VILNIAUS UNIVERSITETAS

Haroldas Giedra

ĮRODYMŲ SISTEMA KORELIATYVIŲ ŽINIŲ LOGIKAI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, informatika (09P)

Vilnius, 2014

Disertacija rengta 2009 - 2013 metais Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute.

Mokslinis vadovas:

Doc. habil. dr. Regimantas Ričardas Pliuškevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika - 09P).

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Informatikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

Prof. habil. dr. Gintautas Dzemyda (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika - 09P).

Nariai:

Prof. dr. Eduardas Bareiša (Kauno technologijos universitetas, technologijos mokslai, informatikos inžinerija - 07T),

Prof. habil. dr. Genadijus Kulvietis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, technologijos mokslai, informatikos inžinerija - 07T),

Prof. dr. Rimantas Vaicekauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika - 09P),

Prof. habil. dr. Antanas Žilinskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika - 09P).

Oponentai:

Prof. dr. Albertas Čaplinskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika - 09P),

Prof. habil. dr. Henrikas Pranevičius (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika - 09P).

Disertacija bus ginama Vilniaus universiteto viešame Informatikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2014 m. gruodžio 22 d. 13 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto 203 auditorijoje.
Adresas: Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2014 m. lapkričio 21 d.
Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Haroldas Giedra

PROOF SYSTEM FOR LOGIC OF CORRELATED KNOWLEDGE

Summary of Doctoral Dissertation
Physical Sciences, Informatics (09P)

Vilnius, 2014

The dissertation work was carried out at the Institute of Mathematics and Informatics of Vilnius University in 2009 - 2013.

Scientific Supervisor:

Assoc. Prof. Dr. Habil. Regimantas Ričardas Pliuškevičius (Vilnius University, Physical Sciences, Informatics - 09P).

The dissertation will be defended at the Council of the Scientific Field of Informatics of Vilnius University

Chairman:

Prof. Dr. Habil. Gintautas Dzemyda (Vilnius University, Physical Sciences, Informatics - 09P).

Members:

Prof. Dr. Eduardas Bareiša (Kaunas University of Technology, Technological Sciences, Informatics Engineering - 07T),

Prof. Dr. Habil. Genadijus Kulvietis (Vilnius Gediminas Technical University, Technological Sciences, Informatics Engineering - 07T),

Prof. Dr. Rimantas Vaicekauskas (Vilnius University, Physical Sciences, Informatics - 09P),

Prof. Dr. Habil. Antanas Žilinskas (Vilnius University, Physical Sciences, Informatics - 09P).

Opponents:

Prof. Dr. Albertas Čaplinskas (Vilnius University, Physical Sciences, Informatics - 09P),

Prof. Dr. Habil. Henrikas Pranevičius (Kaunas University of Technology, Physical Sciences, Informatics - 09P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of the Scientific Field of Informatics in the auditorium number 203 at the Institute of Mathematics and Informatics of Vilnius University, at 1 p.m. on 22th of December 2014.
Address: Akademijos st. 4, LT-08663 Vilnius, Lithuania.

The summary of the doctoral dissertation was distributed on 21th of November 2014.
The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Turinys

1 Įvadas

1.1 Tyrimų sritis ir problemos

Kvantinėje mechanikoje kvantinės sistemos yra sudarytos iš elementariųjų dalelių (pvz., elektronų). Žinios apie tokias sistemas gali būti analizuojamos, naudojant matematinės logikos skaičiavimus. 1936 metais von Neumann kartu su G. Birkhoff pristatė kvantinės logikos idėjas darbe [6]. Vėliau keleta neišsprendžiamų problemų buvo pateikta [2, 24]. D. Aerts, C. Randall ir D. Foulis parodė, kad kvantinė logika susiduria su problemomis, kai norima aprašyti sistemas, kurias sudaro daugiau nei viena elementarioji dalelė, ir kurios gali būti kvantinio susietumo (angl. quantum entanglement) būsenoje. Taip pat jie parodė, kad tenzorinė operacija kvantinei logikai neegzistuoja.

Kvantinių žinių analizei buvo pristatyta ir daugiau logikos teorijų. Viena iš naujausių yra koreliatyvių žinių logika, kurią apibrėžė Alexandras Baltag ir Sonja Smets 2010 metais, darbe [4]. Koreliatyvių žinių logika atsiriboja nuo Hilberto erdvių, kurios yra naudojamos kvantinėje mechanikoje ir kvantinėje logikoje, ir siūlo naudoti koreliatyvių žinių modelius kvantinėms sistemoms ir kvantiniam susietumui aprašyti. Alexandras Baltag ir Sonja Smets pateikė Hilberto tipo skaičiavimą, tačiau automatinės išvedimo sistemos, kuri leistų analizuoti kvantinių sistemų žinias automatiniu būdu, iki šiol nebuvo pateikta.

1.2 Aktualumas

Kvantinių sistemų būsenos yra nustatomos, atliekant dalelių matavimus. Taip pat operacijos kvantiniuose skaičiavimuose yra atliekamos, keičiant kvantinio registro būsenas, kurį sudaro kvantiniai bitai arba kvantinės dalelės, kol gaunamas galutinis rezultatas. Dalelių matavimų žinios ir kvantinio registro būsenų keitimo procesas gali būti analizuojamas ir valdomas, naudojant matematinės logikos skaičiavimus. Automatinė įrodymų sistema koreliatyvių žinių logikai leistų tai atlikti automatiniu būdu, naudojant kompiuterius.

1.3 Darbo tikslas

Pagrindinis darbo tikslas yra sukurti automatinę įrodymų sistemą koreliatyvių žinių logikai, kuri tenkintų pagrįstumo, pilnumo ir baigtinumo savybes.

1.4 Uždaviniai

Uždaviniai, siekiant pagrindinio tikslo, yra šie:

- Sukurti sekvencinį skaičiavimą GS-LCK koreliatyvių žinių logikai.
- Įrodyti GS-LCK pagrįstumą.
- Įrodyti taisyklių apverčiamumą.
- Įrodyti silpninimo leistinumą.
- Įrodyti prastinimo leistinumą.
- Įrodyti pjūvio leistinumą.
- Įrodyti GS-LCK pilnumą.
- Sukurti įrodymų paieškos procedūrą sekvenciniam skaičiavimui GS-LCK.
- Įrodyti procedūros baigtinumą.

