Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 115–119

Lietuvos moksleivių olimpiados'08 uždavinių apžvalga

Juozas Juvencijus MAČYS (MII)
el. paštas: jmacys@ktl.mii.lt

Reziumė. Nagrinėjami 2008 m. Lietuvos moksleivių olimpiados uždaviniai.

Raktiniai žodžiai: matematikos olimpiados, uždavinių sprendimas.

57-toji Lietuvos moksleivių matematikos olimpiada įvyko Panevėžyje 2008 m. kovo 18 d. Pirmą kartą šalies olimpiadų istorijoje vertinimo komisija (pirmininkas – prof. habil. dr. Artūras Dubickas) pateikė mokytojams olimpiados užduočių ir jų sprendimų knygelę dar mokiniams tebesprendžiant uždavinius. Būtent ta knygele pasinaudota rašant šią apžvalgą, tiesa, kai kurie uždaviniai paanalizuoti čia plačiau. Šiuo straipsniu tęsiama sena tradicija – mokytojai gali susipažinti su kiekvienos olimpiados užduočių turiniu ir sprendimo niuansais. Su ankstesnėmis olimpiadomis galima susipažinti iš straipsnių [1]–[3].

IX – X klasės

1. Duota, kad $M=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$, kur a,b,c ir d – sveikieji skaičiai.

a) Ar visada M dalijasi iš 12?

b) Ar visada M dalijasi iš 24?

Atsakymas. a) Visada. b) Nevisada.

Sprendimas. Iš keturių skaičių a,b,c,d bent du duoda vienodas liekanas, dalijant juos iš 3. Tų dviejų skaičių skirtumas dalijasi iš 3. Taigi M visada dalijasi iš 3. Jei bent trys iš skaičių a,b,c,d yra lyginiai arba bent trys nelyginiai, tai kiekvienas iš trijų skirtumų (tarp tų trijų skaičių) dalijasi iš 2, todėl M dalijasi iš 8. Jei du iš skaičių a,b,c,d yra lyginiai, o kiti du – nelyginiai, tai du skirtumai (tarp abiejų lyginių ir abiejų nelyginių skaičių) dalijasi iš 2, todėl M dalijasi iš 4. Taigi visais atvejais M dalijasi iš 4, todėl M dalijasi ir iš $3\cdot 4=12$.

Jeigu $a=4,\ b=3,\ c=2,\ d=1$, tai $M=12$, todėl M nevisada dalijasi iš 24.

2. Apie smailųjį trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Atkarpa BD yra to apskritimo skersmuo. Iš viršūnės A nubrėžta aukštinė kerta apskritimą taške E. Įrodykite, kad keturkampio $BECD$ plotas yra lygus trikampio ABC plotui.

Sprendimas. Tegul H yra kampo A aukštinės pagrindas, o F – statmens iš taško D į atkarpą AE pagrindas (pasidarykite brėžinį). Trikampis DCB yra statusis, todėl atkarpa DC yra lygiagreti atkarpai AE. Taigi $AECD$ yra lygiašonė trapecija, o $FHCD$ – stačiakampis. Todėl $FE = FH + HE = FH + AF = AH$. Keturkampio $BECD$ plotas yra lygus $\frac{1}{2}BC \cdot FE$, o trikampio ABC plotas lygus $\frac{1}{2}BC \cdot AH$, taigi šie plotai yra lygūs.

3. Įrodykite, kad jeigu $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, tai

$$\frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+z^3+x^3} + \frac{z}{7+x^3+y^3} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Sprendimas. Pirmas būdas. Panašias nelygybes spręsti labai sunku – tiesioginiai algebriniai pertvarkymai per daug gremėzdiški. Čia padeda tokia mintis – reikia ne bendravardiklinti, o eiti prie panašių vardiklių. Visi trys vardikliai panašūs į $7 + x^3 + y^3 + z^3$. Bet jeigu vardiklius pakeisime šituo, tai trupmenos sumažės ir net jei įrodysime gautą nelygybę, iš jos neišplauks duotoji. Todėl vardiklį reikia „truputį" sumažinti – tai padaryti nesunku: pavyzdžiui, kadangi $0 \leqslant x \leqslant 1$, tai $0 \leqslant x^3 \leqslant 1$, o todėl $7 \geqslant 6 + x^3$. Panašiai padarę su visomis trupmenomis, gauname

$$\frac{x}{6+x^3+y^3+z^3} + \frac{y}{6+x^3+y^3+z^3} + \frac{z}{6+x^3+y^3+z^3}$$
$$\geqslant \frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{x}{7+x^3+z^3} + \frac{z}{7+x^3+y^3}.$$

