

$$P_{\tilde{\varepsilon}_1,\tilde{\varepsilon}_2,\dots,\tilde{\varepsilon}_n}(n,N) = P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(n,N) \tag{2.1}$$

Pastebėsime, kad binominio medžio atveju susirišančio medžiui apibrėžti pakanka, kad (2.1) sąlyga galiotų visoms $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ perstatoms $(\tilde{\varepsilon}_1,\dots,\tilde{\varepsilon}_n)$.

Tarkime, kad nerizikingo vertybinio popieriaus kainos yra nusakytos lygybėmis

$$\begin{aligned} A_n &= A_n(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{n-1}) \\ &= X_1 X_2(\varepsilon_1)\cdots X_n(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-1}), \quad n \geqslant 1,\ A_0 > 0; \end{aligned} \tag{2.2}$$

čia X_n: $\{0,1,\dots,2(n-1)\} \to \mathbb{R}_+, n \geqslant 2, X_1 > 0$. Apibrėžkime obligacijų kainų medį rekurentiškai:

$$\begin{gathered} P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(n,N) = P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}}(n-1,N) X_n(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-1}) h(\varepsilon_n; n, N), \\ n=1,2,\dots,N, N=1,\dots,N^*; \end{gathered} \tag{2.3}$$

čia $h(\cdot;n,N)$: $\{0,1,2\} \to \mathbb{R}_+$ yra atsitiktinės perturbacijų funkcijos, su visais $N = 1,\dots,N^*$ tenkinančios sąlygą $h(\cdot;N,N)=1$. Nesunku matyti, kad lygčių sistemos (2.3) sprendinys yra

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(n,N) &= P(0,N) \prod_{i=1}^n X_i(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{i-1}) \prod_{j=1}^n h(\varepsilon_j; j, N) \\ &= P(0,N) A_n \prod_{j=1}^n h(\varepsilon_j; j, N). \end{aligned}$$

Matematinės indukcijos metodu nesunku įrodyti patogų kriterijų, skirtą patikrinti ar duotasis medis yra susirišantis.

2.1 LEMMA. *Medis $\{P(0,N), P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(n,N)\}$, kur kainos $P(n,N)$ duotos* (2.3) *lygybe, yra susirišantis tada ir tik tada, kai visiems $2 < n \leqslant N$, $N \leqslant N^*$ ir dydžiams $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-2} \in \{0,1,2\}$ galioja lygybė*

$$P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-2},0,2}(n,N) = P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-2},1,1}(n,N) = P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-2},2,0}(n,N). \tag{2.4}$$

3. Bearbitražės trinominės obligacijų rinkos kriterijus

Tarkime, kad $\{A_n, n=0,\dots,N^*\}$ ir $\{P(n,N), n=0,\dots,N\}_{N\leqslant N^*}$ yra nerizikingo vertybinio popieriaus ir obligacijų kainos, nusakytos (2.2) and (2.3), atitinkamai. Toliau nagrinėkime (kaip ir klasikinio Ho–Lee modelio atveju) homogeninį atvejį. Tarkime, kad funkcija $h(\cdot;n,N)$ priklauso tik nuo skirtumo $N-n$, t.y., $h(\cdot;n,N)\equiv h(\cdot;N-n)$ ir $h(0;1)<h(1;1)<h(2;1)$.

Nusakysime dydžius $X_n(\cdot)$ ir $h(\cdot\,;\cdot)$, kuriems trinominis obligacijų rinkos modelis

$$\Big(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbf{P},\{A_n,n=0,\dots,N^*\},\{P(n,N),n=0,\dots,N\}_{N\leqslant N^*}\Big)$$

ir nearbitražinis ir nepriklausantis nuo kelio (angl. path-independent), t.y., seka $\{P(n,N)/A_n, n=0,\dots,N\}$ yra martingalas kažkurio $\mathbf{P}$-ekvivalentaus mato atžvilgiu ir medis $\{P(0,N), P_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(n,N)\}$ yra susirišantis visiems $N\leqslant N^*$.