1.5 Tyrimų metodai

Sekvencinis skaičiavimas yra naudojamas kaip pagrindinis metodas sukurti automatinei įrodymų sistemai. Gerhard Gentzen pristatė sekvencinius skaičiavimus 1934 metais darbe [10]. Sekvencinis skaičiavimas leidžia atlikti automatinę įrodymų paiešką, jei pjūvio taisyklė jame yra leistina. Mes naudojame semantinės internalizacijos idėjas, kurias pateikė Sara Negri darbe [18], kad gautume pjūvio leistinumą ir kitas sekvencinio skaičiavimo GS-LCK savybes. Hilberto tipo sistema, kurią pateikė Alexandras Baltag ir Sonja Smets darbe [4], yra naudojama GS-LCK pilnumui įrodyti.

1.6 Mokslinis naujumas

Tyrimų metu buvo gauti tokie nauji moksliniai rezultatai:

- Sukurtas sekvencinis skaičiavimas GS-LCK koreliatyvių žinių logikai.
- Įrodytas GS-LCK pagrįstumas, pilnumas ir silpninimo, prastinimo ir pjūvio leistinumas.
- Sukurta baigtinė įrodymų paieškos procedūra sekvenciniam skaičiavimui GS-LCK.
- Įrodytas koreliatyvių žinių logikos išsprendžiamumas.

1.7 Ginamieji teiginiai

- Sukurtas sekvencinis skaičiavimas GS-LCK koreliatyvių žinių logikai, kuris tenkina tokias savybes:
  - Pagrįstumas.
  - Taisyklių apverčiamumas.
  - Silpninimo, prastinimo ir pjūvio leistinumas.
  - Pilnumas.
- Sukurta procedūra GS-LCK-PROC, kuri atlieka baigtinę įrodymų paiešką sekvenciniame skaičiavime GS-LCK.
- Koreliatyvių žinių logika yra išsprendžiama.

2 Logika ir kvantinė mechanika

J. von Neumann, be kitų pasiekimų kompiuterių moksle, fizikoje, matematikoje, yra žinomas ir kaip kvantinės logikos tėvas. Jo knygos Grundlagen der Quantenmechanik 3 skyriuje [30] yra pristatoma idėja apie kvantinių sistemų fizinių savybių loginį skaičiavimą.

Kvantinė logika vystėsi dvejomis pagrindinėmis kryptimis [25]. Pirmoji yra originalusis kvantinės logikos projektas. 1936 metais J. von Neumann kartu su G. Birkhoff pateikė darbą [6] apie kvantinės mechanikos loginės struktūros analizę. Tolimesnis vystymas buvo atliekamas K. Husimi [15] ir kitų autorių. Buvo gauta svarbių neišsprendžiamų problemų [2, 24]. D. Aerts, C. Randall ir D. Foulis parodė, kad kvantinė logika susiduria su problemomis, kai norima aprašyti sistemas, kurias sudaro daugiau nei viena elementarioji dalelė, ir kurios gali būti kvantinio susietumo (angl. quantum entanglement) būsenoje. Taip pat jie parodė, kad tenzorinė operacija kvantinei logikai neegzistuoja.

Kita kryptis buvo suformuota G. Mackey ir C. Piron. G. Mackey ieškojo aksiomų ir prielaidų sąrašo, iš kurio Hilberto erdvės modelis galėtų būti išvestas. G. Mackey kryptis vėliau buvo vystoma ir plečiama C. Piron [20, 21]. C. Piron pateikė aksiomų sistemą, kuri formuoja projekcijų operatorių logiką apibendrintoms Hilberto erdvėms. Toliau darbas buvo plečiamas M. Solèr ir R. Mayet [17, 26]. Vienas iš vėliausių rezultatų šioje kryptyje yra koreliatyvių žinių logika, kurią pateikė Alexandras Baltag ir Sonja Smets [4].

Daugiau rezultatų apie kvantinės mechanikos ir logikos sąsają pateikiama darbuose [1, 3, 5, 7, 8, 11, 19, 22, 23, 27].

3 Koreliatyvių žinių logika

Koreliatyvių žinių logika yra episteminė logika, kurioje agentams yra suteikta papildoma galimybė - vykdyti stebėjimus. Tradiciškai, agentai gali atlikti teigiamą ir neigiamą savianalizę, daryti loginius išvedimus bei jų žinios yra teisingos. Episteminės logikos yra taikomos kompiuterių mokslo, dirbtinio intelekto srityse, paskirstytose sistemose, žinių bazių suliejime (angl. merging), robotikoje ir kompiuterių tinkluose. Agentams suteikiant galimybę vykdyti stebėjimus, koreliatyvių žinių logika papildomai gali būti taikoma, atliekant žinių analizę kvantinėse sistemose ir kvatinėse koreliacijose.

Kvantinių sistemų analizei naudojant kvantinę logiką, yra susiduriama su problemomis, kai sistemos yra sudarytos daugiau nei iš vienos kvantinės dalelės, ypatingai tais atvejais, kai jos yra sujungtos kvantinio susietumo ryšiu (angl. quantum entanglement) [2, 28]. Viena iš to priežasčių yra kvantinės logikos ryšys su Hilberto erdvėmis. Koreliatyvių žinių logika atsiriboja nuo Hilberto erdvių ir siūlo naudoti koreliacinius modelius kvantinėms sistemoms ir kvantiniam susietumui išreikšti. Alexandras Baltag and Sonja Smets apibrėžė koreliatyvių žinių logiką ir Hilberto tipo skaičiavimą darbe [4]. Mūsų pagrindinis tikslas - pristatyti automatinę įrodymų paieškos sistemą koreliatyvių žinių logikai ir įrodyti LCK logikos išsprendžiamumą. Mes naudojame semantinės internalizacijos idėjas, kurias pasiūlė Sara Negri darbe [18], kad galėtume gauti sekvencinį skaičiavimą su algoritmiškumo savybėmis.

