

Spektro įvertinimo algoritmų palyginamoji analizė

Gintarė Petreikytė¹, Kazys Kazlauskas^{1,2}

¹*Matematikos ir informatikos institutas*

Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius

²*Vilniaus pedagoginis universitetas*

Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius

E. paštas: g.petreikyte@yahoo.com; kazlausk@ktl.mii.lt

Santrauka. Straipsnyje pateikiama svarbiausių teorinių spektro įvertinimo metodų palyginamoji analizė. Tiriama šių metodų spektro skiriamosios gebos priklausomybė nuo signalo ilgio, triukšmo lygio ir parametrinių metodų eilės bei pateikiami eksperimento rezultatai.

Raktiniai žodžiai: spektrinis įvertis, neparametriniai metodai, parametriniai metodai, harmoniniai metodai, palyginamoji analizė.

Įvadas

Signalų spektro įvertinimas yra svarbi skaitmeninių signalų tyrimų [1, 2] sudedamoji dalis. Pastebėta, kad kuo ilgesnis signalas, tuo spektrinio tankio įvertis gaunamas tikslesnis. Praktikoje nagrinėjami riboto ilgio signalų spektrai, tačiau juos vertinant atsiranda netikslumų. Taip yra todėl, kad signalo ilgis tiesiogiai įtakoja spektro įverčio kokybę. Tiriant stacionarius signalus, pastebėta, kad tikslesni spektro įverčiai gaunami, kai signalas yra ilgas. Nestacionarių signalų atveju, negalima parinkti kiek norima ilgo signalo, nes sekos ilgis priklauso nuo duomenų statistinių charakteristikų kitimo spartos. Signalų spektrų tyrimuose siekiama atrinkti kiek galima trumpesnius signalų įrašus, iš kurių galima įvertinti signalų spektrines charakteristikas.

Straipsnyje analizuojama vienuolika svarbiausių spektro įvertinimo technologijų ir algoritmų, pradedant neparametriniais metodais, paremtais periodograma, ir baigiant šiuolaikiniais parametriniais metodais, paremtais tiesiniais autoregresiniais modeliais.

1 Spektro įvertinimo metodų apžvalga

Spektro įvertinimo metodai skirstomi į neparametrinius, parametrinius ir harmoninius metodus. Neparametriniai spektro įvertinimo metodai, tai tokie metodai, kur nedaroma prielaidų apie duomenų gavimo šaltinį. Jie yra lengvai suprantami ir lengvai apskaičiuojami, naudojant greitosios Furjė transformacijos (GFT) algoritmus. Tačiau šie metodai reikalauja turėti galimybę skaičiuoti ilgų įrašų duomenis tam, kad gautume būtiną dažnio skiriamąją gebą.

Pagrindinis neparametrinių metodų trūkumas – daromos prielaidos, kad autokoreliacijos $r_{xx}(m)$ įvertis lygus nuliui, kai $m > N$. Tai labai apriboja dažnio skiriamąją gebą ir spektro įverčio kokybę. Be to, skaičiuojant periodogramą, daromos prielaidos,

kad duomenys yra periodiškai su periodu T . Nei viena prielaida nėra reali sprendžiant praktinius uždavinius.

Parametriniai spektro įvertinimo metodai ekstrapoluoja autokoreliacijos reikšmes, kai $m > N$. Ekstrapoliacija yra galima, jei turime išankstinę informaciją, kaip duomenys buvo gauti. Tokiu atveju signalų generavimo modelis gali būti sudarytas su parametrais, kurie gali būti įvertinti, naudojant stebimus duomenis. Iš modelio ir apskaičiuotų parametrų galime apskaičiuoti spektrinį tankį. Modeliuojant nereikia naudoti langų funkcijų ir daryti prielaidos, kad autokoreliacijos seka lygi nuliui, kai $m > N$. Naudojant parametrinius modelius, gaunama geresnė dažnių skiriamoji geba lyginant su neparimetriniais metodais. Tai ypač ryšku, kai reikia įvertinti trumpų sekų spektrinius tankius.