3.1 TEOREMA. *Tegul nerizikingo vertybinio popieriaus kainos A_n ir obligacijų kainos $P(n,N)$ nusakytos lygybėmis* (2.2) *and* (2.3), *atitinkamai. Tegul perturbacijų funkcija tenkina sąlygą*

$$h^2(1;1)=h(0;1)h(2;1). \tag{3.1}$$

Šie du tvirtinimai yra ekvivalentūs:

1. *Obligacijų rinka*

$$\big(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbf{P},\{A_n,n=0,\dots,N^*\},\{P(n,N),n=0,\dots,N\}_{N\leqslant N^*}\big)$$

yra bearbitražė ir nepriklausanti nuo kelio.

2. *a) Visi santykiai* $\frac{X_n(s+r)}{X_n(s)}$, $r=0,1,2$, $s=0,1,\dots,2(n-2)$ *nepriklauso nuo būsenos s ir momento n; be to, jei $X_n(1)/X_n(0)=:\Delta$, tai $X_n(r)/X_n(0)=\Delta^r$;*

b) egzistuoja toks $\mathbf{P}$-ekvivalentus matas $\mathbf{P}^*$, kad visiems $n=2,\dots,N$, $N\leqslant N^*$ ir $r\in\{0,1,2\}$

$$\begin{aligned}h(r;N-n)=\Big(&\mathbf{P}^*\{\varepsilon_n=0\mid\mathcal{F}_{n-1}\}\Delta^{r(N-n)}+\mathbf{P}^*\{\varepsilon_n=1\mid\mathcal{F}_{n-1}\}\Delta^{(r-1)(N-n)}\\&+\mathbf{P}^*\{\varepsilon_n=2\mid\mathcal{F}_{n-1}\}\Delta^{(r-2)(N-n)}\Big)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1). Remiantis lygybėmis (3.2), turime

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*\Big(\frac{P(n,N)}{A_n}\mid\mathcal{F}_{n-1}\Big)&=\frac{P(n-1,N)}{A_{n-1}}\mathbf{E}^*\big(h(\varepsilon_n;N-n)\mid\mathcal{F}_{n-1}\big)\\&=\frac{P(n-1,N)}{A_{n-1}}\sum_{r=0}^{2}h(r;N-n)\mathbf{P}^*\{\varepsilon_n=r\mid\mathcal{F}_{n-1}\}=\frac{P(n-1,N)}{A_{n-1}}.\end{aligned}$$

Taigi, kiekvienam $N\leqslant N^*$ procesas $\{P(n,N)/A_n, n=0,\dots,N\}$ yra martingalas mato $\mathbf{P}^*$ atžvilgiu ir, remiantis apibrėžimu, obligacijų rinka

$$\big(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbf{P},\{A_n,n=0,\dots,N^*\},\{P(n,N),n=0,\dots,N\}_{N\leqslant N^*}\big)$$

yra bearbitražė.

Tam kad parodytume, jog atitinkamas medis yra susirišantis, remiantis 2.1 lema pakanka įrodyti lygybes (2.4). Į jas įsistatę (2.3), turime

$$\begin{aligned} X_n(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-2} + \tilde{\varepsilon}_{n-1}) h(\tilde{\varepsilon}_{n-1}; N-n+1) h(\tilde{\varepsilon}_n; N-n) \\ = X_n(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1}) h(\varepsilon_{n-1}; N-n+1) h(\varepsilon_n; N-n), \end{aligned} \tag{3.3}$$

čia $\tilde{\varepsilon}_{n-1} + \tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$, $n \leqslant N$. Remiantis *a*) sąlyga, lygybė (3.3) ekvivalenti

$$\Delta^{\tilde{\varepsilon}_{n-1} - \varepsilon_{n-1}} = \frac{h(\varepsilon_{n-1}; N-n+1) h(\varepsilon_n; N-n)}{h(\tilde{\varepsilon}_{n-1}; N-n+1) h(\tilde{\varepsilon}_n; N-n)}.$$

Remiantis lygybėmis (3.1) ir (3.2) lygybėmis, nesunku įsitikinti, kad pastaroji lygybė yra teisinga, t.y., obligacijų rinkos modelis yra nepriklausantis nuo kelio.

