LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, 2019
Lietuvos matematikų draugijos darbai, serija B
https://doi.org/10.15388/LMR.B.2019.15233

ISSN 0132-2818
eISSN 2335-898X
60 tomas, 34–38

Racionalieji kuboidai ir Herono trikampiai II

Edmundas Mazėtis[1,2], **Grigorijus Melničenko**[2]

[1] *Vilniaus Universitetas, Matematikos institutas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
[2] *Vytauto Didžiojo universitetas, Švietimo akademija*
K. Donelaičio g. 58, LT-44248 Kaunas
E. paštas: edmundas.mazetis@mif.vu.lt, gmelnicenko@gmail.com

Santrauka. Šiame darbe autoriai tęsia ryšių tarp racionaliųjų kuboidų egzistavimo problemos ir Herono trikampių nagrinėjimą. Įrodoma, kad racionaliųjų kuboidų egzistavimas yra ekvivalentus stačiakampio tetraedro, kurio kraštinių ilgiai yra racionalieji skaičiai, o pagrindas racionalusis Herono trikampis, egzistavimui.

Darbe pateikiami stačiakampių tetraedrų, kurių visų briaunų ilgiai yra sveikieji skaičiai, o pagrindo plotas yra iracionalusis skaičius, pavyzdžiai, o taip pat stačiakampių tetraedrų, kurių visų briaunų prie pagrindinės viršūnės ilgiai yra sveikieji skaičiai, pagrindo plotas yra sveikasis skaičius, bet viena pagrindo briauna yra iracionalusis skaičius, pavyzdys.

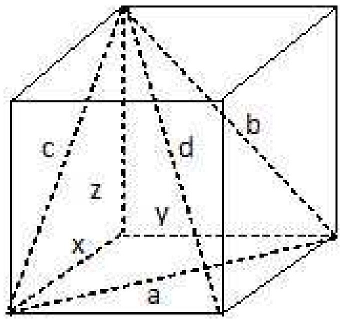
Raktiniai žodžiai: stačiakampis tetraedras, Herono trikampis, racionalusis kuboidas, tobulasis kuboidas, Eulerio plyta.

1 Įvadas

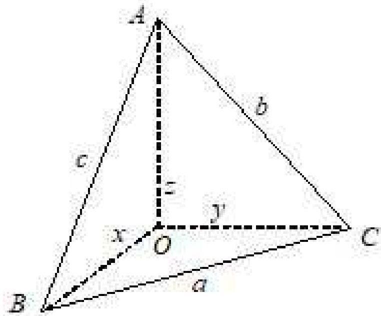
Autoriai [2] darbe nagrinėjo Herono trikampių ryšį su kol kas neišspręsta racionaliųjų kuboidų egzistavimo problema. Šiame darbe toliau nagrinėjami šie ryšiai. Nustatyta, kad racionaliųjų kuboidų egzistavimas yra ekvivalentus stačiakampio tetraedro, kurio visos briaunos prie pagrindinės viršūnės yra racionalieji skaičiai, o pagrindas yra racionalusis Herono trikampis, egzistavimui. Nagrinėjimui autoriai taiko tik elementariosios algebros ir geometrijos faktus, todėl tokie tyrinėjimai gali būti gera medžiaga įvairiems projektiniams darbams su matematikai gabiais mokiniais.

2 Racionalieji kuboidai ir racionalieji stačiakampiai tetraedrai

Primename, kad racionaliuoju kuboidu vadinamas stačiakampis gretasienis, kurio visų briaunų ilgiai x, y, z, visų sienų įstrižainių ilgiai a, b, c ir gretasienio įstrižainės ilgis d yra racionalieji skaičiai (1 pav.). Iki šiol nėra žinoma, ar toks stačiakampis gretasienis egzistuoja. Apie šią problemą galima detaliau sužinoti autorių [2] darbe pateiktoje literatūroje.



1 pav. Gretasienis.



2 pav. Tetraedras.

1 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgiai ir plotas yra sveikieji skaičiai, vadinamas Herono trikampiu.

2 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgiai ir plotas yra racionalieji skaičiai, vadinamas racionaliuoju Herono trikampiu.

3 apibrėžimas. Tetraedras, kurio trys plokštieji kampai prie vienos viršūnės yra statieji, vadinamas stačiakampiu tetraedru; ta viršūnė vadinama pagrindine.

Toliau stačiakampio tetraedro sieną ABC, kurios visi plokštieji kampai yra smailieji, vadinsime jo pagrindu (2 pav.). Įrodymą, kad tokia siena-pagrindas su smailiaisiais kampais kiekvienam stačiakampiui tetraedrui egzistuoja, paliekame skaitytojui.

