Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai ISSN 0132-2818
51 tomas, 2010, 127–132 www.mii.lt/LMR/

59-oji Lietuvos moksleivių olimpiada

Juozas Juvencijus Mačys

Institute of Mathematics and Informatics
Akademijos 4, LT-08663 Vilnius
E. paštas: jmacys@ktl.mii.lt

Santrauka. Straipsnyje apžvelgiamos 59-osios Lietuvos moksleivių olimpiados (2010.03.30, Trakai) užduotys, nagrinėjami jų sprendimo būdai.

Raktiniai žodžiai: gabiųjų vaikų ugdymas, matematikos olimpiados, uždavinių sprendimas.

Įvadas

Šiuo straipsniu tęsiama tradicija kasmet apžvelgti Lietuvos moksleivių matematikos olimpiados užduotis ir aptarti bei palyginti uždavinių sprendimo metodus. Praeitų metų olimpiados apžvalgą ir ankstesnių metų olimpiadų apžvalgų nuorodas galima rasti [3].

59-oji Lietuvos moksleivių matematikos olimpiada įvyko 2010 m. kovo 30 d. Trakuose. Jai buvo skirta Europos Sąjungos lėšų iš gabiųjų vaikų ugdymo fondų, ir bene pirmą kartą tiek vertinimo komisijos nariai, tiek ir mokytojai su mokiniais buvo kartu apgyvendinti puikiuose poilsio namuose – vandens procedūrų centre „Trasalis“. Čia mokytojai klausėsi paskaitų, dirbo vertinimo komisija, mokiniai sprendė uždavinius, galėjo nemokamai pažaisti kėgliais ir pasimaudyti baseine.

Suvedus olimpiados rezultatus, buvo atrinkti dalyviai ir kandidatai į Pasaulio matematikos olimpiadą (IMO), kuri šiemet vyks Astanoje (Kazachstanas).

Olimpiadoje kiekvienas mokinys sprendė 4 uždavinius (9–10 klasių grupės ir 11–12 klasių grupės vienas uždavinys buvo bendras, kiti trys skyrėsi). Uždaviniai buvo vykusiai parinkti – neišspręstų uždavinių nebuvo. Mokytojai dar mokiniams tebesprendžiant gavo vertinimo komisijos parengtą uždavinių ir sprendimų knygelę (komisijos pirmininkas prof. A. Dubickas). Su visa medžiaga ir kita informacija galima susipažinti internete [1, 2]. Šiais šaltiniais remiamasi ir mūsų apžvalgoje. Joje plačiau nagrinėjami tik kelių uždavinių sprendimai. Likusių uždavinių sprendimus skaitytojas ras minėtuose šaltiniuose.

9–10 klasių uždaviniai

1. *Įrodykite, kad nelygybė*

$$\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{3} \geqslant \frac{a^3b+ab^3}{2}$$

teisinga su bet kuriais realiaisiais skaičiais a ir b.

Prieš pradedant uždavinį spręsti, labai pravartu jį patyrinėti – tai labai padeda. Matome, kad a ir b į nelygybę įeina simetriškai. Nelygybė homogeniška – visi nariai yra ketvirtojo laipsnio a ir b atžvilgiu. Tai, be kita ko, reiškia, kad gali padėti dalyba iš b^4 ar iš a^2b^2. Nelygybė virsta lygybe, kai $a = b$ (tai padeda pasitikrinti, ar pertvarkydami nepadarėme klaidos). Taip pat nelygybė teisinga, kai a ir b nevienodų ženklų – tada kairioji pusė teigiama, dešinioji – neigiama. Kai a ir b neigiami ($a = -|a|$, $b = -|b|$), gauname tą pačią nelygybę su $|a|$ ir $|b|$. Tai reiškia, kad mums užtenka įrodyti nelygybę teigiamiesiems a ir b. Šia pastaba ne kartą remsimės. Pagaliau – matome, kad nelygybė teisinga, kai $a = 0$ arba $b = 0$ (pavyzdžiui, kai $a = 0$, ji virsta akivaizdžiai teisinga nelygybe $b^4 \geqslant 0$.

Mokiniai pateikė daugybę nelygybės įrodymo būdų. Susipažinkime su keletu iš jų (suprantama, gerokai patvarkytų). Sprendimo būdus numeruosime didžiosiomis raidėmis **A**, **B** ir t.t., ženklelis ■ reiškia sprendimo pabaigą.