(1) $\Rightarrow$ (2). Bearbitražės rinkos sąlyga yra ekvivalenti

$$\sum_{r=0}^{2} h(r; N-n) \mathbf{P}^*\{\varepsilon_n = r \mid \mathcal{F}_{n-1}\} = 1 \tag{3.4}$$

kiekvienam $n \leqslant N$ ir $N \leqslant N^*$. Kaip matėme, rinkos modelis yra nepriklausantis nuo kelio (žr. (3.3)) tada ir tik tada, jei visiems $n \leqslant N$, $N \leqslant N^*$ galioja lygybė

$$\frac{X_n(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-2} + \tilde{\varepsilon}_{n-1})}{X_n(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1})} = \frac{h(\varepsilon_{n-1}; N-n+1)\, h(\varepsilon_n; N-n)}{h(\tilde{\varepsilon}_{n-1}; N-n+1)\, h(\tilde{\varepsilon}_n; N-n)}.$$

Pastarosios lygybės dešinioji pusė nepriklauso nuo būsenos $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-2}$, taigi, nesunku matyti, kad

$$\Delta^r = \frac{h(0; N-n+1) h(r; N-n)}{h(r; N-n+1) h(0; N-n)}, \quad r = 1, 2. \tag{3.5}$$

Iš čia, įsistatę $n = N$, gauname

$$\Delta^r = \frac{h(0; 1)}{h(r; 1)}.$$

Išsprendę (3.5) lygtis, gauname

$$\begin{aligned} h(r; N-n+1) &= h(0; N-n+1) \frac{h(r; 1)}{h(0; 1)} \Delta^{-r(N-n)} \\ &= h(0; N-n+1) \Delta^{-r(N-n+1)}. \end{aligned}$$

Iš šių lygybių ir (3.4) išplaukia (3.2).

Bendru atveju yra sudėtinga rasti sąlygas, garantuojančias atsitiktinių dydžių ε_n nepriklausomumą tikimybės $\mathbf{P}^*$ atžvilgiu, bei mato $\mathbf{P}^*$ vienatį. Tačiau, tuo atveju, jei papildomai reikalaujame, kad egzistuotų vienintelis $\mathbf{P}$-ekvivalentus matas

$$\mathbf{P}^* = \{\alpha_0 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2\}^{N^*},$$

tikimybės α_i, $i = 0, 1, 2$ randamos iš lygybių

$$\alpha_0 = \Big[\big(1 - h(1;1)\big)\big(1 - h(2;2)\big) - \big(1 - h(1;2)\big)\big(1 - h(2;1)\big)\Big]/D,$$

$$\alpha_1 = \Big[\big(1 - h(2;1)\big)\big(1 - h(0;2)\big) - \big(1 - h(2;2)\big)\big(1 - h(0;1)\big)\Big]/D,$$

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_0 - \alpha_1,$$

$$D := h(2;2)\big(h(1;1) - h(0;1)\big) + h(1;2)\big(h(0;1) - h(2;1)\big) + h(0;2)\big(h(2;1) - h(1;1)\big).$$

Akivaizdu, kad binominio medžio atveju, t.y., kai $k = 2$, gaunamos formulės sutampa su atitinkamomis formulėmis Ho–Lee modelyje.

Literatūra

1. J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein, Option pricing: a simplified approach, *Journal of Financial Economics*, **7**, 229–263 (1979).
2. T.S. Ho, S. Lee, Term structure movements and pricing interest rate contingent claim, *Journal of Finance*, **41**, 1011–1029 (1986).
3. R. Leipus, A squared binomial tree approach to discrete-time bond market modelling, in: B. Grigelionis *et al.* (Eds.), *Probability Theory and Math. Statist., Proceedings of the Seventh Vilnius Conference*, TEV, Vilnius, Utrecht (1999), pp. 429–440.
4. B.A. Jensen, J.A. Nielsen, *The Structure of Binomial Lattice Models for Bonds*, WP 92-17, Institute of Finance, Copenhagen Bussiness School (1992).
5. D. Sommer, *Continuous-Time Limits in Generalized Ho–Lee Framework under the Forward Measure*, Discussion paper No. B-276, University of Bonn (1996).

SUMMARY

J. Artamonova, R. Leipus. Bond market modelling using a trinomial tree

In this paper a generalization of the discrete-time Ho–Lee model to the trinomial case is considered. The necessary and sufficient conditions for such a bond model to be arbitrage-free and path independent are established.

Keywords: arbitrage-free bond market, Ho–Lee model.