3.1 Sintaksė ir semantika

3.1.1 Sintaksė

Tarkime turime agentų aibę $N = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Kiekvienas agentas gali atlikti savo lokalius stebėjimus. Jei $O_{a_1}, ..., O_{a_n}$ yra kiekvieno agento galimų stebėjimų aibės, tai jungtinis stebėjimas yra stebėjimų rinkinys $o = (o_a)_{a \in N} \in O_{a_1} \times ... \times O_{a_n}$ arba $o = (o_a)_{a \in I} \in O_I$, kur $O_I := \times_{a \in I} O_a$ ir $I \subseteq N$. Jungtiniai stebėjimai kartu su rezultatais $r \in R$ sukuria atomines formules o^r.

Kiekvienas agentas gali žinoti kokią nors informaciją, tai užrašoma formulėmis $K_{a_1}A$ arba $K_{\{a_1\}}A$, kurios reiškia, kad agentas a_1 žino A. Agentų grupė taip pat gali žinoti kokią nors informaciją. Tai užrašoma formulėmis $K_{\{a_1,a_2,a_3\}}A$ arba $K_I A$, kur $I = \{a_1, a_2, a_3\}$. Detalesnis aprašymas apie žinojimo operatorių K yra pateikiamas darbuose [9, 29].

Koreliatyvių žinių logikos sintaksė apibrėžiama tokiu būdu:

Apibrėžimas 1 (Koreliatyvių žinių logikos sintaksė). *Koreliatyvių žinių logikos kalba turi tokią sintaksę:*

$$F := p \mid o^r \mid \neg F \mid F \vee F \mid F \wedge F \mid F \to F \mid K_I F$$

kur p yra loginis kintamasis, $o = (o_a)_{a \in I} \in O_I, r \in R$, ir $I \subseteq N$.

3.1.2 Semantika

Tarkime turime sistemą, sudarytą iš N komponentų arba lokalių vietų. Agentai gali būti susieti su lokaliomis vietomis, kuriose jie atliks stebėjimus. Sistemos būsenos (konfigūracijos) yra funkcijos $s : O_{a_1} \times ... \times O_{a_n} \to R$ arba $s_I : O_I \to R$, kur $I \subseteq N$ ir rezultatų aibė R yra struktūroje (R, Σ) kartu su abstrakčia operacija $\Sigma : \mathcal{P}(R) \to R$, rezultatų apjungimui. $\mathcal{P}(R)$ yra visų aibės R poaibių aibė. Kiekvienam jungtiniam stebėjimui $e \in O_I$, lokali būsena s_I apibrėžiama tokiu būdu:

$$s_I((e_a)_{a \in I}) := \Sigma\{s(o) : o \in O_{a_1} \times ... \times O_{a_n} \text{ toks, kad } o_a = e_a \text{ visiems } a \in I\}$$

Jei s ir t yra dvi galimos sistemos būsenos ir agentų grupė I atlikdama stebėjimus, gauna tuos pačius rezultatus tose būsenose, tuomet šios būsenos yra ekvivalenčios agentų grupei I stebėjimų atžvilgiu. Tai užrašoma $s \overset{I}{\sim} t$. Ekvivalentumas stebėjimų atžvilgiu apibrėžiamas tokiu būdu:

Apibrėžimas 2 (Ekvivalentumas stebėjimų atžvilgiu). *Dvi būsenos s ir t yra ekvivalenčios stebėjimų atžvilgiu $s \overset{I}{\sim} t$ tada ir tik tada, kai $s_I = t_I$.*

Koreliatyvių žinių logikos modelis yra multimodalinis Kripke modelis [16], kur ryšiai tarp būsenų reiškia ekvivalentumą stebėjimų atžvilgiu. Modelis apibrėžiamas tokiu būdu:

Apibrėžimas 3 (Koreliatyvių žinių logikos modelis). *Jei S yra būsenų aibė, $\{\overset{I}{\sim}\}_{I \subseteq N} \subseteq S \times S$ - ryšių aibė, ir $V : S \to (P \to \{teisinga, klaidinga\})$ - interpretacijų funkcijų aibė, kur P yra loginių kintamųjų aibė, tai koreliatyvių žinių logikos modelis yra multimodalinis Kripke modelis $(S, \{\overset{I}{\sim}\}_{I \subseteq N}, V)$, tenkinantis savybes:*

1. *Kiekvienam $I \subseteq N$, $\overset{I}{\sim}$ yra ekvivalentumo ryšys su žyma;*
2. *Žinios yra monotoninės: Jei $I \subseteq J$, tai $\overset{J}{\sim} \subseteq \overset{I}{\sim}$;*
3. *Stebėjimo principas: Jei $s \overset{N}{\sim} s'$, tai $s = s'$;*
4. *Nulinės žinios: $s \overset{\emptyset}{\sim} s'$ kiekvienam $s, s' \in S$.*

Įvykdomumo operatorius $\models$ modeliui M, būsenai s ir formulėms o^r ir $K_I A$ apibrėžiamas tokiu būdu:

- $M, s \models K_I A$ tada ir tik tada, kai $M, t \models A$ visoms būsenoms $t \overset{I}{\sim} s$.
- $M, s \models o^r$ tada ir tik tada, kai $s(o) = r$.

Formulė $K_I A$ reiškia, kad agentų grupė I žino, kad A yra teisinga. Formulė o^r reiškia, kad r yra jungtinio stebėjimo o rezultatas.

Formulės, kurios yra teisingos bet kurio modelio visose būsenose, yra vadinamos tapačiai teisingomis formulėmis.