Harmoniniai metodai yra laikomi dažnių vertinimo technologijomis, paremtomis autokoreliacinės matricos tikrinių reikšmių analize [1]. Tokios spektro analizės metu informacija išskaidoma į koreliacijos matricą, o informacija priskiriama signalo arba triukšmo harmonikai.

2 Eksperimentiniai rezultatai

Šioje straipsnio dalyje aprašomi modelinių signalų spektro įverčių eksperimentiniai rezultatai. Eksperimento tikslas – palyginti signalo, sudaryto iš dviejų sinusinių ir adityviojo triukšmo, skirtingų spektro vertinimo metodų skiriamąją gebą, kai keičiamas signalo ir triukšmo santykis (SNR), signalo ilgis N ir parametrinių metodų eilė. Pastarųjų eilė buvo pasirinkta tirti intervale 6–18. Tiriant dažnių skiriamąją gebą, ieškota mažiausio atstumo tarp signalo sinusinių viršūnių. Šiuo atveju spektro vertinimas tirtas remiantis Velčo, modifikuotu Velčo, diskretinės Furjė transformacijos (DFT), kovariaciniu, modifikuotu kovariaciniu, Burgo, Jule–Volkerio, tikrinių reikšmių, MUSIC, periodogramos ir Tomsono daugiajuosčiu metodais.

Eksperimentui atlikti pasirinktas signalas, sudarytas iš dviejų sinusinių bei adityvaus Gauso triukšmo:

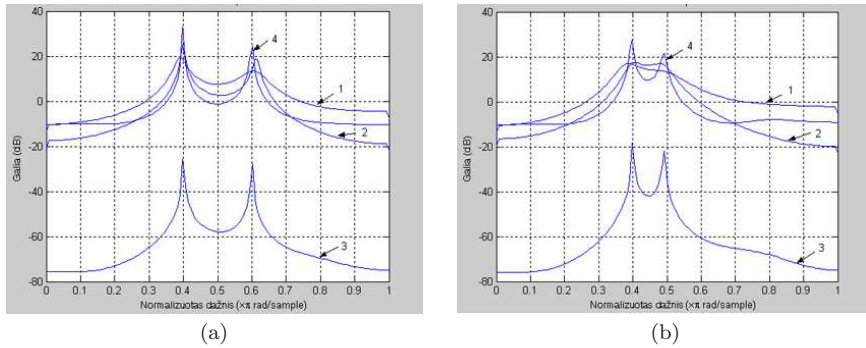
$$x(t) = \sqrt{20} \sin 2\pi ft + \sqrt{10} \sin 2\pi(f + \Delta f)t + \varepsilon(t), \quad t = 0, 1, \dots,$$

čia $\varepsilon(t)$ yra Gauso triukšmas, kurio vidurkis – nulis, Δf dažnio skiriamoji geba, f – dažnis. Signalo triukšmo santykis (SNR) skaičiuojamas pagal išraišką $10 \lg \frac{\sigma_s^2}{\sigma_\varepsilon^2}$, kur σ_s^2 yra abiejų sinusinių dispersija, o σ_ε^2 yra adityvaus Gauso triukšmo dispersija.

