Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 167–171

2005 m. Lietuvos moksleivių matematikos olimpiados uždavinių analizė

Juozas Juvencijus MAČYS (MII)
el. paštas: jmacys@ktl.mii.lt

Straipsnyje pateikiamos LIV Lietuvos moksleivių matematikos olimpiados (Visaginas, 2005–03–31) uždavinių sąlygos, sprendimas bei analizė.

IX–X klasės

1. *Su kuriomis n reikšmėmis skaičių aibę* $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ *galima suskirstyti į tris aibes su vienoda elementų suma*?

Atsakymas. Su visomis reikšmėmis $n = 3k + 2$, $n = 3k + 3$, $k \in \mathbb{N}$ (t.y. su reikšmėmis $n = 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \ldots$).

Sprendimas. Aišku, kad jei skaičių aibę $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ taip suskirstyti galima, tai $n > 3$ ir suma $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ dalijasi iš 3. Taigi n negali būti pavidalo $3m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$). Kitaip sakant, n negali būti pavidalo $6k - 2$ ir $6k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Įrodysime, kad kitais atvejais, kai 1) $n = 6k - 1$, 2) $n = 6k$, 3) $n = 6k + 2$ ir 4) $n = 6k + 3$, skaičių aibę norimu būdu suskirstyti galima. Priklausomai nuo n pavidalo skaičius grupuokime taip:

1) $\underbrace{1, 2, 3, 4, 5}, \underbrace{6, 7, 8, 9, 10, 11}, \ldots, \underbrace{6k-6, 6k-5, 6k-4, 6k-3, 6k-2, 6k-1}$;

2) $\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6}, \underbrace{7, 8, 9, 10, 11, 12}, \ldots, \underbrace{6k-5, 6k-4, 6k-3, 6k-2, 6k-1, 6k}$;

3) $\underbrace{1, 2, \ldots, 8}, \underbrace{9, 10, 11, \ldots, 14}, \ldots, \underbrace{6k-3, 6k-2, 6k-1, 6k, 6k+1, 6k+2}$;

4) $\underbrace{1, 2, \ldots, 9}, \underbrace{10, 11, \ldots, 15}, \ldots, \underbrace{6k-2, 6k-1, 6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3}$.

Kadangi $1+4 = 2+3 = 5$, $1+6 = 2+5 = 3+4$, $1+2+3+4+5 = 6+9 = 7+8$, $1+2+3+6 = 4+8 = 5+7$ bei $(k+1)+(k+6) = (k+2)+(k+5) = (k+3)+(k+4)$, t.y. kiekvieną skaičių grupę galima suskirstyti į tris dalis su vienoda suma, tai kiekvienu atveju aibės skaičius galime suskirstyti į tris aibes su vienoda suma.

Žodžiais šį sprendimą trumpai galima nusakyti taip: iš galo atmetinėjame šešetukus tol, kol aibėje liks 9, 8, 6 arba 5 pirmieji skaičiai, o su jais susitvarkyti mokame.

Kitas būdas. Kadangi $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = n(n+1)/2$, tai jeigu tą aibę galima suskirstyti į tris poaibius su vienoda suma, tai $n > 3$, o ta suma bus $n(n+1)/6$ (ir sveika). Bet vienas iš skaičių n ir $n+1$ yra lyginis, taigi $n(n+1)$ dar turi dalytis iš 3. Todėl arba n dalijasi iš 3, arba $n+1$ dalijasi iš 3, o kitokios reikšmės tikrai netinka.

Vadinasi, reikia ištirti reikšmes $n = 3k + 3$ ir $n = 3k + 2$ (o $n = 3k + 1$ netinka).

Įrodysime, kad kai $n = 3k + 2$, tai duotąją aibę padalyti į tris aibes su vienoda suma galima. Tikrai, kai $k = 1$, tai $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 4\} \cup \{2, 3\} \cup \{5\}$.

Tai indukcijos bazė. Dabar tarkime, kad aibę su $n = 3k + 2$ jau pavyko suskirstyti į tris su vienoda elementų suma: $\{1, 2, 3, \ldots, 3k+2\} = A \cup B \cup C$. Reikia parodyti, kad turint 3 naujus skaičius $3k+3, 3k+4, 3k+5$ vėl galima sudaryti tris reikiamas aibes. Iš aibės, turinčios 1, pašaliname tą 1 ir prijungiame prie jos $3k + 5$, prie kitos aibės prijungiame $3k + 4$, o prie trečios prijungiame 1 ir $3k + 3$. Tada visų aibių elementų sumos padidės skaičiumi $3k + 4$, taigi vėl bus lygios.