3.2 Hilberto tipo skaičiavimas HS-LCK

Alexandras Baltag ir Sonja Smets pristatė Hilberto tipo skaičiavimą koreliatyvių žinių logikai darbe [4]. Turint baigtinę agentų aibę $N = \{a_1, ..., a_n\}$, baigtinę rezultatų struktūrą (R, Σ) ir baigtines jungtinių stebėjimų aibes $\vec{O} = (O_{a_1}, ..., O_{a_n})$, kiekvienai aibei $I, J \subseteq N$, kiekvienam jungtiniam stebėjimui $o \in O_I$, $O_I = \times_{a \in I} O_a$, ir rezultatams $r, p \in R$, Hilberto tipo skaičiavimas koreliatyvių žinių logikai virš $(R, \Sigma, \vec{O})$ apibrėžiamas tokiu būdu:

- Aksiomos:

  H1. $A \to (B \to A)$

  H2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

  H3. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

  H4. $K_I(A \to B) \to (K_I A \to K_I B)$ *(Kripkės aksioma)*

  H5. $K_I A \to A$ *(Teisingumas)*

  H6. $K_I A \to K_I K_I A$ *(Teigiama savianalizė)*

  H7. $\neg K_I A \to K_I \neg K_I A$ *(Neigiama savianalizė)*

  H8. $K_I A \to K_J A$, kur $I \subseteq J$ *(Grupės žinios yra monotoniškos)*

  H9. $A \to K_N A$ *(Stebėjimo principas)*

  H10. $\bigwedge_{o \in O_I} \bigvee_{r \in R} o^r$ *(Visi stebėjimai turi rezultatus)*

  H11. $o^r \to \neg o^p$, kur $r \neq p$ *(Stebėjimai turi unikalius rezultatus)*

H12. $o_I^r \to K_I o_I^r$ *(Grupės žino savo jungtinių stebėjimų rezultatus)*

H13. $(\bigwedge\limits_{o \in O_I} o^{r_o} \wedge K_I A) \to K_\emptyset(\bigwedge\limits_{o \in O_I} o^{r_o} \to A)$

(Grupės žinios yra koreliatyvios žinios (pagrįstos jungtiniais stebėjimais))

H14. $\bigwedge\limits_{o \in \bar{e}} o^{r_o} \to e^{\Sigma\{r_o : o \in \bar{e}\}}$, kur $e \in O_I,\ \bar{e} := \{o = (o_i)_{i \in N} \in O_{i_1} \times ... \times O_{i_n} :$ $o_i = e_i$ visiems $i \in I\}$. *(Rezultatų apjungimo aksioma)*

- Taisyklės:

$$\frac{A, A \to B}{B}\ (Modus\, ponens) \qquad \frac{A}{K_I A}\ (K_I - b\bar{u}tinumas)$$

Aibės I, J gali būti tuščios aksiomose H4 - H8 ir taisyklėje $(K_I - b\bar{u}tinumas)$.

Hilberto tipo skaičiavimas HS-LCK koreliatyvių žinių logikai yra pagrįstas ir pilnas, atsižvelgiant į koreliatyvių žinių modelius virš $(R, \Sigma, \vec{O})$ [4].

3.3 Gentzeno tipo sekvencinis skaičiavimas GS-LCK

1934 metais Gerhardas Gentzenas pristatė sekvencinio skaičiavimo idėją darbe [10]. Sekvencijos sistemoje GS-LCK yra $\Gamma \Rightarrow \Delta$ formos reiškiniai, kur Γ ir Δ yra baigtinės, galimai tuščios atominių ryšių $s \overset{I}{\sim} t$ ir formulių su žymėmis $s : A$ multiaibės, kur $s, t \in S$, $I \subseteq N$ ir A yra bet kuri koreliatyvių žinių logikos formulė. Formulė $s : A$ reiškia $s \models A$, ir $s \overset{I}{\sim} t$ yra ekvivalentumas stebėjimų atžvilgiu arba ryšys tarp būsenų koreliatyvių žinių logikos modelyje.

Sekvencinį skaičiavimą sudaro aksiomos ir taisyklės. Sekvencijoms taikant taisykles, yra konstruojamas šakninės sekvencijos išvedimo medis. Jei išvedimo medžio visuose lapuose yra aksiomos, tai šakninė sekvencija yra vadinama įrodoma, ir sekvencijos išvada Δ seka iš prielaidos Γ.

Turint baigtinę agentų aibę $N = \{a_1, ..., a_n\}$, baigtinę rezultatų struktūrą (R, Σ) ir baigtines jungtinių stebėjimų aibes $\vec{O} = (O_{a_1}, ..., O_{a_n})$, kiekvienai aibei $I, J \subseteq N$, kiekvienam jungtiniam stebėjimui $o \in O_I$, $O_I = \times_{a \in I} O_a$, ir rezultatams $r, p \in R$, Gentzeno tipo skaičiavimas GS-LCK koreliatyvių žinių logikai virš $(R, \Sigma, \vec{O})$ apibrėžiamas tokiu būdu:

- Aksiomos:
  - $s : p, \Gamma \Rightarrow \Delta, s : p$.
  - $s : o^r, \Gamma \Rightarrow \Delta, s : o^r$.
  - $s : o^{r_1}, s : o^{r_2}, \Gamma \Rightarrow \Delta$, kur $r_1 \neq r_2$.
- Teiginių taisyklės:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : A}{s : \neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg \Rightarrow) \qquad \frac{s : A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : \neg A}\ (\Rightarrow \neg)$$

$$\frac{s : A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad s : B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{s : A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : A, s : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : A \vee B}\ (\Rightarrow \vee)$$

$$\frac{s : A, s : B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{s : A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, s : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : A \wedge B}\ (\Rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : A \qquad s : B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{s : A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\to\Rightarrow) \qquad \frac{s : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, s : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : A \to B} (\Rightarrow\to)$$

- Žinojimo taisyklės:

$$\frac{t : A, s : K_I A, s \overset{I}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}{s : K_I A, s \overset{I}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta} (K_I \Rightarrow) \qquad \frac{s \overset{I}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta, t : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : K_I A} (\Rightarrow K_I)$$

Norint pritaikyti taisyklę ($K_I \Rightarrow$), reikalaujama, kad $I \neq N$ ir $t : A$ nebūtų aibėje Γ. Taisyklė ($\Rightarrow K_I$) reikalauja, kad $I \neq N$ ir t nebūtų išvadoje. Aibė I gali būti tuščia abiejose taisyklėse.

$$\frac{s : A, s : K_N A, s \overset{N}{\sim} s, \Gamma \Rightarrow \Delta}{s : K_N A, s \overset{N}{\sim} s, \Gamma \Rightarrow \Delta} (K_N \Rightarrow) \qquad \frac{s \overset{N}{\sim} s, \Gamma \Rightarrow \Delta, s : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : K_N A} (\Rightarrow K_N)$$

Taisyklė ($K_N \Rightarrow$) reikalauja, kad $s : A$ nebūtų aibėje Γ. Taisyklės ($\Rightarrow K_N$) formulė $s : A$ turi nebūti aibėje Δ.

