LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI ISSN 0132-2818
51 tomas, 2010, 133–138 www.mii.lt/LMR/

2010 m. *Kengūros* konkurso apžvalga

Juozas Juvencijus Mačys, Jurgis Sušinskas

Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos 4, LT-08663 Vilnius
E. paštas: paštas:jmacys@ktl.mii.lt; jur@ktl.mii.lt

Santrauka. Straipsnyje aptariamas 2010 m. Lietuvos *Kengūros* konkursas ir jo užduotys.
Raktiniai žodžiai: gabiųjų vaikų ugdymas, matematikos konkursai ir olimpiados, uždavinių sprendimas.

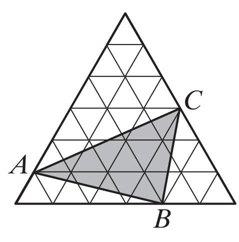
Įvadas

Šių metų Kengūros konkursas įvyko kovo 18 dieną – pagal įprastinę formulę: trečiąjį kovo ketvirtadienį. Lietuvoje jame dalyvavo per 62000 moksleivių iš daugiau kaip 1000 mokyklų, ir nedaug šalių gali pasigirti tokiu aktyvumu. Žinoma, kai kurių šalių dalyvių skaičiai įspūdingi – apie 2 milijonus Rusijoje, beveik milijonas Vokietijoje ir pan., o bendras dalyvių skaičius – beveik 6 milijonai. Į konkurso užduočių rengimą įsitraukia vis daugiau gerų specialistų (šiemet – jau iš 50 šalių), ir uždaviniai tampa vis įdomesni, patrauklesni. Suprantama, olimpiadų užduotys daug gilesnės, bet ir konkurso uždaviniai suformuluojami taip, kad „pačiupinėti“ juos gali kiekvienas, o iki platesnių apibendrinimų lieka vos žingsnis. Tai mes ir stengsimės pademonstruoti nagrinėdami įdomesnius Senjorų grupės (11–12 kl.) uždavinius. Baigdami įvadinę dalį, negalime nepasidžiaugti, kad šiuo sunkmečiu nugalėtojai vis dar apdovanojami simpatingais prizais ir kviečiami į Kengūros nugalėtojų tarptautines vasaros stovyklas. Daugiau informacijos skaitytojas gaus iš interneto [1], ten jis taip pat ras visų grupių užduotis ir teisingus atsakymus. Ankstesnių metų konkursų medžiagą galima rasti knygelėse [2].

Uždavinių analizė

1. *Didysis lygiakraštis trikampis sudarytas iš* 36 *mažesnių* 1 cm^2 *ploto lygiakraščių trikampių. Raskite* $\triangle ABC$ *plotą* (cm^2).

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

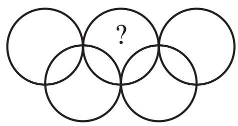


Sprendimas (sprendimo pabaigą žymėsime ženkleliu ∎). Jeigu du trikampiai turi bendrą kampą, tai jų plotai sutinka kaip atitinkamų kraštinių sandaugos. Iš tikrųjų, jeigu didumo γ kampą sudaro tiek vieno trikampio kraštinės a ir b, tiek ir kito kraštinės a_1 ir b_1, tai jų plotų santykis $\frac{1}{2}ab\sin\gamma : (\frac{1}{2}a_1b_1\sin\gamma) = ab : (a_1b_1)$. Vadinasi, tiesės AC atkirsto trikampio plotas sudaro $\frac{5\cdot3}{6\cdot6}$ didžiojo trikampio ploto dalį, BC atkirsto – dalį $\frac{3\cdot2}{6\cdot6}$, AB atkirsto – dalį $\frac{1\cdot4}{6\cdot6}$. Visi trys jie sudaro $(15+6+4) : 36 = \frac{25}{36}$ ploto. Vadinasi, trikampiui ABC lieka $\frac{11}{36}$ ploto, t.y. $\frac{11}{36}\cdot 36\ \text{cm}^2 = 11\ \text{cm}^2$.