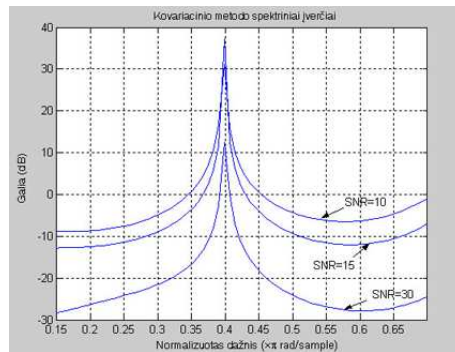
1(a) pav. vaizduojamas Jule–Volkerio, Burgo, tikrinių reikšmių ir MUSIC metodų spektro įverčių palyginimas, kai signalo ilgis $N = 25$, signalo ir triukšmo santykis $SNR = 72$, o skiriamoji geba $\Delta f = 0,1$. Pastebime, kad Jule–Volkerio metodu gaunamas signalo spektras turi mažesnius pikus, palyginus su Burgo, tikrinių reikšmių ir MUSIC metodais. Jei sumažiname Δf iki 0,045, iš antro paveikslėlio (žr. 1(b) pav.) akivaizdžiai matome, kad Jule–Volkerio ir Burgo metodai aiškių pikų nebeturi. Taip pat pastebime nežymų šių metodų pikų poslinkį.

Adityvaus triukšmo poveikis kovariaciniu metodu tiriamam signalo, sudaryto iš vienos sinusinės, spektro įverčiui, kai normalizuotas dažnis 0,2, o signalo ilgis – 25, parodytas 2 pav.

Adityvaus triukšmo poveikis tikrinių reikšmių metodu tiriamam signalo, sudaryto iš dviejų sinusinių, spektro įverčiui, kai signalo ilgis $N = 25$, o $\Delta f = 0,045$ yra



1 pav. Jule–Volkerio (1), Burgo (2), tikrinių reikšmių (3) ir MUSIC (4) metodų spektrų įverčių palyginimas.



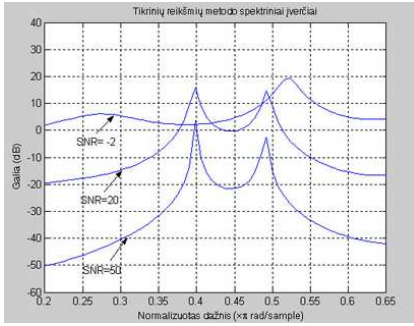
2 pav. Adityvaus triukšmo poveikis signalui, tiriamam kovarciniu metodu.

parodytas 3 pav. Ketvirtajame paveikslėlyje (žr. 4 pav.) vaizduojamas triukšmo poveikis Burgo metodu tiriamam signalui, o 5 pav. – MUSIC metodu. Iš šių iliustracijų aiškiai matome, jog tikrinių reikšmių metodas esant $SNR = -2$ dB neturi aiškios skiriamosios gebos. Burgo metodu gaunami pikai yra maži, kai $SNR \geq 20$, o MUSIC metodu gauti signalo dažniai turi aiškius pikus, kai signalo ir triukšmo santykis 20 dB ir 50 dB.

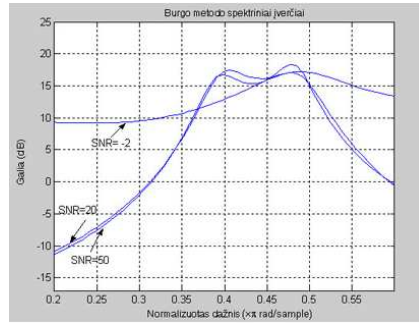
Žemiau esančiose 1–3 lentelėse įvesti keli žymėjimai: * reiškia tyrimo sąlygas, ** reiškia metodo eilę, ● – skiriamoji geba nėra tiksli, „–“ – reikšmės negalimos.

1 lentelėje rodoma kaip signalo skiriamoji geba Δf priklauso nuo signalo ir triukšmo santykio (SNR). Signalo ilgis $N = 160$ taškų. Velčo ir DFT metodai neduoda jokių rezultatų, kai $SNR = -5$. Dauguma nagrinėtų metodų, duoda nepatikimus rezultatus, kai $SNR = 0$. Tuo tarpu tikrinių reikšmių, MUSIC ir periodogramos metodai yra vieni patikimiausių esant skirtingo diapazono triukšmui. Kovariacinis, Burgo, tikrinių reikšmių ir MUSIC metodai turi didžiausią skiriamąją gebą, kai $SNR = 72$.