- Stebėjimų taisyklės:

$$\frac{s \overset{I}{\sim} t, \{s : o^{r_o}\}_{o \in O_I}, \{t : o^{r_o}\}_{o \in O_I}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\{s : o^{r_o}\}_{o \in O_I}, \{t : o^{r_o}\}_{o \in O_I}, \Gamma \Rightarrow \Delta} (OE)$$

Taisyklė (OE) reikalauja, kad $I \neq \emptyset$ ir formulės $s \overset{I}{\sim} t$, $s : o^{r_o}$ ir $t : o^{r_o}$ nebūtų aibėje Γ, kur $o \in O_I$.

$$\frac{\{s : o_I^r, \Gamma \Rightarrow \Delta\}_{r \in R}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} (OYR)$$

Taisyklė (OYR) reikalauja:

1. $s : o_I^r$ nebūtų aibėje Γ visiems $r \in R$ ir $s : o_I^{r_1}$ būtų aibėje Δ bent vienam $r_1 \in R$.
2. $I \neq \emptyset$.

$$\frac{s : e_I^{\Sigma\{r_{o_N} : o_N \in \bar{e}\}}, \{s : o_N^{r_{o_N}}\}_{o_N \in \bar{e}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\{s : o_N^{r_{o_N}}\}_{o_N \in \bar{e}}, \Gamma \Rightarrow \Delta} (CR)$$

Taisyklė (CR) reikalauja, kad $s : e_I^{\Sigma\{r_{o_N} : o_N \in \bar{e}\}}$ nebūtų aibėje Γ.

- Keitimų taisyklės:

$$\frac{s : p, t : p, s \overset{N}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}{t : p, s \overset{N}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(Sub(p) \Rightarrow) \qquad \frac{s : o^r, t : o^r, s \overset{I}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}{t : o^r, s \overset{I}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(Sub(o^r) \Rightarrow)$$

  Taisyklės $(Sub(p) \Rightarrow)$ ir $(Sub(o^r) \Rightarrow)$ reikalauja, kad $s : p$ ir $s : o^r$ atitinkamai nebūtų aibėse Γ.

- Ryšių taisyklės:

$$\frac{s \overset{I}{\sim} s, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(Ref) \qquad \frac{s \overset{I}{\sim} t, s \overset{I}{\sim} s', s' \overset{I}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}{s \overset{I}{\sim} s', s' \overset{I}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(Trans)$$

  Taisyklė (Ref) reikalauja, kad s būtų išvadoje ir $s \overset{I}{\sim} s$ nebūtų aibėje Γ. Taisyklė $(Trans)$ reikalauja, kad $s \overset{I}{\sim} t$ nebūtų aibėje Γ.

$$\frac{s' \overset{I}{\sim} t, s \overset{I}{\sim} s', s \overset{I}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}{s \overset{I}{\sim} s', s \overset{I}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(Eucl) \qquad \frac{s \overset{I}{\sim} t, s \overset{J}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}{s \overset{J}{\sim} t, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(Mon)$$

  Taisyklė (Mon) išreiškia monotoniškumą ir reikalauja, kad $I \subseteq J$. Aibės I, J gali būti tuščios. Taisyklės $(Eucl)$ ir (Mon) reikalauja, kad $s' \overset{I}{\sim} t$ ir $s \overset{I}{\sim} t$ atitinkamai nebūtų aibėse Γ.

Sekvencinis skaičiavimas GS-LCK yra pagrįstas ir pilnas, atsižvelgiant į koreliatyvių žinių modelius virš $(R, \Sigma, \vec{O})$ [12, 13]. Jei sekvencija išvedama skaičiavime GS-LCK, tai sekvencijos formulė yra tapačiai teisinga. Taip pat visos tapačiai teisingos formulės yra išvedamos skaičiavime GS-LCK, kas formuoja skaičiavimo pilnumą.

Skaičiavimas taip pat turi gražias apverčiamumo ir leistinumo savybes. Jei taisyklės išvados sekvencija yra išvedama, tai taisyklės prielaidų sekvencijos taip pat išvedamos. Ši savybė vadinama taisyklės apverčiamumu (taisyklė išvedimo medyje gali būti taikoma apversta). Silpninimo, prastinimo ir pjūvio leistinumas skaičiavime GS-LCK yra kritinis, norint sukurti automatinę paieškos sistemą.

Teorema 1 (GS-LCK savybės). *Sekvencinis skaičiavimas GS-LCK turi tokias savybes:*

- *Taisyklių apverčiamumas.*

- *Silpninimo leistinumas.*
- *Prastinimo leistinumas.*
- *Pjūvio leistinumas.*
- *Baigtinumas.*

Sekvencinio skaičiavimo GS-LCK pagrįstumo, pilnumo ir savybių pilni įrodymai yra pateikti disertacijoje.

3.4 Koreliatyvių žinių logikos išsprendžiamumas

Koreliatyvių žinių logikos išsprendžiamumui gauti pirmiausiai apibrėšime baigtinę išvedimo paieškos procedūrą. Procedūra naudoja lenteles $TableLK$ ir $TableRK$ saugoti centrines taisyklių $(K_I \Rightarrow)$, $(K_N \Rightarrow)$ ir $(\Rightarrow K_I)$ taikymų formules. Papildomai lentelėje $TableRK$ yra saugomos atominių ryšių grandinėlės, kurios susiformuoja, taikant taisyklę $(\Rightarrow K_I)$.