Sprendimas. A. Įdomu, kad nelygybę galima įrodyti gana tiesmukiškai. Reikia įrodyti, kad
$$2\left(a^4 + a^2b^2 + b^4\right) - 3ab\left(a^2 + b^2\right) \geqslant 0. \tag{1}$$
Kadangi kairioji pusė virsta nuliu, kai $a = b$, tai šis daugianaris turi daugiklį $a - b$ (paaiškėja, kad net $(a - b)^2$). Stengiamės jį iškelti, eidami prie kvadratų skirtumo:

$$\begin{aligned}2\left(a^2 - b^2\right)^2 + 6a^2b^2 - 3ab\left(a^2 + b^2\right) &= 2\left(a^2 - b^2\right)^2 - 3ab(a - b)^2\\ &= (a - b)^2\left(2(a + b)^2 - 3ab\right)\\ &= (a - b)^2\left(2a^2 + 2b^2 + ab\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Kadangi a ir b galime laikyti teigiamais, tai pastarasis reiškinys neneigiamas. Žinoma, nesunku įsitikinti, kad visada

$$2\left(2a^2 + 2b^2 + ab\right) = 4a^2 + 4b^2 + 2ab = (a + b)^2 + 3a^2 + 3b^2 \geqslant 0. \qquad ■$$

B. Laikykime, kad a ir b teigiami. Dalykime (1) nelygybę iš b^4 ir pažymėkime $\frac{a}{b} = s$. Tada reikia įrodyti nelygybę

$$2s^4 - 3s^3 + 2s^2 - 3s + 2 \geqslant 0.$$

Kadangi $s = 1$ yra kairiosios pusės šaknis, tai galima iškelti $s - 1$. Grupuojame:

$$\begin{aligned}&\left(2s^4 - 2s^3\right) - \left(s^3 - s^2\right) + \left(s^2 - s\right) - (2s - 2)\\ &\quad = (s - 1)\left(2s^3 - s^2 + s - 2\right) = (s - 1)\left(2\left(s^3 - 1\right) - s(s - 1)\right)\\ &\quad = (s - 1)^2\left(2s^2 + 2s + 2 - s\right) = (s - 1)^2\left(2s^2 + s + 2\right).\end{aligned}$$

Kadangi $s > 0$, tai abu daugikliai teigiami. Ir čia daugiklis $2s^2 + s + 2$ teigiamas visiems s:
$$8\left(2s^2 + s + 2\right) = 16s^2 + 8s + 16 = (4s + 1)^2 + 15. \qquad ■$$

Beje, taip pat užtenka pasakyti, kad trinario diskriminantas neigiamas (tarp kitko, tai visiškai ekvivalentūs teiginiai – juk diskriminantas ir atsiranda išskiriant pilnąjį kvadratą).

C. Duotąją nelygybę padauginkime iš 12:

$$4\big(a^4+a^2b^2+b^4\big)-6ab\big(a^2+b^2\big)\geqslant 0.$$

Taikykime vidurkių nelygybę $2ab\leqslant a^2+b^2$:

$$\begin{aligned}4(a^4+a^2b^2+b^4)-3\cdot 2ab\cdot(a^2+b^2)&\geqslant 4(a^4+a^2b^2+b^4)-3(a^2+b^2)^2\\&=a^4-2a^2b^2+b^4=(a^2-b^2)^2\geqslant 0.\end{aligned}\qquad\blacksquare$$

D. Padeda ir standartinis keitimas – nauji kintamieji sumai ir sandaugai. Perrašę duotąją nelygybę kaip

$$2\big(a^2+b^2\big)^2-2a^2b^2-3ab\big(a^2+b^2\big)\geqslant 0$$

ir pažymėję $a^2+b^2=u$, $ab=v$, turime nelygybę

$$2u^2-2v^2-3uv\geqslant 0.$$

Kairiąją pusę lengva išskaidyti šiaip grupuojant, bet padeda ir toks pastebėjimas: kai $a=b$, tai $u=2v$, o $u=2v$ iš tikrųjų verčia kairiąją pusę nuliu. Vadinasi, skaidant galima iškelti $u-2v$: $2u^2-4uv+uv-2v^2=2u(u-2v)+v(u-2v)=(u-2v)(2u+v)$. Bet $u=a^2+b^2\geqslant 2ab=2v$ ir, kai $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, abu pastarosios sandaugos daugikliai teigiami. $\blacksquare$

E. Dalijame iš a^2b^2 nelygybę (2):

$$4\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1\right)-6\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geqslant 0.$$