Vadinasi, jei mums pavyks įrodyti nelygybę

$$\frac{x}{6+x^3+y^3+z^3} + \frac{y}{6+x^3+y^3+z^3} + \frac{z}{6+x^3+y^3+z^3} \leqslant \frac{1}{3}, \tag{1}$$

tai juo labiau bus teisinga duotoji nelygybė. Padauginę iš bendrojo vardiklio, turime

$$3(x+y+z) \leqslant 6 + x^3 + y^3 + z^3. \tag{2}$$

Ši nelygybė jau daug paprastesnė ir ją galima įrodyti standartiniais metodais. Pateiksime keletą jos įrodymo variantų.

1 variantas. Užtenka įrodyti nelygybę

$$3x \leqslant 2 + x^3, \tag{3}$$

tada sudėję ją ir analogiškas $3y \leqslant 2 + x^3$, $3z \leqslant 2 + z^3$, gausime nelygybę (2). Įrodyti (3) nelygybę paprasta.

Galima ją išskaidyti: $x^3 - 3x + 2 \geqslant 0$, $x^3 - x - 2x + 2 \geqslant 0$, $x(x^2-1) - 2(x-1) \geqslant 0$, $(x-1)(x^2+x-2) \geqslant 0$, o kadangi $x^2 + x - 2 = x^2 - x + 2x - 2 = x(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(x+2)$, tai gauname nelygybę

$$(x-1)^2(x+2) \geqslant 0,$$

ekvivalenčią (3) nelygybei ir akivaizdžiai teisingą neneigiamiems x.

2 variantas. Žinoma, galima remtis vidurkių nelygybe: $2 + x^3 = 1 + 1 + x^3 \geqslant 3\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot x^3} = 3x$.

3 variantas. Galima taikyti ir išvestinę. Funkcijos $f(x) = x^3 - 3x + 2$ išvestinė $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ neigiama, kai $0 < x < 1$, taigi $f(x)$ mažėja, kai x didėja. Todėl $f(x) \geqslant f(1)$, t.y. $x^3 - 3x + 2 \geqslant 0$.

4 variantas. Beje, vidurkių nelygybę galima taikyti (2) nelygybei iš karto. Kadangi $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$, tai užtenka įrodyti nelygybę $3(x + y + z) \leqslant 6 + 3xyz$, t.y.

$$x + y + z - xyz \leqslant 2.$$

Bet $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$, todėl $x(1 - yz) + y + z \leqslant 1 - yz + y + z = 2 - (yz - y - z + 1) = 2 - (1 - y)(1 - z) \leqslant 2$.

2 būdas. Duotąją nelygybę galima įrodyti ir kitaip, remiantis išvestinėmis (skaitytojas įsitikins, kaip daug įdomesnis 1 būdas). Taigi turime nelygybę

$$\frac{x}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{7 + z^3 + x^3} + \frac{z}{7 + x^3 + y^3} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Laikykime, kad y ir z fiksuoti. Įrodykime, kad kairė nelygybės pusė didėja. Pažymėkime ją $f(x)$. Tada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{7 + y^3 + z^3} - \frac{3x^2 y}{(7 + z^3 + x^3)^2} - \frac{3x^2 z}{(7 + z^3 + x^3)^2} \\ &\geqslant \frac{1}{9} - \frac{3x^2}{(7 + x^3)^2} - \frac{3x^2}{(7 + x^3)^2} = \frac{1}{9} - \frac{6x^2}{(7 + x^3)^2} = \frac{1}{9} - 6\Big(\frac{x}{7 + x^3}\Big)^2. \end{aligned}$$

Bet $x/(7 + x^3) \leqslant 1/8$, nes $8x \leqslant 7 + x^3$, $x^3 - 8x + 7 \geqslant 0$, $x^3 - x - 7x - 7 \geqslant 0$, $(1 - x)(7 - x^2 - x) \geqslant 0$. Todėl intervale $[0, 1]$ $f'(z) \geqslant 1/9 - 6 \cdot 1/8^2 = 1/9 - 3/32 = 5/(9 \cdot 32) > 0$. Kadangi išvestinė $f'(x)$ teigiama, tai $f(x)$ didėja ir $f(x) \leqslant f(1)$, t.y.

$$\frac{x}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{7 + z^3 + x^3} + \frac{z}{7 + y^3 + x^3} \leqslant \frac{1}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{8 + z^3} + \frac{z}{8 + y^3}.$$