4 apibrėžimas. Stačiakampis tetraedras, kurio visų šešių briaunų ilgiai ir pagrindo plotas yra racionalieji skaičiai, vadinamas racionaliuoju Herono tetraedru.

Pastebėkime, kad stačiakampio Herono tetraedro visos sienos yra Herono trikampiai. Iš tikrųjų, pagal apibrėžimą jo pagrindas yra Herono trikampis, o kitos sienos yra statieji trikampiai, kurių kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai. Analogiškai, racionaliojo stačiakampio tetraedro visos keturios sienos yra racionalieji Herono trikampiai.

1 lema. *Sakykime, kad stačiakampio tetraedro trijų briaunų, išeinančių iš pagrindinės viršūnės, ilgiai yra x, y, z. Tuomet šio stačiakampio tetraedro pagrindo plotas S lygus*

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}.$$

Įrodymas. Sakykime, kad stačiakampio tetraedro pagrindo kraštinių ilgiai lygūs a, b, c (2 pav.). Taikydami Herono formulę gauname, kad jo plotui S teisingos lygybės

$$\begin{aligned}
S^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \\
&= \frac{1}{16}\big[\big((a+b)^2 - c^2\big)\big(c^2 - (a-b)^2\big)\big] \\
&= \frac{1}{16}\big(2ab + a^2 + b^2 - c^2\big)\big(2ab - a^2 - b^2 + c^2\big) \\
&= \frac{1}{16}\big[4a^2b^2 - \big(a^2 + b^2 - c^2\big)^2\big].
\end{aligned}$$

Atsižvelgę į tai, kad $a^2 = x^2 + y^2$, $b^2 = y^2 + z^2$, $c^2 = z^2 + x^2$ ir atlikę veiksmus, įrodome lemos teisingumą. $\square$

1 teorema. *Šie teiginiai yra ekvivalentūs*:

a) *Diofanto lygčių sistema*

$$a^2 = x^2 + y^2, \qquad b^2 = y^2 + z^2, \qquad c^2 = z^2 + x^2, \qquad d^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

turi racionaliųjų sprendinių;

b) *Diofanto lygčių sistema*

$$a^2 = x^2 + y^2, \qquad b^2 = y^2 + z^2, \qquad c^2 = z^2 + x^2, \qquad t^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \tag{2}$$

turi racionaliųjų sprendinių;

c) *egzistuoja racionalusis kuboidas*;

d) *egzistuoja racionalusis stačiakampis Herono tetraedras*;

e) *egzistuoja stačiakampis Herono tetraedras.*

Įrodymas. *a*) $\Rightarrow$ *b*) Sakykime, kad (1) Diofanto lygčių sistema turi racionaliųjų sprendinių. Iš (1) lygybių išplaukia, kad

$$\left[\frac{a}{xy}\right]^2 = \left[\frac{1}{x}\right]^2 + \left[\frac{1}{y}\right]^2, \qquad \left[\frac{b}{yz}\right]^2 = \left[\frac{1}{y}\right]^2 + \left[\frac{1}{z}\right]^2, \qquad \left[\frac{c}{zx}\right]^2 = \left[\frac{1}{z}\right]^2 + \left[\frac{1}{x}\right]^2,$$
$$\left[\frac{d}{xyz}\right]^2 = \left[\frac{1}{x}\right]^2\left[\frac{1}{y}\right]^2 + \left[\frac{1}{y}\right]^2\left[\frac{1}{z}\right]^2 + \left[\frac{1}{z}\right]^2\left[\frac{1}{x}\right]^2.$$

Pažymėję

$$\hat{a} = \frac{a}{xy}, \qquad \hat{b} = \frac{b}{yz}, \qquad \hat{c} = \frac{c}{zx}, \qquad t = \frac{d}{xyz}, \qquad \hat{x} = \frac{1}{x}, \qquad \hat{y} = \frac{1}{y}, \qquad \hat{z} = \frac{1}{z},$$

gauname, kad $\hat{a}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$, $\hat{b}^2 = \hat{y}^2 + \hat{z}^2$, $\hat{c}^2 = \hat{z}^2 + \hat{x}^2$, $t^2 = \hat{x}^2\hat{y}^2 + \hat{y}^2\hat{z}^2 + \hat{z}^2\hat{x}^2$. Taigi jei teisinga sąlyga *a*), tai teisinga ir sąlyga *b*).