Pasižymėkime $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=s$, tada $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})^2-2=s^2-2$:

$$4\big(s^2-1\big)-6s\geqslant 0,\qquad 2s(2s-3)\geqslant 4.$$

Įrodykime pastarąją nelygybę. Galime a ir b laikyti teigiamais, tada $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})^2+2\geqslant 2$. Bet, kai $s\geqslant 2$, abu daugikliai $2s$ ir $2s-3$ teigiami ir didėja, reiškinys $2s(2s-3)$ didėja, todėl $2s(2s-3)\geqslant 2\cdot 2(2\cdot 2-3)=4$. $\blacksquare$

2. *Trapecijos $ABCD$ šoninės kraštinės AB ilgis lygus pagrindų AD ir BC ilgių sumai. Įrodykite, kad kampo A pusiaukampinė kraštinę CD dalija pusiau.*

3. *Žaidimo lenta yra stačiakampis, kurio apatinė kraštinė lygi m, o šoninė – n (m ir n yra natūralieji skaičiai). Stačiakampis padalytas į vienetinius kvadratėlius. Kairiajame apatiniame langelyje stovi šaškė. Du žaidėjai daro ėjimus pakaitomis, ir kiekvienu ėjimu žaidėjas pastumia šaškę į kitą langelį: arba per kiek nori langelių į dešinę, arba per kiek nori langelių į viršų. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Nustatykite visas natūraliųjų skaičių poras (m,n), su kuriomis žaidimą pradedantis žaidėjas gali laimėti, kad ir kaip žaistų antrasis. Nurodykite, kaip jam tada reikėtų žaisti.*

ATSAKYMAS. Pradedantis žaidėjas gali laimėti, kai $m\neq n$.

4. *Skaičius* $\overline{a0a0\ldots a0b0c0\ldots c0c}$ (*skaitmenys* a *ir* c *parašyti po* 1001 *kartą*) *dalijasi iš* 37. *Įrodykite, kad* $b = a + c$.

Sprendimas. A. Sprendimas labai supaprastėja ir tampa ypač vaizdus, jei pradinį skaičių padauginame iš 11 (brūkšnio virš skaitmenų nebededame):

$$a0a0\ldots a0b0c0\ldots c0c \cdot 11 = aa\ldots abbcc\ldots c.$$

Naujasis skaičius taip pat dalijasi iš 37, o jame yra po 2002 skaitmenis a ir c. Kadangi 111 ($= 3 \cdot 37$) dalijasi iš 37, tai tiek skaičius nnn ($= n \cdot 111$) tiek ir skaičius, gautas prirašius prie jo bet kiek nulių, dalijasi iš 37. Vadinasi, iš bet kurio skaičiaus priekio galima nubraukti tris iš eilės einančius vienodus skaitmenis. Tris vienodus skaitmenis nnn galima nubraukti ir iš galo: atėmę iš duotojo skaičiaus nnn, gausime skaičių su trimis nuliais gale, bet juos galime nubraukti, nes tai reikš dalybą iš $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ ir nekeis dalumo iš 37.

Kadangi $2002 = 2001 + 1$, tai braukydami vienodų skaitmenų trijules, turime (ženklas $\equiv$ reiškia, kad dalybos iš 37 liekana 0 nesikeičia): $aa\ldots abbcc\ldots c \equiv abbcc\ldots c \equiv abbc = abb0 + c = abbb - b + c \equiv a - b + c$. Taigi $a - b + c$ dalijasi iš 37. Kadangi a, b ir c – skaitmenys, tai $a - b + c \leqslant 9 - 0 + 9 = 18$, $a - b + c \geqslant 0 - 9 + 0 = -9$. Bet intervale nuo -9 iki 18 tėra vienintelis 37 kartotinis – skaičius 0. Taigi $a - b + c = 0$, o tai ir reikėjo įrodyti. ■

B. Žinoma, galima apsieiti ir be dauginimo iš 11. Skaičius 10101 dalijasi iš 37 (užtenka kampu „begalinį“ skaičių 10101… dalyti iš 37, ir tuoj pat gauname $10101 = 37 \cdot 273$. Vadinasi, iš 37 dalijasi skaičiai $n0n0n = n \cdot 10101$, todėl iš duotojo skaičiaus galima tokius skaitmenų penketukus (ar juos su nuliais gale) atmesti, taip pat nubraukti gauto skaičiaus nulius gale, ir naujasis skaičius dalysis iš 37.