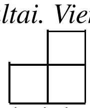
Remiantis matematinės indukcijos principu, aibę, kai $n = 3k+2$, suskirstyti reikiamu būdu galima.

Panašiai nagrinėjame ir atvejį $n = 3k+3$. Kai $k = 1, n = 6$, aibę nesunku suskirstyti į tris su vienoda elementų suma: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 6\} \cup \{2, 5\} \cup \{3, 4\}$.

Tarkime, kad jau pavyko aibę su $n = 3k + 3$ suskirstyti į tris su vienoda suma: $\{1, 2, 3, \ldots, 3k + 3\} = A \cup B \cup C$.

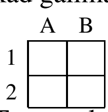
Įrodysime, kad tada galima suskirstyti ir aibę $\{1, 2, 3, \ldots, 3k + 3, 3k + 4, 3k + 5, 3k + 6\}$. Iš aibės, turinčios 1, tą 1 pakeičiame $3k + 6$, tada aibės suma padidės $3k + 5$. Prie kurios nors kitos aibės prijungiame $3k + 5$. Pagaliau prie likusios aibės prijungiame 1 ir $3k + 4$. Kadangi visų aibių suma buvo ta pati, padidėjo tiek pat, tai ir naujųjų aibių sumos lygios.

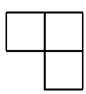
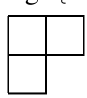
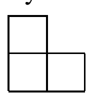
Remiantis matematinės indukcijos principu, teiginys įrodytas visiems $n = 3k + 3$.

2. *Kvadratinės lentos* 8×8 *kiekvienas vienetinis langelis nuspalvintas arba juodai, arba baltai. Vienu ėjimu lentoje galima pasirinkti bet kaip pasuktą trijų langelių „kampuką“*  *ir kiekvieną jo langelį perdažyti (juodą – baltai, baltą – juodai). Ar galima baigtiniu skaičiumi ėjimų visus langelius nuspalvinti baltai*?

Atsakymas. Galima.

Sprendimas. Įrodysime, kad galima pakeisti vieno konkretaus langelio spalvą, nekeičiant kitų. Aišku, kad tą langelį galima uždengti kvadratu 2×2. Įsitikinkime, kad galima perdažyti bet kurį kvadrato langelį. Pavyzdžiui, perdažykime langelį A1:



. Imkime kampukus , ,  ir juos paeiliui perdažykime. Tuomet langelių A2, B1 ir B2 spalva nepasikeitė, nes juos perdažėme du kartus, o langelį A1 perdažėme tris kartus, todėl jo spalva pasikeitė. Panašiai galime perspalvinti ir bet kurį kitą langelį. Taigi visą lentą nuspalvinti baltai galima.

3. *Stačiojo trikampio ABC statiniai $CA = 3$, $CB = 4$, CD yra trikampio aukštinė. Kampų ABC ir ACD pusiaukampinės kertasi taške M, o kampų BAC ir BCD pusiaukampinės kertasi taške N. Raskite atkarpos MN ilgį.*

Atsakymas. $MN = 1$.

Sprendimas. Pasidarykime brėžinį. Tegul kampo ACD pusiaukampinė yra CE, o kampo BCD pusiaukampinė – CF. Pažymėkime $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Kadangi trikampiai CAD, CDB statieji ir turi su $\triangle ABC$ po bendrą smailųjį kampą, tai $\angle BCD = \alpha$, $\angle ACD = \beta$. Vadinasi, $\angle CMB = 180° - \angle BCM - \angle CBM = 180° - (\alpha + \beta/2) - \beta/2 = 180° - \alpha - \beta = 90°$, ir trikampiai BMC ir BME lygūs pagal bendrą kraštinę ir du kampus prie jos. Vadinasi, $BE = BC (= 4)$ ir $CM = ME$.

Visiškai taip pat įrodome, kad $AF = AC(= 3)$ ir $CN = NF$. Trikampio EFC pagrindas $EF = AB - AE - FB = AB - (AB - BE) - (AB - AF) = BE + AF - AB = 4 + 3 - 5 = 2$, o M ir N – šoninių kraštinių vidurio taškai, todėl jo vidurinė linija $MN = EF/2 = 1$.

4. *Ar yra tokių natūraliųjų skaičių a, b ir c, kad*

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 4242\,?$$

Atsakymas. Ne.

Sprendimas. Kadangi $4242 = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 101$, tai kažkuris pradinės lygybės kairės pusės dauginamasis yra dalus iš 101. Galime laikyti, kad tai yra $a+b$. Tuomet $a+b \geqslant 101$ ir $(b+c)(c+a) \leqslant 42$. Iš paskutinės nelygybės gauname $a < a+c < (b+c)(c+a) \leqslant 42$ ir $b < (b + c)(c + a) \leqslant 42$, o jas sudėję – $a + b < 84$. Tai prieštarauja prielaidai, kad $a + b \geqslant 101$. Vadinasi, tokių natūraliųjų skaičių a, b ir c nėra.