Teisingas atsakymas **A**. ■

Beje, įrodyti teiginiui apie atitinkamų kraštinių sandaugas nereikia nė sinusų – užtenka dukart pasiremti paprastu ir gerai žinomu teiginiu: jeigu dviejų trikampių aukštinė bendra, tai plotai sutinka kaip pagrindai.

2. *Susikertantys penki apskritimai riboja devynias sritis. Į jas, po vieną į kiekvieną sritį, yra įrašyti visi skaičiai nuo* 1 *iki* 9 *taip, kad bet kuriame*



skritulyje įrašytų skaičių suma yra 11. *Koks skaičius yra įrašytas į sritį, pažymėtą klaustuku*?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Sprendimas. Imkime 9 taškus – 5 apskritimų centrus ir 4 lęšių formos sričių centrus ir juos iš kairės į dešinę sužymėkime raidėmis $a, b, c, d, e, f, g, h, k$. Atitinkamai pagal tuos taškus sritis, taip pat ir skritulius (apskritimus) vadinsime c, e, g, k. Taip sunumeravus, kairiausia bus sritis a, dešiniausia – sritis k, klaustukas atsidurs srityje e, tuo pačiu ir viduriniame skritulyje e.

Matome, kad du skritulius (a ir k) sudaro dvi sritys, o tris skritulius (c, e ir g) – trys sritys. Aišku, kad 9 (didžiausias iš įrašytų skaičių) negali atsidurti skritulyje, sudarytame iš trijų sričių, nes tada į tą skritulį įrašytų skaičių suma būtų ne mažesnė kaip $9+1+2=12$. Vadinasi, 9 yra vienoje iš sričių a ir k. Dėl simetrijos galime laikyti, kad tai sritis a. Kadangi skritulio a skaičių suma 11, tai srityje b stovi 2. Siekdami sutrumpinti perranką, nustatykime, kurioje srityje yra 1. Jeigu jo nebūtų bent viename iš skritulių e ir g, tai tame skritulyje skaičių suma būtų ne mažesnė kaip $3+4+5=12$ – per didelė. Vadinasi, 1 priklauso abiem apskritimams e ir g, taigi priklauso bendrai jų sričiai f. Bet tada 8 nepriklauso e ar g – trečias dėmuo būtų 2 (jau užimtas skaičius). Nepriklauso 8 ir skrituliui c – tada trečias dėmuo būtų 1. Vadinasi, 8 stovi srityje k. Dabar jau automatiškai $h=3, g=7$. Skrituliui e nepriklauso 6 (trečias dėmuo būtų $11-6-2=3$), taigi 6 yra srityje e. Tada srityje d yra $11-1-6=4$, o 5 lieka sričiai c. Gavome vienintelį dėstinį, ir srityje e yra 6. Trumpai skaičių dėstinį galime užrašyti taip: $(a,b,c,d,e,f,g,h,k)=(9,2,5,4,6,1,7,3,8)$. Jeigu būtume pradėję iš dešinės ir ėmę $k=9$, gautume simetrišką šiam dėstiniui $(a,b,c,d,e,f,g,h,k)=(8,3,7,1,6,4,5,2,9)$. Daugiau dėstinių, kaip jau įsitikinome, nėra, ir srityje e abiem atvejais stovi 6.

Teisingas atsakymas **B**. ■

Kiek netikėta, kad šį uždavinį galima spręsti sudarius lygtis. Palikę įsivestuosius žymėjimus, turime:

$$a+b=11, \tag{i}$$
$$b+c+d=11, \tag{ii}$$
$$d+e+f=11, \tag{iii}$$
$$f+g+h=11, \tag{iv}$$
$$h+k=11. \tag{v}$$

Visos kintamųjų reikšmės čia nuo 1 iki 9 ir nesikartoja, todėl

$$a+b+c+d+e+f+g+h+k=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45. \tag{vi}$$

Kur gali slėptis 9? Tai tik a arba k (kitaip trijų dėmenų suma būtų didesnė už 11). Kadangi sistema (i)–(vi) simetriška (ji nesikeičia pakeitus $a\to k$, $b\to h$, $c\to g$, $d\to f$), tai galime laikyti, jog $a=9$. Išsprendę uždavinį turėsime dar neužmiršti simetriško atsakymo.

