Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 804–807

Apie Koši skirstinio charakterizaciją empirinio vidurkio savybėmis

Romanas JANUŠKEVIČIUS (VPU, MII)
el. paštas: romjan@takas.lt

Yra gerai žinoma, kad jei $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys Koši skirstinį, tai monomo X_1 ir empirinio vidurkio $\overline{X} = \overline{X}(n) = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ skirstiniai sutampa. P. Lévy jau atveju $n = 2$ įrodė, kad atvirkščias teiginys be papildomų sąlygų negali būti teisingas (žr., pavyzdžiui, [1], 17 skyrių).

Šias papildomas sąlygas išnagrinėjo B. Ramachandran ir C.R. Rao [2]. Buvo gautas toks rezultatas.

1 TEOREMA (B.Ramachandran, C.R. Rao [2]). *Tarkime, kad $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi neišsigimę vienodai pasiskirstę simetriniai atsitiktiniai dydžiai. Jei X_1* ir *$\overline{X}(n)$ skirstiniai sutampa bent dviems n reikšmėms $n = n_1$* ir *$n = n_2$ tokioms, kad santykis* $\log n_1/\log n_2$ *yra iracionalus, tai nagrinėjama atsitiktinė imtis $X_1, \ldots, X_n$ yra paimta iš Koši populiacijos.*

Toliau mes naudosime žymėjimą $\boldsymbol{L}(X) = \boldsymbol{L}(Y)$, jei norėsime pabrėžti, kad atsitiktinių dydžių X ir Y skirstiniai sutampa. Pastebėsime, kad 1 teoremoje nagrinejamos sąlygos – tai sąlygos tipo

$$\boldsymbol{L}(X_1) = \boldsymbol{L}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big) \tag{1}$$

skirtingiems $(a_1, \ldots, a_n)$ rinkiniams. Konkrečiai, rinkiniams $(1/n_1, \ldots, 1/n_1, 0, \ldots, 0)$ ir $(1/n_2, \ldots, 1/n_2, 0, \ldots, 0)$, kur $n_1 < n,\ n_2 < n$.

Stabiliųjų dėsnių charakterizacijos savybėmis tipo (1) buvo nagrinėjama daugelyje darbų (žr., pavyzdžiui, monografiją [3]). Čia paminėsime tik vieną iš jų, kuris reikalingas tolimesniame nagrinėjime.

2 TEOREMA (Y.H. Wang [4]). *Tarkime, kad $X_1, \ldots, X_n$ yra neišsigimę nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Šie atsitiktiniai dydžiai turi simetrinius Koši skirstinius tada ir tik tada, kai sąlyga* (1) *yra patenkinta bent vienam fiksuotam n, $n \geqslant 3$ ir visiems rinkiniams $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}_1^n$, kur*

$$\mathbf{C}_1^n = \Big\{(a_1, \ldots, a_n) | a_i \in \mathbf{R}^1,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1\Big\}.$$

Mūsų tikslas – pateikti naujus 1 ir 2 teoremų apie Koši skirstinio charakterizaciją empirinio vidurkio ir kitų tiesinių statistikų savybėmis įrodymus.

Pastebėsime, kad stabiliųjų dėsnių charakterizacijos simetrinių atsitiktinių dydžių klasėje yra nagrinėjamos ir E. Lukacs bei M.L. Eaton darbuose [5] ir [6].

Nauji 1 ir 2 teoremų įrodymai. Pradėsime nuo 1 teoremos įrodymo. Kadangi

$$L(X_1) = L\Big(\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i\Big) = L\Big(\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_i\Big),$$

tai

$$f(t) = f^{n_1}(t/n_1), \qquad f(t) = f^{n_2}(t/n_2), \tag{2}$$

kur $f(t)$ – atsitiktinio dydžio X_i charakteristinė funkcija.

Pastebėsime, kad jei $f(t)$ tenkina bent vieną iš sąryšių (2), tai ji nevirsta nuliumi visoje realiojoje t ašyje. Norėdami įrodyti šį teiginį, tarkime priešingai. Tarkime, kad egzistuoja $f(t_0)$ toks, kad $f(t_0) = 0$. Tada iš (2) gauname , kad $f(t_0/n_1) = 0$. Pažymėję $t_k = t_0/n_1^k$ gauname, kad egzistuoja seka t_k tokia, kad $t_k \downarrow 0$ ir $f(t_k) = 0$ $\forall k$, t.y., $\lim_{t_k \downarrow 0} f(t_k) = 0$.

Gavome prieštaravimą žinomiems teiginiams, kad $f(0) = 1$ ir $f(t)$ yra tolydi visoje ašyje.

Kadangi $f(t)$ nevirsta nuliumi, tai ją galime logaritmuoti visoje t ašyje. Pažymėkime

$$H(\log t) = \log f(t), \qquad u = \log t,\ t > 0.$$

Iš (2) gauname, kad

$$H(u) = n_1 H(u + \alpha_1), \qquad H(u) = n_2 H(u + \alpha_2), \tag{3}$$

kur $\alpha_1 = -\log n_1$, $\alpha_2 = -\log n_2$.