XI–XII klasės

1. *Duoti* 2005 *skaičiai*

$$1^2\;\; 2^2\;\; 3^2 \ldots 2005^2$$

Prieš kiekvieną iš jų galima parašyti $+$ *arba* $-$. *Kokį mažiausią neneigiamą skaičių galima gauti atlikus veiksmus*?

Atsakymas. 1.

Sprendimas. Parodysime, kodėl negalime gauti 0, ir parodysime, kaip gauti 1. Kadangi iš duotųjų skaičių 1003 nelyginiai, tai atlikę su jais sudėties ir atimties veiksmus gausime nelyginį skaičių, todėl 0 gauti neįmanoma.

Duotus skaičius suskirstykime į grupes taip: pirmąją grupę tesudaro $1^2, 2^2, \ldots, 13^2$, kitas – aštuoni iš eilės einantys skaičiai, t.y. $(k + 1)$-ąją grupę sudaro $(8k + 6)^2$, $(8k + 7)^2, \ldots, (8k + 13)^2$. Sudėlioję joje ženklus $+ - - + - + + -$ ir atlikę veiksmus, gausime 0:

$$\begin{aligned}(8k + 6)^2 - (8k + 7)^2 - (8k + 8)^2 + (8k + 9)^2&\\ - (8k + 10)^2 + (8k + 11)^2 + (8k + 12)^2 - (8k + 13)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Dabar pirmoje grupėje reikia sudėlioti ženklus taip, kad rezultatas būtų 1. Tai galima padaryti taip: $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - 7^2 + 8^2 - 9^2 - 10^2 + 11^2 - 12^2 + 13^2 = 1$.

2. Žr. IX–X klasių 2 uždavinį.

3. *Apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Taškas M yra lanko AC (kuriam nepriklauso viršūnė B) vidurio taškas, o N yra lanko AB (kuriam nepriklauso viršūnė C) vidurio taškas. Atkarpos MN ir AB kertasi taške K. Įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras yra O. Įrodykite, kad KO yra lygiagreti kraštinei AC.*

Sprendimas. Pasidarome brėžinį. Pirmiausia parodysime, kad taškai B, N, K ir O priklauso vienam apskritimui. BM yra kampo ABC pusiaukampinė, nes taškas M yra lanko AC vidurio taškas. Analogiškai CN yra kampo BCA pusiaukampinė, taigi CN ir BM kertasi taške O. Kampai ONK ir OBK yra lygūs, nes remiasi į lygius lankus CN ir MA. Kadangi atkarpa KO yra matoma vienodais kampais iš taškų N ir B, tai taškai B, N, K ir O priklauso vienam apskritimui.

Dabar parodysime, kad kampai BAC ir BKO yra lygūs, o tai ir reiškia, jog AC yra lygiagreti KO. Kadangi B, N, K ir O priklauso apskritimui $BNKO$, tai kampai OKB ir ONB yra lygūs, nes remiasi į jo lanką OB. Taip pat ir kampai BAC ir BNC lygūs, nes remiasi į lanką BC. Taigi $\angle BAC = \angle BNC = \angle BNO = \angle BKO$.

4. *Skaičių seka $a_0, a_1, a_2, \ldots$ apibrėžiama sąlygomis $a_0 = 1$ ir $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$, $\quad n \geqslant 0$. Įrodykite, kad tokia seka yra vienintelė, ir raskite bendrąjį narį a_n.*

Atsakymas. $a_n = (n+1)(n+2)/2$.

Sprendimas. Pastebėkime, kad mūsų seka didėja: $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n} \geqslant a_n$. Taigi $a_n \geqslant a_0 = 1$ su kiekvienu neneigiamuoju sveikuoju n. Todėl $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n} \geqslant a_n + \sqrt{2} > a_n$, t.y. seka griežtai didėja.