Todėl užtenka įrodyti, kad visada

$$\frac{1}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{8 + z^3} + \frac{z}{8 + y^3} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Laikykime, kad z fiksuotas ir pažymėkime kairę pusę $g(y)$. Tada

$$g'(y) = -\frac{3y^2}{(7 + y^3 + z^3)^2} + \frac{1}{8 + z^3} - \frac{3y^2 z}{(6 + y^3)^2},$$

$$g'(y) \geqslant \frac{1}{9} - \frac{3y^2}{(7 + y^3)^2} - \frac{3y^2}{(8 + y^3)^2} \geqslant \frac{1}{9} - \frac{6y^2}{(7 + y^3)^2} = \frac{1}{9} - 6\Big(\frac{y}{7 + y^3}\Big)^2.$$

Jau matėme, kad $g'(y) > 0$, todėl $g(y)$ didėja, $g(y) \leqslant g(1)$, ir užtenka įrodyti, kad $g(1) \leqslant 1/3$, t.y. $h(z) = 1/(8+z^3) + z/9 \leqslant 1/3$. Bet vėl kairė pusė didėja, nes išvestinė

$$h'(z) = -\frac{6z^2}{(8+z^3)^2} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} - 6\left(\frac{z}{8+z^3}\right)^2 > 0.$$

Todėl $h(z) \leqslant h(1) = 2/9 + 1/9 = 1/3$, o tai ir reikėjo įrodyti.

4. Atsitiktinai imamos 9 taisyklingojo dvidešimtkampio viršūnės. Įrodykite, kad tarp jų visada atsiras tokios trys, kurios yra lygiašonio trikampio viršūnės.

Sprendimas. Pastebėkime, kad imdami kas ketvirtą viršūnę taisyklingąjį dvidešimtkampį padalinsime į keturis taisyklinguosius penkiakampius. Bent į vieną iš šių keturių penkiakampių pateks bent trys iš 9 taisyklingojo dvidešimtkampio viršūnių. Tačiau bet kokios trys taisyklingojo penkiakampio viršūnės sudaro lygiašonį trikampį.

2. Trikampio ABC pusiaukampinė AL lygi kraštinei AC. Toje pusiaukampinėje yra toks taškas K, kad $CK = BL$. Įrodykite, kad kampas CKL yra lygus kampui ABC.

Sprendimas. Tegul D yra toks atkarpos AB taškas, kad kampas ACK yra lygus kampui ALD (pasidarykite brėžinį). Kadangi $\angle DAL = \angle KAC$ ir $AC = AL$, tai trikampiai ACK ir ALD lygūs. Taigi $CK = LD$ ir $\angle CKL = \angle BDL$. Vadinasi, $BL = CK = LD$, todėl trikampis DLB – lygiašonis. Taigi $\angle CKL = \angle BDL = \angle DBL = \angle ABC$.

3. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais $n^7 + n^2 + 1$ yra pirminis skaičius.

Atsakymas. $n = 1$.

Sprendimas. Kai $n = 1$, tai $1^7 + 1^2 + 1 = 3$ – pirminis skaičius. Daugiau pirminių nerandame:

kai $n = 2$, tai $2^7 + 2^2 + 1 = 128 + 4 + 1 = 133 = 7 \cdot 19$;

kai $n = 3$, tai $3^7 + 3^2 + 1 = 2187 + 9 + 1 = 2197 = 13 \cdot 169$, ir t.t.

Panašu, kad daugiau pirminių nerasime, ir padėti tai įrodyti galėtų tik duotojo reiškinio skaidymas. Atspėti, iš ko dalijasi duotasis reiškinys, sunkoka, bet mintį gali duoti ir jau išrašytieji pavyzdžiai: kai $n = 2$, tai turime daliklį $7 = 2^2 + 2 + 1$; kai $n = 3$, tai turime daliklį $13 = 3^2 + 3 + 1$; netgi kai $n = 1$, turime daliklį $3 = 1^2 + 1 + 1$. Kitaip sakant, spėjame, kad $n^7 + n^2 + 1$ dalijasi iš $n^2 + n + 1$. Įsitikinti tuo galima dalijant „kampu“, bet dar paprasčiau skaidyti grupuojant: $n^7 + n^2 + 1 = n^2 + n + 1 + n^7 - n = n^2 + n + 1 + n(n^6 - 1) = n^2 + n + 1 + n(n^3 - 1)(n^3 + 1)$, ir matome, kad reiškinys dalijasi iš $n^2 + n + 1$:

$$(n^2 + n + 1)(1 + n(n-1)(n^3 + 1)) = (n^2 + n + 1)(n^5 - n^4 + n^2 - n + 1).$$

Kai $n \in \mathbf{N}$, tai pirmas daugiklis didesnis už 1, o antras daugiklis $n^4(n-1) = n(n-1)+1$ didesnis už 1 visada, išskyrus $n = 1$. Vadinasi, kai $n \geqslant 2$, tai skaičius n^7+n^2+1 sudėtinis, o kai $n = 1$ – pirminis.