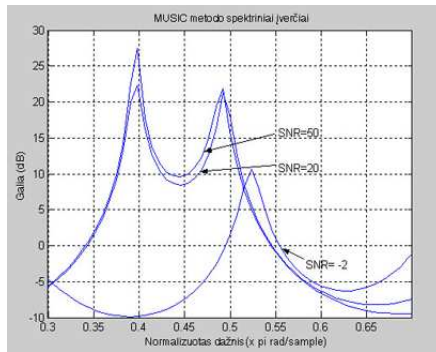
Antruoju eksperimentu demonstruojame signalo spektrų vertinimo metodų palyginimą, kai keičiamas signalo ilgis N . Gautieji rezultatai rodomi antrojoje lentelėje. Trumpus signalus vertinti labiausiai tinkami yra kovariacinis, modifikuotas kovariacinis, Burgo, Jule–Volkerio, MUSIC ir periodogramos metodai. Tuo tarpu modifikuo-



3 pav. Signalų spektriniai įvertiniai tikrinių reikšmių metodu.



4 pav. Signalų spektriniai įvertiniai Burgo metodu.



5 pav. Signalų spektriniai įvertiniai MUSIC metodu.

1 lentelė. Signalų skiriamosios gebos priklausomybės nuo triukšmo (SNR) palyginamoji lentelė*.

Metodas / SNR(db)	-5	0	5	10	15	20	50	72
Velčo	-	0,008●	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015
Modifikuotas Velčo	0,039	0,038●	0,043	0,043	0,044	0,044	0,044	0,044
Diskr. Furjė transformacija	-	0,007●	0,007	0,007	0,008	0,008	0,008	0,008
Kovariacinis**	0,84	0,082●	0,075	0,061	0,047	0,035	0,007	0,006
Modif. Kovariacinis	0,083	0,082●	0,075	0,061	0,047	0,036	0,006	0,007
Burgo**	0,083	0,083●	0,075	0,061	0,047	0,035	0,010	0,006
Jule-Volkerio**	0,081	0,083●	0,075	0,062	0,050	0,042	0,035	0,035
Tikrinių reikšmių**	0,035	0,028	0,021	0,015	0,010	0,009	0,006	0,006
MUSIC**	0,035	0,028	0,021	0,015	0,010	0,009	0,006	0,006
Periodograma	0,005	0,005	0,006	0,006	0,006	0,006	0,007	0,007
Tomsono daugiajuostis	0,021	0,042●	0,035	0,035	0,035	0,035	0,037	0,050

* – $N = 160$, ** – eilė 6, ● – nepatikimi rezultatai.

tas Velčo ir Tomsono daugiajuostis metodai neveikia, kai signalo ilgis mažesnis nei $N = 40$, o DFT ir tikrinių reikšmių neveikia, kai signalo ilgis $N = 20$ ir mažesnis.

Trečiojoje lentelėje tyrėme, kaip signalo spektro skiriamoji geba Δf priklauso nuo parametrinių metodų eilės. Tyrimo sąlygos: dviejų sinusinių suma, fiksuotas triukšmo lygis ($SNR = 72$) ir sekos ilgis ($N = 160$). Lentelėje reikšmės pažymėtos

2 lentelė. Signalo skiriamosios gebos priklausomybės nuo reikšmių ilgio N palyginamoji lentelė*.