Taigi $a=9$, $b=2$. Iš (vi) atėmę (ii) ir (iv), turime

$$a+e+k=45-22=23, \quad \text{t.y.} \quad e+k=23-9=14.$$

Iš šią lygtį tenkinančių porų $\{9,5\}$ ir $\{8,6\}$ neužimta tik antroji (9 jau užimtas), taigi tik dar nežinome, kas yra e, o kas k. Bet (iii) lygtyje $d+f\geqslant 1+3$, todėl $e\leqslant 7$, vadinasi, $e=6$. Tada $k=8$, iš (v) $h=3$. Reikšmę 7 atitikti gali tik g ((iii) lygybei ji per didelė, o (ii) lygybėje $b=2$, ir kito 2 būti negali). Taigi $g=7$, $f=1$, $e=6$ (reikšmė $d=6$ per didelė (ii) lygčiai), $d=4$, $c=5$.

Kai $a=9$, radome vienintelį sprendinį

$$(a,b,c,d,e,f,g,h,k)=(9,2,5,4,6,1,7,3,8).$$

Dar yra simetriškas jam sprendinys $(a,b,c,d,e,f,g,h,k)=(8,3,7,1,6,4,5,2,9)$. Abiem atvejais $e=6$.

3. *Kvadratinė šaknis* $\sqrt{0,44\ldots4}$ (*po kablelio stovi* 100 *ketvertų*) *užrašyta begaline dešimtaine trupmena. Kam lygus* 100-*asis trupmenos skaitmuo po kablelio*?

A) 1 **B)** 2 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

Sprendimas. Ar sunkus šis uždavinys? Kaip konkursinis – nelabai: atspėti reikiamą skaitmenį paprasta. Iš tikrųjų, skaičių $0,\underbrace{44\ldots4}$ (skliaustą $\underbrace{\quad}$ vartosime tik 100 vienodų skaitmenų žymėjimui) vedame prie $0,\underbrace{99\ldots9}$: $0,\underbrace{44\ldots4}=4\cdot 0,\underbrace{11\ldots1}=\frac{4}{9}\cdot 0,\underbrace{99\ldots9}$. Todėl $\sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}}=\frac{2}{3}\sqrt{0{,}99\ldots9}=\frac{2}{3}\sqrt{1-10^{-100}}$. Kadangi 10^{-100} – mažas skaičius, tai $\frac{2}{3}\sqrt{1-10^{100}}$ „vos vos“ mažesnis $\frac{2}{3}\sqrt{1}$, t.y. už $\frac{2}{3}=0{,}66\ldots$, ir jau galime spėti, kad norimas skaičius yra 6. ∎

Dabar pasižiūrėkime, kaip spręsti tą uždavinį griežtai. Jau įrodėme, kad $\sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}}<0,66\ldots$. Reikia įsitikinti, kad tas „vos vos“ tikrai mažas, ir mes, atmetę 10^{-100}, nenukrentame daug. Kitaip sakant, radome viršutinį rėžį, o dabar raskime apatinį rėžį. Už ką gi didesnis skaičius $\sqrt{0{,}99\ldots9}$? Jei skaičius a

yra tarp 0 ir 1, tai $a = \sqrt{a^2} = \sqrt{a \cdot a} < \sqrt{a \cdot 1} = \sqrt{a}$. Taigi $\sqrt{a} > a$, todėl $\sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}} = \frac{2}{3}\sqrt{0,\underbrace{99\ldots9}} > \frac{2}{3} \cdot 0,\underbrace{99\ldots9} = 0,\underbrace{66\ldots6}$. Kadangi duotasis radikalas yra tarp skaičių $0,\underbrace{66\ldots6}$ ir 0,666..., tai jo šimtasis skaitmuo po kablelio yra 6.