Apibrėžimas 4 (Lentelė TableLK). *Lentelė TableLK, kurioje saugomos taisyklių* $(K_I \Rightarrow)$ *ir* $(K_N \Rightarrow)$ *taikymų centrinių formulių poros:*

TableLK	
Pagrindinė formulė	*Ryšio atomas*

Pavyzdys 1. *Lentelės TableLK pavyzdys:*

TableLK	
Pagrindinė formulė	*Ryšio atomas*
$s : K_I A$	$s \overset{I}{\sim} t$
$l : K_I B$	$l \overset{I}{\sim} z$

Apibrėžimas 5 (Neigiama ir teigiama sekvencijos dalys). *Neigiama ir teigiama sekvencijos* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *dalimis yra vadinama atitinkamai neigiama ir teigiama sekvencijos formulės* $\wedge\Gamma \to \vee\Delta$ *dalys.*

Bet kuriai sekvencijai, $n(K_I)$ žymi žinojimo operatorių K_I kiekį neigiamoje sekvencijos dalyje. Mes naudojame šį žymėjimą, apibrėžiant lentelę $TableRK$.

Apibrėžimas 6 (Lentelė TableRK). *Lentelė TableRK, kurioje saugoma taisyklės* ($\Rightarrow K_I$) *taikymų centrinės formulės ir naujai atsiradusių ryšio atomų grandinėlės:*

TableRK			
Pagrindinė formulė	*Ryšio atomų grandinėlė*	*Grandinėlės ilgis*	*Max*

kur Max *yra maksimalus grandinėlės ilgis, apskaičiuojamas* $n(K_I) + 1$.

Pavyzdys 2. *Lentelės TableRK pavyzdys:*

TableRK			
Pagrindinė formulė	*Ryšio atomų grandinėlė*	*Grandinėlės ilgis*	*Max*
$s, s_1, s_2, w_1 : K_I A$	$s \overset{I}{\sim} s_1, s_1 \overset{I}{\sim} s_2, s_2 \overset{I}{\sim} s_3$	*3*	5
	$s \overset{I}{\sim} t_1$	*1*	5
	$s \overset{I}{\sim} w_1, w_1 \overset{I}{\sim} w_2$	*2*	5
$z, z_1 : K_J B$	$z \overset{J}{\sim} z_1, z_1 \overset{J}{\sim} z_2$	*2*	*7*

Apibrėžimas 7 (Išvedimo paieškos procedūra). *Sekvencinio skaičiavimo GS-LCK išvedimo paieškos procedūra GS-LCK-PROC:*

Inicializavimas:

- *Priskiriama agentų aibė* N, *galimų stebėjimų aibės* $\vec{O} = (O_{a_1}, ..., O_{a_n})$ *ir rezultatų struktūra* (R, Σ).
- *Inicijuojamos lentelės* $TableLK$ *ir* $TableRK$, *Max priskiriant* $(n(K_I)+1)$ *reikšmes, grandinėlių ilgiams -* 0, *o kitas reikšmes paliekant tuščiomis.*

- *Priskiriama Output = False.*

PROCEDURE GS-LCK-PROC(Sequent, TableLK, TableRK, Output)

BEGIN

1. *Patikrinama, ar Sequent yra aksioma. Jei Sequent yra aksioma, priskiriama Output = True ir einama į žingsnį Finish.*
2. *Jei galima, pritaikoma bet kuri iš taisyklių* $(\neg \Rightarrow), (\Rightarrow \neg), (\Rightarrow \vee), (\wedge \Rightarrow), (\Rightarrow\rightarrow)$ *ir einama į žingsnį 1.*
3. *Jei galima, pritaikoma bet kuri iš taisyklių* $(\vee \Rightarrow), (\Rightarrow \wedge)$ *ar* $(\rightarrow\Rightarrow)$ *ir visoms pritaikytos taisyklės prielaidoms iškviečiama procedūra GS-LCK-PROC():*

   Output1 = False;
   Output2 = False;

   GS-LCK-PROC(Premise1, TableLK, TableRK, Output1);
   GS-LCK-PROC(Premise2, TableLK, TableRK, Output2);

   IF (Output1 == True) AND (Output2 == True)
   THEN Set Output = True and go to Finish;
   ELSE Set Output = False and go to Finish;

4. *Jei galima pritaikyti taisyklę* $(K_I \Rightarrow)$ *arba* $(K_N \Rightarrow)$*, patikrinama, ar centrinių formulių poros nėra lentelėje TableLK. Jei centrinių formulių poros nėra, pritaikoma taisyklė* $(K_I \Rightarrow)$ *arba* $(K_N \Rightarrow)$*, centrinių formulių pora įtraukiama į lentelę TableLK ir einama į žingsnį 1.*
5. *Jei galima pritaikyti taisyklę* $(\Rightarrow K_I)$*, patikrinama, ar centrinės formulės nėra lentelėje TableRK ir grandinėlės ilgis yra mažiau už Max. Jei centrinės formulės nėra lentelėje TableRK ir grandinėlės ilgis yra mažiau už Max, tai pritaikoma taisyklė* $(\Rightarrow K_I)$*, centrinė formulė ir naujai atsiradęs ryšio atomas įtraukiami į lentelę*

TableRK, grandinėlės ilgio reikšmė padidinama vienetu, ir einama į žingsnį 1.

6. *Jei galima, pritaikoma taisyklė* (OYR) *ir visoms pritaikytos taisyklės prielaidoms iškviečiama procedūra GS-LCK-PROC():*

   For each k set Output(k) = False and call GS-LCK-PROC(Premise(k), TableLK, TableRK, Output(k)), / kur k yra prielaidos indeksas */*

   IF (for each k Output(k) == True)
   THEN Set Output = True and go to Finish;
   ELSE Set Output = False and go to Finish;

7. *Jei galima, pritaikoma bet kuri iš taisyklių* $(\Rightarrow K_N), (OE), (CR), (Sub(p) \Rightarrow), (Sub(o^r) \Rightarrow), (Ref), (Trans), (Eucl)$ *ar* (Mon) *ir einama į žingsnį 1.*

8. *Finish.*

END

Procedūra GS-LCK-PROC paima pradinius kintamuosius *Sequent*, $TableLK$, $TableRK$, *Output* ir grąžina $True$, jei sekvencija *Sequent* yra įrodoma, kitu atveju - $False$, jei neįrodoma. Procedūra sudaryta tokiu būdu, kad konstruoja sekvencijų išvedimo medžius, kuriuose žinojimo taisyklių pritaikymų kiekis yra baigtinis. Kitų taisyklių pritaikymų kiekis taip pat yra apribotas skaičiavimo GS-LCK taisyklių reikalavimais. Kadangi visų taisyklių pritaikymų kiekis yra apribotas ir pradinės agentų, galimų stebėjimų ir rezultatų aibės yra baigtinės, procedūra GS-LCK-PROC atlieka baigtinę išvedimo paiešką.