Taigi galima nubraukinėti iš priekio $a0a0a0$, o nuo galo $c0c0c$ tol, kol liks dalus iš 37 skaičius $a0a0b0c0c$ (kadangi nubraukiame po 3 vienodus skaitmenis a ar tris c iš $1001 = 3 \cdot 333 + 2$, tai lieka po 2 skaitmenis a ir c). Tada $a0a0b0c0c = a0a000000 + b0000 + c0c = a0a0a0a0a - a0a0a + b0b0b - b0b + c0c \equiv a0a - b0b + c0c = a \cdot 101 - b \cdot 101 + c \cdot 101 = 101(a - b + c)$. Kadangi 101 nesidalija iš 37, tai iš 37 dalijasi $a - b + c$, o tai reiškia, kad $a - b + c = 0$. ■

11–12 klasių uždaviniai

1. *Realieji skaičiai* a *ir* b *tenkina sąlygą*

$$a^3 + b^3 = 8 - 6ab.$$

Kokias reikšmes gali įgyti $a + b$?

ATSAKYMAS. 2 ir -4.

Prieš spręsdami patyrinėkime lygtį. Pamėginkime atspėti atsakymą, peržiūrėję kintamųjų nedideles sveikąsias reikšmes. Be to, kadangi a ir b įeina simetriškai, tai užtenka tikrinti kurio nors vieno kintamojo reikšmes.

Jei $a = 0$, tai $b^3 = 8, b = 2$.

Jei $a = 1$, tai $1 + b^3 = 8 - 6b$, $b^3 + 6b = 7$, $b = 1$ (kairė pusė – didėjanti funkcija, todėl daugiau šaknų nėra).

Jei $a=-1$, tai $-1+b^3=8+6b$, $b^3-6b=9$, $b=3$ (daugiau šaknų nėra, nes kai $b\neq 3$, tai $b^3-9b=9-3b$, $b(b^2-9)=3(3-b)$, $b(b+3)=-3$, $4b^2+12b+12=0$, $(2b+3)^2+3=0$, ir kairioji pusė teigiama).

Jei $a=2$, tai $b^3=-12b$, $b(b^2+12)=0$, $b=0$.

Jei $a=-2$, tai $-8+b^3=8+12b$, $b^3-12b=16$, $b^3-16b=16-4b$, $b(b^2-16)=4(4-b)$, ir $b=4$ tinka, o jei $b\neq 4$, tai $b(b+4)=-4$, $b^2+4b+4=0$, $(b+2)^2=0, b=-2$. Vadinasi, su $a=-2$ turime $b=4$ arba $b=-2$.

Matome, kad visos rastosios poros (a,b), išskyrus paskutinę, duoda sumą $a+b=2$, o paskutinė pora $(-2;-2)$ – sumą $a+b=-4$. Jau knieti spėti, kad galimos dvi sumos $a+b$ reikšmės: 2 ir -4. Bet to nė nereikia: jeigu tai ir ne atsakymas, tai jau bent dvi $a+b$ reikšmes žinome (o štai pusė sprendėjų gavo vieną reikšmę arba nė vienos). Taigi atlikta žvalgyba padeda rasti klaidas mūsų samprotavimuose, jeigu spręsdami tų reikšmių negauname.

Sprendimas. A. Pažymėkime $s=a+b$ ir $t=ab$. Tada $a^3+b^3=s^3-3st$. Taigi duotoji sąlyga yra ekvivalenti lygybei

$$s^3-3st-8+6t=s^3-8-3t(s-2)=(s-2)\bigl(s^2+2s+4-3t\bigr)=0.$$

Vadinasi galimi du atvejai: $s=a+b=2$ (tada duotąją sąlygą tenkina, pvz., skaičių pora $a=b=1$) ir $s^2+2s+4-3t=0$. Šiuo atveju, įrašę $s=a+b$ ir $t=ab$ bei padauginę iš 2, gauname

$$2\bigl(a^2+2ab+b^2+2a+2b+4-3ab\bigr)=(a-b)^2+(a+2)^2+(b+2)^2=0.$$

Ši lygybė įmanoma su vienintele realiųjų skaičių pora $a=b=-2$ (kuri tenkina ir duotąją sąlygą. Aišku, kad tada $a+b=-4$. Vadinasi, $a+b=2$ arba $a+b=-4$. ■