b) $\Rightarrow$ *a*) Sakykime, kad (2) Diofanto lygčių sistema turi racionaliųjų sprendinių. Iš (2) lygčių gauname tokias lygybes

$$\left[\frac{a}{xy}\right]^2 = \left[\frac{1}{x}\right]^2 + \left[\frac{1}{y}\right]^2, \qquad \left[\frac{b}{yz}\right]^2 = \left[\frac{1}{y}\right]^2 + \left[\frac{1}{z}\right]^2, \qquad \left[\frac{c}{zx}\right]^2 = \left[\frac{1}{z}\right]^2 + \left[\frac{1}{x}\right]^2,$$
$$\left[\frac{t}{xyz}\right]^2 = \left[\frac{1}{x}\right]^2 + \left[\frac{1}{y}\right]^2 + \left[\frac{1}{z}\right]^2.$$

Šiose lygybėse pažymėkime

$$\hat{a} = \frac{a}{xy}, \qquad \hat{b} = \frac{b}{yz}, \qquad \hat{c} = \frac{c}{zx}, \qquad d = \frac{t}{xyz}, \qquad \hat{x} = \frac{1}{x}, \qquad \hat{y} = \frac{1}{y}, \qquad \hat{z} = \frac{1}{z},$$

Tuomet teisingos lygybės $\hat{a}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$, $\hat{b}^2 = \hat{y}^2 + \hat{z}^2$, $\hat{c}^2 = \hat{z}^2 + \hat{x}^2$, $d^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$. Iš čia seka, kad, jei teisingas *b*) teiginys, tai teisingas ir *a*) teiginys.

$a) \Leftrightarrow c)$ Sakykime, racionaliųjų skaičių trejetas (x, y, z) yra (1) Diofanto lygčių sistemos sprendinys. Stačiakampės koordinačių sistemos $Oxyz$ ašyse atidėkime atkarpas, lygias atitinkamai x, y, z. Gauname stačiakampį gretasienį, kurio visų septynių pagrindinių atkarpų: trijų briaunų x, y, z, trijų sienų įstrižainių a, b, c ir gretasienio įstrižainės d ilgiai yra racionalieji skaičiai (1 pav.). Taigi iš teiginio $a)$ teisingumo seka racionaliojo kuboido egzistavimas. Jei teiginys $c)$ yra teisingas, iš jo akivaizdžiai pagal Pitagoro teoremą seka teiginio $a)$ teisingumas (1 pav.).

$b) \Leftrightarrow d)$ Tarkime, kad racionaliųjų skaičių trejetas (x, y, z) yra (2) Diofanto lygčių sistemos sprendinys. Atidėkime stačiakampės koordinačių sistemos $Oxyz$ ašyse atkarpas, kurių ilgiai lygūs x, y,z. Gaunamas stačiakampis tetraedras, kurio pagrindinė viršūnė yra koordinačių pradžia O, o pagrindo (trikampio ABC) kraštinių ilgiai yra racionalieji skaičiai a, b, c (2 pav.). Iš 1 lemos seka, kad šio tetraedro pagrindo plotas yra racionalusis skaičius. Taigi jei teiginys $b)$ teisingas, tai stačiakampis tetraedras $OABC$ yra racionalusis Herono tetraedras. Atvirkščiai, jei teiginys $d)$ yra teisingas, tai iš Pitagoro teoremos ir 1 lemos seka $b)$ teiginys (2 pav.).

$d) \Leftrightarrow e)$ Įrodymas akivaizdus ir paliekamas skaitytojui. □

Pažymėtina, kad [1] darbe teiginių $c)$ ir $d)$ ekvivalentumas įrodytas kitu būdu.

3 Stačiakampių tetraedrų, kurie yra beveik Herono, pavyzdžiai

Eulerio plyta yra vadinamas stačiakampis gretasienis, kurio visų briaunų ir visų sienų įstrižainių ilgiai yra sveikieji skaičiai [4, 5]. Eulerio plytos apibrėžime nėra tvirtinimo, kad jos įstrižainė būtų sveikasis skaičius. Kitaip tariant, Eulerio plytos briaunų ilgiai x, y, z yra Diofanto lygčių sistemos

$$a^2 = x^2 + y^2, \qquad b^2 = y^2 + z^2, \qquad c^2 = z^2 + x^2$$

sveikieji sprendiniai. Paties mažiausio tūrio Eulerio plytos briaunų ilgiai lygūs 44, 117, 240, o jos sienų įstrižainių ilgiai lygūs 125, 244, 267 [4, 5]. Todėl mažiausio tūrio stačiakampis tetraedras yra šiai Eulerio plytai atitinkantis stačiakampis tetraedras. Jo pagrindo plotas pagal 1 lemą yra $\sqrt{10947}$, t. y. pagrindas nėra Herono trikampis. Todėl šis stačiakampis tetraedras nėra Herono tetraedras.

Daugiau Eulerio plytų pavyzdžių galima rasti [5] darbe, kiekvienai tokiai plytai atitinka stačiakampis tetraedras, kurio visos briaunos yra sveikieji skaičiai, bet šis tetraedras nėra Herono tetraedras.