Procedūra GS-LCK-PROC kiekvienai koreliatyvių žinių logikos formulei leidžia patikrinti, ar ji yra tapačiai teisinga ar ne [14]. Dėl to koreliatyvių žinių logika yra išsprendžiama. Procedūros GS-LCK-PROC pagrįstumo, pilnumo, baigtinumo įrodymai ir koreliatyvių žinių logikos išsprendžiamumo įrodymas yra pateikti disertacijoje.

4 Išvados

Loginės sistemos susiduria su ekspresyvumo, kvantinio susietumo, neįmanomumo realizuoti implikacijos operatoriaus ar dedukcinės sistemos, neišsprendžiamumo, distributyvumo dėsnio negaliojimo ir kitomis problemomis, kai bandoma analizuoti kvantinių sistemų žinias. Vienas iš vėliausių rezultatų šioje srityje yra koreliatyvių žinių logika. LCK atsiriboja nuo algebrinės kvantinės mechanikos struktūros ir siūlo naudoti koreliatyvių žinių modelius kvantinėms sistemoms ir kvantiniam susietumui aprašyti. Alexandras Baltag ir Sonja Smets pateikė Hilberto tipo skaičiavimą darbe [4]. Tačiau automatinės išvedimo sistemos, kuri leistų analizuoti kvantinių sistemų žinias automatiniu būdu, iki šiol nebuvo pateikta.

Automatinė įrodymų sistema LCK logikai buvo sukurta disertacijos tyrimų metu. Sistemą sudaro sekvencinis skaičiavimas GS-LCK ir įrodymų paieškos procedūra GS-LCK-PROC. Sekvencinis skaičiavimas yra pagrįstas, pilnas ir tenkina taisyklių apverčiamumo ir silpninimo, prastinimo ir pjūvio leistinumo savybes. Procedūra GS-LCK-PROC yra baigtinė ir leidžia patikrinti, ar sekvencija yra įrodoma. Taip pat buvo įrodytas koreliatyvių žinių logikos išsprendžiamumas. Naudojant GS-LCK-PROC procedūrą, visoms LCK logikos formulėms galima patikrinti, ar formulė yra tapačiai teisinga.

Koreliatyvių žinių logika yra pritaikoma kvantinių sistemų elementariųjų dalelių matavimų žinių formalizavimui ir analizei. Automatinė įrodymų sistema LCK logikai leidžia atlikti kvantinių sistemų žinių analizę automatiniu būdu, naudojant kompiuterius.

Literatūra

[1] S. Abramsky and R. Duncan. A categorical quantum logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 16:469–489, 2006.

[2] D. Aerts. Description of compound physical systems and logical interaction of physical systems. *Current Issues on Quantum Logic*, 8:381–405, 1981.

[3] A. Araujo and M. Finger. A formal system for quantum communication environments. *VIII - Brazilian National Meeting for Artificial Intelligence*, pages 1–11, 2011.

[4] A. Baltag and S. Smets. Correlated knowledge: an epistemic-logic view on quantum entanglement. *International Journal of Theoretical Physics*, 49(12):3005–3021, 2010.

[5] G. Battilotti. Characterization of quantum states in predicative logic. *Int. J. Theor. Phys.*, 50:3669–3681, 2011.

[6] G. Birkhoff and J. von Neumann. The logic of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, 37:823–843, 1936.

[7] B. Coecke, C. Heunen, and A. Kissinger. Compositional quantum logic. *Computation, Logic, Games, and Quantum Foundations*, pages 21–36, 2013.

[8] R. Duncan. Believe it or not, bell states are a model of multiplicative linear logic. *Technical Report PRG-RR-04-18*, 2004.

[9] R. Fagin, J. Y. Halpern, and M. Y. Vardi. What can machines know? on the properties of knowledge in distributed systems. *Journal of the ACM*, 39(2):328–376, 1992.

[10] G. Gentzen. Untersuchungen uber das logische schliesen. i. *Mathematische Zeitschrift*, 39(2):176–210, 1934.

[11] H. Giedra. Cut free sequent calculus for logic s5n(ed). *Lithuanian Mathematical Journal*, 51 (spec. issue):336–341, 2010.

[12] H. Giedra and J. Sakalauskaitė. Sequent calculus for logic of correlated knowledge. *Lithuanian Mathematical Journal*, 52 (spec. issue):243–248. 2011.

[13] H. Giedra, J. Sakalauskaitė, and R. Alonderis. Proof system for logic of correlated knowledge. *Submitted to Logic Journal of the IGPL*, 2014.

[14] H. Giedra, J. Sakalauskaitė, and R. Alonderis. Decidability of logic of correlated knowledge. *Informatica*, 2014. In print.

[15] K. Husimi. Studies on the foundations of quantum mechanics i. *Physico-Mathematical Soc. Japan 9*, pages 766–78, 1937.

[16] S. Kripke. Semantical analysis of modal logic i. normal propositional calculi. *Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9:67–96, 1963.

[17] R. Mayet. Some characterizations of the underlying division ring of a hilbert lattice by automorphisms. *International Journal of Theoretical Physics*, 37(1):109–114, 1998.

[18] S. Negri. Proof analysis in modal logic. *Journal of Philosophical Logic*, 34(5): 507–544, 2005.

[19] A. Pietarinen. Propositional logic of imperfect information: Foundations and applications. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 42(4):193–210, 2001.

[20] C. Piron. *Axiomatique quantique (PhD-Thesis)*. PhD thesis, GPO Engineering Department (London), 1964.