B. Įsižiūrėję į sprendimo būdą A, matome, kad visiškai neverta įsivesti nežinomąjį $t=ab$: po minutės vėl jo atsisakėme – grįžome prie a ir b. Įdomiausia, kad ir žymėti $a+b=s$ nebūtina: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$, taigi lygtis virsta $(a+b)^3-3ab(a+b)=8-6ab$, ir kadangi tinka $a+b=2$ (pastebime iš pačios lygties, bet žinojome ir iš žvalgybos), tai išskaidžius atsiras daugiklis $a+b-2$:

$$\begin{gathered}(a+b)^3-8-3ab(a+b)+6ab=0,\\ (a+b-2)\bigl((a+b)^2+2(a+b)+4\bigr)-3ab(a+b-2)=0,\\ (a+b-2)\bigl(a^2+a(2-b)+(2-b)^2+6b\bigr)=0.\end{gathered}$$

Vadinasi, arba $a+b=2$, arba $a^2-ab+b^2+2a+2b+4=0$. Galima spręsti pastarąją lygtį kaip kvadratinę a atžvilgiu. Jos diskriminantas $D=(2-b)^2-4(b^2+2b+4)=-3b^2-12b-12=-3(b+2)^2$, taigi lygtis turi sprendinių tik kai $b=-2$. Tada $a^2+2a+4+2a-4+4=0$, $a^2+4a+4=0$, $(a+2)^2=0$, $a=-2$. Bet spręsti kvadratinę lygtį – tai išskirti pilnąjį kvadratą, todėl patogiausia tai daryti iš karto (be to, kad neatsirastų trupmenų, verta lygtį padauginti iš 4). Tada $4a^2-4ab+4b^2+8a+8b+16=4a^2+2\cdot 2a(2-b)+(2-b)^2-(2-b)^2+4b^2+8b+16=(2a+2-b)^2+3b^2+12b+12$, lygtis virsta

$$(2a+2-b)^2+3(b+2)^2=0.$$

Aišku, kad lygybė įmanoma tik kai $b=-2$, o tada

$$(2a+4)^2=0,$$

t.y. $a=-2$. ■

C. Ir pagaliau trumpiausias ir originaliausias sprendimas. Olimpiadų asai gerai žino tapatybę

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\big(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\big).$$

Kadangi

$$2\big(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\big)=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2,$$

tai tapatybė reiškia, kad $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ tik tada, kai $a+b+c=0$ arba $a=b=c$. Vadinasi, mūsų uždavinio sąlyga

$$a^3+b^3+(-2)^3+3ab\cdot(-2)=0$$

reiškia $a+b-2=0$ arba $a=b=-2$, t.y. $a+b=2$ arba $a+b=-4$. ■

Buvo ypač malonu išvysti šį sprendimą olimpiados dalyvio darbe.

2. *Trikampio ABC pusiaukampinės kertasi taške S. Taškai A_1, B_1, C_1 yra simetriški taškui S atitinkamai tiesių BC, AC ir AB atžvilgiu. Apie trikampį A_1, B_1, C_1 apibrėžtas apskritimas eina per tašką B. Raskite kampą ABC.*

ATSAKYMAS. $\angle ABC=60^\circ$.

3. Žr. 9–10 klasių **3** uždavinį.

4. *Sveikieji skaičiai nuo* 1 *iki* 25 (*nebūtinai įprastine tvarka*) *surašyti ratu. Apskaičiuojamos* 25 *sumos*: *pradedant kiekvienu skaičiumi sudedami penki pagal laikrodžio rodyklę iš eilės einantys skaičiai. Randamos tų sumų dalybos iš* 5 *liekanos* (*t.y. vienas iš skaičių* 0, 1, 2, 3 *arba* 4).*Skirtingų liekanų skaičių pažymėkime d.*

a) *Įrodykite, kad d gali būti lygus* 1, 3, 4 arba 5.

b) *Įrodykite, kad d negali būti lygus* 2.

Literatūra

[1] A. Dubickas. *2010 metų Lietuvos matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai.* Available from Internet: http://www.mif.vu.lt/~dubickas/.

[2] A. Dubickas. *2010 metų Lietuvos matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai.* Available from Internet: http://www.olimpiados.lt/~dubickas/.

[3] J. Mačys. 2009 metų Lietuvos matematikos olimpiada. *Liet. matem. rink., LMD darbai*, **50**:96–101, 2009.

SUMMARY

Lithuanian school mathematical olympiad-2010

J.J. Mačys

The texts and answers of the problems of the Lithuanian school mathematical olympiad-2010 are presented. Solutions of several problems are given and discussed.

Keywords: gifted children, mathematical olympiads, problem solving.