Jei racionalieji skaičiai x, y, z yra racionaliosios Eulerio plytos briaunų ilgiai, tai racionalieji skaičiai xy, yz, zx yra kitos racionaliosios Eulerio plytos briaunų ilgiai. Ši naujoji plyta yra vadinama duotosios plytos išvestinė Eulerio plyta [3]. Toliau stačiakampį gretasienį su briaunų ilgiais xy, yz, zx vadinsime išvestiniu, kuris atitinka stačiakampiui gretasieniui su briaunų ilgiais x, y, z.

Kadangi žinomos tik tokios Eulerio plytos, kurių visų briaunų ir visų sienų įstrižainių ilgiai yra sveikieji skaičiai, o plytos įstrižainės ilgis – iracionalusis skaičius [5], tai jų išvestinėms Eulerio plytoms atitinka stačiakampiai tetraedrai, kurių visų briaunų ilgiai yra sveikieji skaičiai, bet šie tetraedrai nėra Herono. Tai seka iš šios teoremos:

2 teorema. *Sakykime, kad x, y, z – teigiami skaičiai, o skaičiai xy, yz, zx yra stačiakampio tetraedro briaunų, išeinančių iš pagrindinės viršūnės, ilgiai. Tuomet šio tetraedro pagrindo plotas S yra lygus*

$$S = \frac{1}{2}xyz\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Įrodymas seka iš 1 lemos.

Racionalusis kuboidas, kurio septynių pagrindinių atkarpų ilgiai yra sveikieji skaičiai, vadinamas tobuluoju kuboidu [3, 4, 5]. Stačiakampis gretasirnis vadinamas beveik tobuluoju kuboidu, jei vienos iš septynių pagrindinių atkarpų ilgis yra iracionalusis skaičius, o kitų šešių atkarpų ilgiai – sveikieji skaičiai [5].

Nagrinėkime beveik tobuląjį kuboidą, kurio briaunų ir sienų įstrižainių ilgiai: $x = 104$, $y = 153$, $z = 672$, $a = 185$, $b = 680$, $c = \sqrt{474993}$, $d = 697$ [5]. Jo išvestinis kuboidas yra taip pat beveik tobulasis kuboidas. Iš 2 teoremos ir lygybės $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 697$ seka, kad šiam kuboidui atitinkamo stačiakampio tetraedro pagrindo plotas yra sveikasis skaičius. Šio kuboido kraštinių ilgius padaliję iš jų bendrojo daugiklio, gauname beveik tobuląjį kuboidą, kurio briaunų ir sienų įstrižainių ilgiai yra $x = 663$, $y = 4284$, $z = 2912$, $a = 4335$, $b = 5180$, $c = \sqrt{52777}$. Jam atitinkančio stačiakampio tetraedro pagrindo plotas yra lygus $S = 6469554$. Gavome stačiakampio tetraedro, kurio visų briaunų, išeinančių iš pagrindinės viršūnės ilgiai yra sveikieji skaičiai, vienos pagrindo kraštinės ilgis yra iracionalusis skaičius, o pagrindo plotas yra sveikasis skaičius, pavyzdį.

Literatūra

[1] J. Frick. On Heron simplices and integer embedding, 2001. Available fom Internet: https://arxiv.org/abs/math/0112239v1 (žiūrėta 2019-05-20).

[2] E. Mazetis and G. Melničenko. Racionalieji kuboidai ir Herono trikampiai. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **59**:61–66, 2018.

[3] R. van Luijk. On perfect cuboids, 2000. Math. Institute web resource. Available fom Internet: http://www.math.leidenuniv.nl/~rvl/ps/cuboids.pdf (žiūrėta 2019-05-20)

[4] E.W. Weisstein. Euler brick. From MathWorld – A Wolfram Web Resource. Available fom Internet: http://mathworld.wolfram.com/EulerBrick.html (žiūrėta 2019-05-20).

[5] Wikipedia. Free encyclopedia. Euler brick. Available fom Internet: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_brick (žiūrėta 22019-05-20).

SUMMARY

Rational cuboids and Heron triangles II

E. Mazėtis, G. Melnichenko

We study the connection of Heronian triangles with the problem of the existence of rational cuboids. It is proved that the existence of a rational cuboid is equivalent to the existence of a rectangular tetrahedron, which all sides are rational and the base is a Heronian triangle. Examples of rectangular tetrahedra are given, in which all sides are integer numbers, but the area of the base is irrational. The example of the rectangular tetrahedron is also given, which has lengths of one side irrational and the other integer, but the area of the base is integer.

Keywords: right-angled-vertex tetrahedron, Heronian triangles, rational cuboid, perfect cuboid, Euler brick.