Dabar lygybes

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_{n+1} + a_n}, \quad a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+2} + a_{n+1}}$$

pakėlę kvadratu ir atėmę pirmą iš antros, gauname $a_{n+2}^2 - 2a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) - a_n^2 = a_{n+2} - a_n$, arba $(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} - 1) = 0$. Bet kadangi $a_{n+2} - a_n > 0$, tai

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1. \tag{1}$$

Suraskime a_1. Kai $n = 0$, iš sąlygos gauname $a_1 = 1 + \sqrt{a_1 + 1}$, o lygtį išsprendę – $a_1 = 3$. Dabar galime nustatyti kitus sekos narius: $a_2 = 2a_1 - a_0 + 1 = 6$, $a_3 = 2a_2 - a_1 + 1 = 10$, ir t.t. Matome, kad kiekvienas sekos narys nustatomas vienareikšmiškai. Taigi egzistuoja nebent viena seka, tenkinanti uždavinio sąlygas. Atpažinti seką 1, 3, 6, 10, … nesunku – tai sumos $1 + 2 + \cdots + n$. Pirmieji keturi apskaičiuoti nariai tenkina lygybę $a_n = (n+1)(n+2)/2$, todėl pabandykime šį bendrąjį narį patikrinti:

$$\begin{aligned} a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \sqrt{\frac{(n+2)(n+3)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n + 2 = \frac{(n+2)(n+3)}{2} = a_{n+1}. \end{aligned}$$

Taigi ši seka ir yra vienintelė seka, tenkinanti uždavinio sąlygas.

Pravartu žinoti ir kitą būdą – kaip nespėliojant iš (1) sąryšio rasti a_n (pasiskaityti plačiau apie tai galima knygelėje [1]).

Parašykime (1) sąryšį n kartų, keisdami indekso reikšmes:

$$\begin{aligned} &a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1, \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1, \quad \ldots \\ &a_3 = 2a_2 - a_1 + 1, \quad a_2 = 2a_1 - a_0 + 1. \end{aligned}$$

Sudėję šias lygybes ir sutraukę, turime $a_{n+1} = a_n + a_1 - a_0 + n$. Kadangi $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, tai $a_{n+1} = a_n + 2 + n$. Pastarąją lygybę vėl rašome n kartų: $a_{n+1} = a_n + 2 + n$, $a_n = a_{n-1} + 2 + n - 1, \ldots, a_3 = a_2 + 2 + 2$, $a_2 = a_1 + 2 + 1$. Sudėję gauname $a_{n+1} = a_1 + 2n + (1 + 2 + \cdots + n) = 3 + 2n + n(n+1)/2 = (n^2 + 5n + 6)/2 = (n+2)(n+3)/2$. Vadinasi, $a_n = (n+1)(n+2)/2$.

Beje, ruošdamiesi 2006 metų Pasaulio moksleivių matematikos olimpiadai (IMO) Liublianoje, pasirengimo stovykloje Vilniuje Lietuvos komandos nariai nagrinėjo žymiai sunkesnį uždavinį (ką jie sprendė IMO ir kaip pasirodė – žr. [2]) :

Raskite visas sekas, apibrėžiamas sąlygomis $a_0 = 1$ *ir* $(a_{n+1} - a_n)^2 = a_{n+1} + a_n$.

Išspręskime jį. Kadangi

$$a_{n+1} = (2a_n + 1 \pm \sqrt{8a_n + 1})/2, \tag{2}$$

tai nesunku įsitikinti, kad pirmuosius narius galima išreikšti formule $(k-1)k/2$, $k \in \mathbb{N}$ (čia k – visai nebūtinai sekos nario numeris). Bet jeigu $a_n = (k-1)k/2$, tai remiantis (2) formule

$$a_{n+1} = \big((k-1)k + 1 \pm \sqrt{4k^2 - 4k + 1}\big)/2 = \big(k^2 - k + 1 \pm (2k-1)\big)/2,$$

t.y. $a_{n+1} = k(k+1)/2$ arba $a_{n+1} = (k-2)(k-1)/2$.

Taigi atsakymas būtų toks: sąlygą tenkina bet kuri seka, kurios $a_0 = 1$, o kiekvienas sekantis narys yra paskutiniajam gretimas skaičius iš begalinio masyvo

$$\{0, 1, 3, 6, 10, \ldots\}$$

arba 0, jei tas paskutinysis skaičius buvo 0; pavyzdžiui, tokia yra seka 1, 0, 0, 0, 1, 3, 1, 3, 6, ... Kitaip sakant, renkant sekos narius užtenka masyve

$$\{\ldots, 10, 6, 3, 1, 0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots\}$$

pradėti nuo 1 ir kiekvienu žingsniu eiti į kairę arba į dešinę.

Literatūra

1. А.И. Маркушевич, *Возвратные последовательности*, Москва (1950). Internete: `http://lib.chistopol.ru/?id=9895`.
   Angliškas vertimas: A.I. Markushevich, *Recursion Sequences*, Mir Publishers, Moscow (1975).
2. International Mathematical Olympiad-2006, Ljubljana.
   `http://imo2006.dmfa.si/`

SUMMARY

J.J. Mačys. Problems of Lithuanian Mathematical Olympiad-2005

The questions of the Lithuanian olympiad-2005 are presented and solutions are given.

Keywords: olympiads, problems solving, recursion sequences.