Teisingas atsakymas **C**. ■

O koks gi būtų gilesnis uždavinys? Aišku: ar galima nustatyti 101-ąjį, 102-ąjį ir kitus skaitmenis po kablelio?

Pabandykime tai padaryti. Spręsdami pradinį uždavinį, rėmėmės nelygybėmis

$$1 - x \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1,$$

bet jų užteko tik 100-jam skaitmeniui nustatyti. Pabandykime parašyti tikslesnes nelygybes. Kadangi

$$1 - x = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} \leqslant \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2, \quad \text{tai} \quad \sqrt{1-x} \leqslant 1 - \frac{x}{2}.$$

Iš šios nelygybės gauname

$$\begin{aligned}\sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}} &= \frac{2}{3}\sqrt{1 - 10^{-100}} \leqslant \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot 100^{-100}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 10^{-100} \\ &= 0{,}666\ldots - 0,\underbrace{00\ldots0}333\ldots = 0,\underbrace{66\ldots6}333\ldots.\end{aligned}$$

Kadangi mūsų x mažas, x^2 ypač mažas, skaičiuodami atmetėme tik $\frac{x^2}{4}$, tai galime tikėtis, kad 101-as skaitmuo bus 3.

Vis dėlto mums rūpi apatinis rėžis. Čia mums padės toks pavyzdys.

Sakykime, reikia 0,1 tikslumu apskaičiuoti $1{,}17^3$. Žinoma, galima nuobodžiai dauginti $1{,}17 \cdot 1{,}17 \cdot 1{,}17$, bet galima prisiminti sumos kubą

$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

ir taikyti apytikslę formulę

$$(1 + x)^3 \approx 1 + 3x.$$

Jeigu reikia tikslumo 0,01, teks imti formulę

$$(1 + x)^3 \approx 1 + 3x + 3x^2$$

(atlikite skaičiavimus savarankiškai).

Tai reiškia, kad mūsų atveju verta pabandyti kairėje prie $1 - \frac{x}{2}$ prirašyti kvadratinį narį Cx^2, o tada C parinkti taip, kad nelygybė

$$1 - \frac{x}{2} - Cx^2 \leqslant \sqrt{1-x}$$

būtų teisinga su visais $x \in (0, 1)$. Ieškome C: $1 + \frac{x^2}{4} + C^2x^4 - x - 2Cx^2 + Cx^3 \leqslant 1 - x$, $(2C - \frac{1}{4})x^2 \geqslant Cx^3 + Cx^4$, $2C - \frac{1}{4} \geqslant Cx + c^2x^2$. Kad ši nelygybė būtų teisinga visiems x tarp 0 ir 1, turi būti $2C - \frac{1}{4} \geqslant C + C^2$, $C^2 - C + \frac{1}{4} \leqslant 0$, $(C - \frac{1}{2})^2 \leqslant 0$, $C = \frac{1}{2}$. Gavome nelygybę

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1 - \frac{x}{2}.$$

Panašios nelygybės vadinamos Teiloro nelygybėmis, o gauti daugianariai – Teiloro daugianariais. Jie labai svarbūs matematikoje, ir ne tik apytiksliuose skaičiavimuose.

O dabar pasižiūrėkime, ką pastaroji nelygybė sako apie mūsų radikalo 101-ą ir tolimesnius skaitmenis: $\sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}} = \frac{2}{3}\sqrt{1-10^{-100}} \geqslant \frac{2}{3}(1-\frac{1}{2}\cdot10^{-100}-\frac{1}{2}\cdot10^{-200}) = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot10^{-100}-\frac{1}{3}\cdot10^{-200} = 0,\underbrace{66\ldots6}333\ldots - 0,\underbrace{00\ldots0}333\ldots = 0,\underbrace{66\ldots6}\underbrace{33\ldots3}$.