Pažymėkime dabar

$$G(u) = H(u)\exp(-u), \qquad -\infty < u < \infty.$$

Tada sąryšius (3) galima perrašyti taip:

$$G(u) = G(u + \alpha_1) = G(u + \alpha_2) \tag{4}$$

visoje realioje u ašyje.

Kadangi santykis $\alpha_1/\alpha_2 = \log n_1/\ log n_2$ pagal teoremos sąlygas yra iracionalus, t.y., periodai α_1 ir α_2 yra nebendramačiai, tai iš (4) darome išvadą, kad funkcija $G(u)$ yra konstanta, $G(u) \equiv C$ $\forall u \in (-\infty, \infty)$.

Pastebėsime dabar, kad ši konstanta yra reali. Iš tiesų, kadangi nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai X_i yra simetriniai, tai jų charakteristinė funkcija $f(t)$ yra reali.

Kadangi $f(0) = 1$, $f(t)$ – tolydi, reali ir nevirsta nuliumi visoje t ašyje, tai ji yra teigiama. Todėl šios funkcijos logaritmas $H(u)$ yra realus visoje u ašyje, o tuo pačiu reali ir funkcija $G(u)$, ir konstanta C.

Kadangi visiems realiems u

$$H(u) = G(u)\exp u = C\exp u,$$

tai visiems neneigiamiems t

$$H(\log t) = \log f(t) = Ct, \qquad f(t) = \exp(Ct). \tag{5}$$

Iš sąlygos $|f(t)| \leqslant 1$ nesunkiai gauname, kad $C \leqslant 0$. O kadangi nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra neišsigimę, tai $C < 0$. Pastebėsime, kad B.Ramachandran ir C.R. Rao darbe [2] pamiršta pareikalauti nagrinėjamų dydžių neišsigimimo. Tačiau akivaizdu, kad išsigimę nulyje atsitiktiniai dydžiai tenkina abi pagrindines funkcines lygtis (2), nes tokiu atveju $f(t) \equiv 1$ $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Sąryšis (5) neigiamiems t įrodomas elementariai:

$$f(-|t|) = f(t) = \exp(C|t|), \qquad \forall t \in (-\infty, \infty).$$

1 teorema įrodyta.

Pereiname prie 2 teoremos įrodymo. Pirmiausia pastebėsime, kad jei 2 teoremos sąlygos yra išpildytos, tai nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra simetriniai. Iš tiesų, iš (1) gauname, kad $f(-t) = f(-a_1 t) \dots f(-a_n t)$, jei tik $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}_1^n$. Tačiau akivaizdu, kad $(-a_1, \dots, -a_n)$ taip pat priklauso $\mathbf{C}_1^n$, todėl iš (1) šiam atvejui gauname, kad $f(t) = f(-a_1 t) \dots f(-a_n t)$.

Tai reiškia, kad visiems realiesiems t

$$f(t) = f(-a_1 t) \dots f(-a_n t) = f(-t) = \overline{f(t)},$$

t.y., $f(t)$ yra reali, o nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra simetriniai.

Dabar belieka pastebėti, kad vektoriai $(a_1, \dots, a_n)$ ir $(b_1, \dots, b_n)$ priklauso aibei $\mathbf{C}_1^n$, jei

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n_1} = 1/n_1, \qquad a_{n_1+1} = \dots = a_n = 0,$$

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{n_2} = 1/n_2, \qquad b_{n_2+1} = \dots = b_n = 0;$$

čia n_1 ir n_2 parinkti taip, kad santykis $\log n_1 / \log n_2$ būtų iracionalus. Tai reiškia, kad išpildytos visos 1 teoremos sąlygos, todėl X_i turi Koši skirstinį.

2 teorema įrodyta.

Literatūra

1. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 2, Wiley, New York London–Sydney (1966).
2. B. Ramachandran, C.R. Rao, Solution of functional equations arising in some regression problems and a characterization of the Cauchy law, *Sanhya*, ser. A, **32**(1), 1–30 (1970).
3. A.M. Kagan, J.V. Linnik, C.R. Rao, *Characterization Problems in Mathematical Statistics*, Wiley, New York (1973).
4. H. Wang, A functional equation and its application to the characterization of the Weibull and stable distributions, *J. Appl. Prob.*, **13**, 385–391 (1976).

5. E. Lukacs, Characterization of populations by properties of suitable statistics, in: *Proceedings Third Berkely symposium on mathematical statistics and probability*, vol. 2, Univ. of California Press (1956), pp. 195–214.
6. M.L. Eaton, Characterization of distributions by the identical distribution of linear forms, *J.Appl.Prob.*, **3**, 481–494 (1966).

SUMMARY

R. Januškevičius. On characterization of the Cauchy law by sample mean properties

The characterization of Cauchy distribution by assuming the identical distribution of a monomial and sample mean has been considered by B. Ramachandran, C.R. Rao, Y.H. Wang and other authors. The new proofs of Ramachandran-Rao and Wang's theorem are proposed in our paper.

Keywords: characterization theorems, stability theorems, Cauchy distribution.