Žinoma, taip skaidyti galima ir neatspėjus iš anksto daugiklio n^2+n+1. Neblogas ir kitas skaidymo būdas: $n^7+n^2+1 = n^7-n^4+n^4+n^2+1 = n^4(n^3-1)+(n^2+1)^2-n^2 = n^4(n-1)(n^2+n+1)+(n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Abu šie skaidymo būdai remiasi tuo, kad tiek n^7-n, tiek n^7-n^4 iškaidyti paprasta.

4. Lentoje užrašyti 1004 skaičiai: $2, 4, 6, \ldots, 2008$. Du žaidėjai pakaitomis daro tokį ėjimą:

pasirenka kurį nors lentoje užrašytą skaičių, jį nutrina, o jo vietoje įrašo vienetu mažesnį skaičių, be to, jeigu lentoje atsiranda nulis, tai jį iš karto nutrina, o jeigu atsiranda du vienodi skaičiai, tai nutrina vieną iš jų.

Laimi tas žaidėjas, kurio varžovas nutrina paskutinį skaičių. Įrodykite, kad žaidimą pradedantis žaidėjas visada gali laimėti, kad ir kaip žaistų antras žaidėjas. Kaip pradedantis žaidėjas turi žaisti?

Sprendimas. Po pirmo ėjimo lygiai vienas skaičius bus nelyginis. Įrodysime, kad pirmasis žaidėjas visada gali žaisti taip, kad po jo ėjimo visada lygiai vienas skaičius bus nelyginis bei lentoje nebus jokios poros $2k-1, 2k$. Iš tikrųjų, jei antrasis žaidėjas savo ėjimą atlieka su šiuo vieninteliu nelyginiu skaičiumi, tai po jo ėjimo visi skaičiai bus lyginiai ir pirmasis nesunkiai pasiekia savo tikslą (jei žaidimas dar nebaigtas), nes dviejų vienodų skaičių po bet kokio ėjimo lentoje nėra. Jeigu antrasis atlieka ėjimą su kokiu nors kitu skaičiumi (kuris yra lyginis), tai po jo ėjimo lentoje bus du skirtingi nelyginiai skaičiai, nes prieš jo ėjimą jokios poros $2k-1, 2k$ lentoje nebuvo. Be to, tokia pora po šio ėjimo atsirasti negali, nes dviejų vienodų skaičių prieš bet kokį ėjimą lentoje nėra. Tada pirmasis žaidėjas savo ėjimu sumažina mažesnįjį iš dviejų lentoje esančių nelyginių skaičių vienetu ir taip pasiekia savo tikslą: lygiai vienas iš likusių skaičių bus nelyginis bei nebus jokios poros $2k-1, 2k$. Kadangi visų lentoje užrašytų skaičių suma po kiekvieno ėjimo mažėja, tai taip žaisdamas pirmasis žaidėjas visada pasieks, kad po jo ėjimo lentoje liktų vienintelis skaičius (kuris bus nelyginis, sakysime, $2k-1$) ir po $2k-1$ ėjimo laimės žaidimą.

Literatūra

1. J. Mačys, 2005 m. Lietuvos moksleivių matematikos olimpiados uždavinių analizė, *Liet. mat. rink.*, **46**(spec. nr.), 167–171 (2006).
2. J. Mačys, LV Lietuvos moksleivių matematikos olimpiada, kn.: *Matematika ir jos dėstymas*, KTU leidykla, Kaunas (2007).
3. J. Mačys, Lietuvos moksleivių matematikos olimpiados'07 uždavinių apžvalga, *Liet. mat. rink.*, **47**(spec. nr.), 259–267 (2007).

SUMMARY

J. Mačys. Problems of Lithuanian olympiad'08

The problems of the Lithuanian mathematical school olympiad-2008 are presented and solutions are given.

Keywords: mathematical olympiads, problems solving.