N	Velčo Velčo	Mod. DFT Velčo	Kovaria- cinis**	Mod. kova- riacinis**	Burgo	Jule- Volkerio	Tikrinių reikšmių**	MUSIC**	Periodo- grama	Tomsono daugiaj.	
15	0,078●	–	–	0,007	0,007	0,012	0,05	–	0,010	0,051	–
20	0,06●	–	–	0,007	0,007	0,010	0,05	0,010	0,010	0,040	–
30	0,029	–	0,037	0,007	0,007	0,013	0,05	0,010	0,0010	0,024	–
40	0,022	0,179	0,028	0,007	0,006	0,011	0,05	0,010	0,0010	0,018	0,220
50	0,018	0,150	0,023	0,006	0,006	0,009	0,048	0,0010	0,0010	0,015	0,180
100	0,009	0,095	0,012	0,006	0,006	0,008	0,043	0,008	0,008	0,008	0,0140
150	0,008	0,061	0,008	0,006	0,006	0,008	0,042	0,008	0,008	0,007	0,08
200	0,006	0,035	0,007	0,006	0,006	0,008	0,037	0,008	0,008	0,007	0,065
250	0,005	0,028	0,007	0,006	0,006	0,008	0,034	0,008	0,008	0,007	0,034
300	0,005	0,024	0,007	0,006	0,006	0,008	0,032	0,008	0,008	0,006	0,03
400	0,005	0,019	0,007	0,006	0,006	0,008	0,031	0,008	0,008	0,006	0,018

* – $SNR = 72$, ** – eilė 6, ● – nepatikimi rezultatai.**3 lentelė.** Signalo skiriamosios gebos priklausomybės nuo parametrinių metodų eilės palyginamoji lentelė*.

Eilė	Kovariacinis	Mod. kovariacinis	Burgo	Jule- Volkerio	Tikrinių reikšmių	MUSIC
6	0,008	0,008	0,011	0,040	0,010	0,010
8	0,008	0,008	0,011	0,033	0,010	0,010
10	0,008	0,008	0,011	0,027	0,010	0,010
12	0,008	0,008	0,011	0,025	0,010	0,010
14	0,008	0,008	0,011	0,021	0,010	0,010
16	0,008	0,008	0,011	0,020	0,010	0,010
18	0,008	0,008	0,011	0,019	0,010	0,010

* – $SNR = 72$, $N = 160$.

tik parametriniams metodams, nes tik jie turi eilę. Didžiausią skiriamąją gebą turi kovariacinis ir modifikuotas kovariacinis metodai.

Išvados

Nėra universalus metodo, kuris visais atvejais turėtų didžiausią spektro skiriamąją gebą. Kai signalo ir triukšmo santykis yra mažas, geriausius rezultatus rodo periodogramos metodas, tuo tarpu daugumos kitų metodų rezultatai yra nepatikimi. Kovariacinis, Burgo, tikrinių reikšmių ir MUSIC metodai turi didžiausią skiriamąją gebą, kai signalas yra labai užtriukšmintas.

Tiriant ilgus signalus, visų minėtų metodų skiriamosios gebos yra didelės, tačiau signalo sekos ilgį radikaliai sumažinus, patikimiausi metodai išlieka kovariacinis ir modifikuotas kovariacinis.

Eksperimento metu parodyta ir tai, kad parametrinių metodų eilė iš esmės neturi įtakos signalo spektro įverčiui. Vieninteliu Jule–Volkerio metodu signalo spektrinis įvertis kinta keičiant metodo eilę. Kuo ji didesnė, tuo ir skiriamoji geba didesnė.

Literatūra

- [1] J.G. Proakis and D.G. Manolakis. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Englewood Cliffs, NJ, Printice Hall, 1996.

- [2] P. Stoica and R. Moses. *Introduction to Spectral Analysis*. Upper Sadle River, NJ, Prentice Hall, 1997.

SUMMARY

Comparative analysis of power spectrum estimation methods

G. Petreikytė, K. Kazlauskas

The subject of this paper is the comparative analysis of the eleven most important nonparametric, parametric and subspace power spectrum estimation methods. Theoretically and experimentally we analyse how the frequency resolution of the spectrum estimation methods depends on the signal length, signal-to-noise ratio (SNR) and the order parametric methods.

Keywords: power spectrum estimation, nonparametric methods, parametric methods, subspace methods, comparative analysis.