[21] C. Piron. Foundations of quantum physics. *W.A. Benjamin Inc., Massachusetts*, 1976.

[22] F. Prost and C. Zerrari. A logical analysis of entanglement and separability in quantum higher-order functions. *Technical report, LIG*, 2008.

[23] F. Prost and C. Zerrari. Reasoning about entanglement and separability in quantum higher-order functions. *In Proceedings of Unconventional Computation 2009 (UC'09), Lecture Notes in Computer Science. Springer*, 2009.

[24] C. Randall and D. Foulis. Tensor products of quantum logics do not exist. *Notices Amer. Math. Soc.*, 26(6), 1979.

[25] S. Smets. Logic and quantum physics. *Journal of the Indian Council of Philosophical Research Special Issue*, XXVII(2), 2010.

[26] M.P. Solèr. Characterization of hilbert spaces by orthomodular spaces. *Communications in Algebra*, 23(1):219–243, 1995.

[27] R. Srinivasan. Quantum superposition principle justified in a new non-aristotelian finitary logic. *International Journal of Quantum Information*, 3(1):263–267, 2005.

[28] F. Valckenborgh. *Compound Systems in Quantum Axiomatics.* PhD thesis, Vrije Universiteit Brussel, 2001.

[29] W. van der Hoek and J.-J. Ch. Meyer. A complete epistemic logic for multiple agents–combining distributed and common knowledge. *Epistemic Logic and the Theory of Games and Decisions*, pages 35–68, 1997.

[30] J. von Neumann. Grundlagen der quantenmechanik, berlin. *Springer Verlag*, 1932.

5 Summary

5.1 Research Area and Problems

In quantum mechanics we have quantums systems consisting of elementary particles (e.g. electrons). Information about such systems can be handled, using logical calculi. In 1936 von Neumann co-authored a paper with G. Birkhoff [6] introducing the ideas of quantum logic. However some important impossibility results were obtained [2, 24]. D. Aerts, C. Randall and D. Foulis showed that quantum logic rises problems when trying to describe compound systems consisting of more than one elementary particle that can exhibit quantum entanglement. Also they showed that tensor products of quantum logic do not exist.

Several other approaches were obtained to reason about quantum systems. One of the latest is logic of correlated knowledge introduced by Alexandru Baltag and Sonja Smets in 2010 [4]. Logic of correlated knowledge abstracts away from Hilbert spaces, which are used in quantum mechanics and quantum logic, and suggests to accomodate correlation models to quantum systems and quantum entanglement. However, we do not have yet automated proof system for logic of correlated knowledge, which would allow us to reason about quantum systems automatically, using computers.

5.2 Actuality

The states of quantum systems are determined by performing measurements on particles. The informational processes of such measurements can be handled using proof system. Also calculations of quantum computing are executed by changing the states of the quantum register, which consists of quantum bits or quantum particles, until the result of computing is obtained. The process of the changes of the states can be analysed and managed using logical calculus. Automated proof system for logic of correlated knowledge would allow to do this in automated way, using computers.

5.3 Aim of the Research

The main aim of the research is to create proof system for logic of correlated knowledge, satisfying the properties of soundness, completeness and termination.

5.4 Tasks of the Research

The tasks for reaching the main aim of the research are:

- Create sequent calculus GS-LCK for logic of correlated knowledge.
- Prove soundness of GS-LCK.
- Prove invertibility of rules.
- Prove admissibility of weakening.
- Prove admissibility of contraction.
- Prove admissibility of cut.
- Prove completeness of GS-LCK.
- Create proof search procedure for GS-LCK.
- Prove the termination of proof search procedure.

5.5 Research Methodology

As a main method to create automated proof system, sequent calculus is used. Gerhard Gentzen introduced sequent calculi in 1934 [10]. Sequent calculus allows to perform automated proof search if cut rule is admissible. We are using the ideas of semantic internalization, suggested by Sara Negri in [18], to get admissibility of cut rule and other properties of the sequent calculus GS-LCK. Also the Hilbert style proof system suggested by Alexandru Baltag and Sonja Smets in [4] is used to prove the completeness of GS-LCK.

5.6 Scientific Novelty

The following new results have been obtained in the research:

- Sequent calculus GS-LCK for logic of correlated knowledge has been created.
- Soundness, completeness and admissibility of weakening, contraction and cut of GS-LCK have been proved.
- Terminating proof search procedure for GS-LCK has been created.
- Decidability of logic of correlated knowledge has been proved.

5.7 Defending Statements

- Sequent calculus GS-LCK for logic of correlated knowledge has been created, which satisfy the properties:
  - Soundness.
  - Invertibility of rules.
  - Admissibility of weakening, contraction and cut.
  - Completeness.
- Procedure GS-LCK-PROC has been created, which performs terminating proof search in sequent calculus GS-LCK.
- Logic of correlated knowledge is decidable.

5.8 Conclusions

Logical approaches deal with problems of expressiveness, quantum entanglement, impossibility of implication operator and deductive system, undecidability, failure of the distributive law, when try to handle knowledge about quantum systems. One of the latest results in this field is logic of correlated knowledge. LCK abstracts away from algebraic structure of quantum mechanics and accomodates correlation models to quantum systems. Alexandru Baltag and Sonja Smets defined Hilbert style proof system for LCK in [4]. However, automated proof system had not been proposed for logic of correlated knowledge, yet.

Automated proof system for LCK has been created in the dissertation research. The system consists of the sequent calculus GS-LCK and the proof search procedure GS-LCK-PROC. Sequent calculus is sound, complete and satisfy the properties of invertibility of rules, admissibility of weakening, contraction and cut. The procedure GS-LCK-PROC is terminating and allows to check if the sequent is provable. Also it has been proved, that logic of correlated knowledge is decidable. Using the terminating procedure GS-LCK-PROC the validity of all formulas of LCK can be checked.

Logic of correlated knowledge is applicable in analysing and handling knowledge about measurements performed on elementary particles of quantum systems. Automated proof system for logic of correlated knowledge can be applied to reason about quantum systems in automated way, using computers.