Kadangi $0,\underbrace{66\ldots6}\underbrace{33\ldots3} < \sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}} < 0,\underbrace{66\ldots6}\underbrace{33\ldots3}333\ldots$, tai 101-as, 102-as, ..., 200-as skaitmenys yra trejetai. ■

4. *Išraiškoje* $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10$ *kiekvieną žvagždutę reikia pakeisti ženklu „+“ arba ženklu „·“. Didžiausią reikšmę, kurią galima gauti, pažymėkime* N*. Kam lygus mažiausias pirminis skaičiaus* N *daugiklis*?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** Kitas skaičius

Sprendimas. Aišku, kad pirmą žvagždutę reikia keisti „+“: juk vienetą daugindami iš bet kurio skaičiaus ir gausime tą skaičių, o vienetą pridėję – gausime vienetu daugiau. Visur kitur geriau dėti ne „+“, o „·“. Vadinasi, išraiškos didžiausia galima reikšmė yra $N = 1+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$. Kadangi antras dėmuo dalijasi iš 2, o pirmas – ne, tai N nesidalija iš 2. Lygiai taip pat N nesidalija iš 3, iš 5, iš 7. Vadinasi, mažiausias pirminis daugiklis yra kitas skaičius.

Renkamės atsakymą **E**. ■

Matome, kad išspręsti uždavinį buvo nesudėtinga. Bet dabar savęs paklauskime: ar šiame uždavinyje daug „matematikos“ ? Visų pirma, jeigu tai būtų ne konkurso uždavinys, tai mums reikėtų ne džiaugtis, kad mažiausias N daugiklis – tai ne 2, 3, 5 ar 7, o tiesiog nurodyti tą mažiausią pirminį daugiklį (beje, jeigu N – pirminis skaičius, tai jį ir gautume kaip atsakymą; jeigu N – sudėtinis skaičius, tai jį galima išskaidyti pirminiais, o kadangi tame skaidinyje nėra 2, 3, 5, 7, tai visi pirminiai daugikliai bus ne mažesni už sekantį pirminį, t.y. 11).

Mums nelieka nieko kita, kaip tikrinti iš eilės pirminius skaičius, ir tikėtis, kad tai truks neypač ilgai. Pasirodo, kad mūsų skaičius N (beje, jį galima trumpai užrašyti taip: $N = 1+10!$) dalijasi iš 11. Įsitikinkime tuo. Raskime skaičiaus 10! dalybos iš 11 liekaną: skaičių $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$, $(21+2)(22+8)(35+1)(88+2)$, $2\cdot8\cdot1\cdot2$, 32 liekanos sutampa ir lygios 10. Vadinasi, $1+10!$ dalijasi iš 11.

Teisingas atsakymas **E**. ■

Dabar jau aišku, kad uždavinio atsakymą **E** sąlygoje galima duoti ir tokį: 11. Nuo to sprendime ne kažin kas pasikeistų.

Ir pagaliau keli matematiniai akcentai. Dažnas olimpiadininkas žino Vilsono teoremą: *Jeigu* p *– pirminis skaičius, tai* $(p-1)!+1$ *dalijasi iš* p. Mūsų atveju tai reiškia, kad $10!+1$ dalijasi iš 11.

Be to, aukščiau nagrinėjome, kas daugiau: natūraliųjų skaičių suma ar sandauga, t.y. ab ar $a+b$. Nelygybė $ab > a+b$ ekvivalenti $ab-a-b > 0$, $ab-a-b+1 > 1$, $(a-1)(b-1) > 1$. Vadinasi, sandauga visada didesnė, išskyrus 2 atvejus: 1) kai $a = 1$ (arba $b = 1$, arba $a = 1$ ir $b = 1$), 2) kai $a = b = 2$. Mums teprireikė 1) atvejo.

Literatūra

[1] Available from Internet: www.kengura.lt.

[2] J. Mačys. *Kengūra. 1999, ..., 2009. Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai.* TEV, Vilnius, 1999, ..., 2009.

SUMMARY

Review of the Kangaroo competition-2010

J.J. Mačys, J. Sušinskas

The most interesting tasks of the Lithuanian Kangaroo competition-2010 are considered.

Keywords: gifted children, mathematical competitions, problem solving.