ATSTATYMO PROCESO TIKIMYBINIŲ MATŲ ASIMPTOTINIS ATSKIRIAMUMAS

Kristina Pikturnaitė, Vaidotas Kanišauskas
Šiaulių universitetas

Įvadas

XX a. viduryje pasirodžius L. Le Kamo (1960), H. Černovo (1952) ir N. P. Salihovo (1973) darbams apie atsitiktinių procesų tikimybinių matų ir paprastų hipotezių asimptotines savybes, atsirado būtinybė išplėtoti atsitiktinių procesų tikimybinių matų asimptotinio atskiriamumo teoriją. Buvo publikuota nemažai mokslinių straipsnių šia tema. Daugumą jų sistemiškai apdorojo ukrainiečių mokslininkas J. N. Linkovas monografijoje „Asimptotiniai atsitiktinių procesų statistiniai metodai“ (1993). Šioje knygoje pateikti tikimybiniai kriterijai, leidžiantys ištirti konkrečių tikimybinių matų asimptotinį atskiriamumą. Kadangi šios teorijos konkrečių taikymų yra labai mažai, tai mūsų pateiktas darbas yra bandymas likviduoti šią spragą, tiriant atstatymo procesą.

Straipsnio pradžioje pateiktas tikimybinių matų asimptotinio atskiriamumo apibrėžimas, tikimybinis kriterijus, kuris remiasi Helingerio integralu ir kuriuo jis tikrinamas. Toliau apibrėžiamas atstatymo procesas turintis tolydų kompensatorių. Randamas to proceso Helingerio integralas. Pritaikoma didžiųjų nuokrypių teorija ir gaunama šio integralo asimptotika. Ištiriamos sąlygos, kada atstatymo procesas su tolydžiu kompensatoriumi tenkina tikimybinių matų asimptotinio atskiriamumo apibrėžimą. Rezultatai iliustruojami dviem pavyzdžiais, kur nereikalaujama patenkinti gautas bendrąsias sąlygas.

Sakykime, kad $\left(\mathcal{X}^t, \mathcal{B}^t, P^t, \widetilde{P}^t\right)$, $t \in R_+ = [0, \infty)$ – statistinių eksperimentų šeima, kurioje $\mathcal{X}^t$ – stebėjimų aibė, $\mathcal{B}^t$ yra $\mathcal{X}^t$ poaibių σ – algebra, o P^t ir $\widetilde{P}^t$ – tikimybiniai matai.

1 apibrėžimas. Matų šeimos $\left(P^t\right)$ ir $\left(\widetilde{P}^t\right)$, vadinamos visiškai asimptotiškai, atskiriamos (žymima $\left(P^t\right)\Delta\left(\widetilde{P}^t\right)$), jei egzistuoja skaičių seka $t_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$ ir aibės $A_n \in \mathcal{B}^t$ tokios, kad

$$P^{t_n}\left(A_n\right) \to 0 \text{ ir } \widetilde{P}^{t_n}\left(A_n\right) \to 1,\ n \to \infty .$$

Priešingu atveju šeimos $\left(P^t\right)$ ir $\left(\widetilde{P}^t\right)$, vadinamos visiškai asimptotiškai, neatskiriamos, žymimos $\left(P^t\right)\overline{\Delta}\left(\widetilde{P}^t\right)$.

2 apibrėžimas. α – eilės Helingerio integralu $H\left(\alpha; \widetilde{P}^t, P^t\right)$ vadinsime dydį

$$H\left(\alpha; \widetilde{P}^t, P^t\right) = \mathbb{E}_Q^t \widetilde{z}_t^{\alpha} z_t^{1-\alpha},$$

kai $\alpha \in [0,1]$, čia $z_t = \dfrac{dP^t}{dQ^t}$, $\widetilde{z}_t = \dfrac{d\widetilde{P}^t}{dQ^t}$, Q^t – dominuojantis matas, t. y. $P^t << Q^t$, $\widetilde{P}^t << Q^t$.

Suformuluosime pagrindinį kriterijų, kuriuo tikrinamas tikimybinių matų asimptotinis atskiriamumas.

1 teorema [5]. Tokios sąlygos yra ekvivalenčios:

a) $\left(P^t\right) \Delta \left(\widetilde{P}^t\right)$,

b) $\varliminf_{t\to\infty} H\left(\alpha; \widetilde{P}^t, P^t\right) = 0$, kai $\alpha \in (0,1)$.

Kartu nagrinėsime stochastinę bazę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$ su abstrakčia aibe Θ, kurioje apibrėžtas atstatymo procesas $N_t = \sum_{n\geq 1} 1\left(T_n \leq t\right)$, $t \in R_+$, pagal apibrėžimą turintis to paties skirstinio nepriklausomus momentus $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, $i = 1,2,...$ $\left(T_0 = 0\right)$. Tokį procesą charakterizuoja τ_1 pasiskirstymo funkcija $F(\theta, t) = P_\theta\left(\tau_1 \leq t\right)$, $t \in R_+$, $\theta \in \Theta$. Tarkime, kad ši pasiskirstymo funkcija yra absoliučiai tolydi, t. y.

$$F(\theta, t) = \int_0^t p(\theta, s) ds \text{ su tankiu } p(\theta, s).$$

Pažymėkime $\mathcal{F}_t^N = \sigma\left(N_s, s \leq t\right)$ ir tegul toliau $\mathbb{F} = \left(\mathcal{F}_t^N\right)_{t\geq 0}$. Tada atstatymo procesas N_t turi $\left(P_\theta, \mathbb{F}\right)$ – kompensatorių pavidalo (Kanišauskas, 1998):

$$A_t(\theta) = \int_0^t k\left(\theta, L_s\right) ds = \sum_{i=1}^{N_{t-}} K\left(\theta, \tau_i\right) + K\left(\theta, L_t\right),$$

kur $L_s = s - T_{N_{s-}}$, $\quad k(\theta, t) = \dfrac{p(\theta, t)}{1 - F(\theta, t)}$,

$K(\theta, t) = \int_0^t k(\theta, s) ds.$ Tegul $P_\theta^t = P_\theta \big| \mathcal{F}_t^N$, $t \in R_+$. Įveskime matą $P(\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$ atitinkantį atstatymo procesą N_t tokį, kad pakankamai gausioje mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ tarpiniai atstatymo momentai τ_i turi pasiskirstymo funkciją:

$$F(t)=F_{\alpha,\theta_1,\theta_2}(t)=1-$$
$$-\exp\left\{-\int_0^t(\alpha k(\theta_1,s)+(1-\alpha)k(\theta_2,s))ds\right\},$$
$\alpha\in(0,1),\ \theta_1,\theta_2\in\Theta,\ \theta_1\neq\theta_2.$

Tada atstatymo proceso N_t α – eilės Helingerio integralas gali būti pavaizduotas pavidalu (Kanišauskas, 1998)

$$H_t\left(\alpha;P_{\theta_1}^t,P_{\theta_2}^t\right)=\mathbb{E}\exp\left\{-d^t(\alpha)\right\},$$

kur

$$d^t(\alpha)=\int_0^t\ln g(\alpha,L_s)dN_s=\sum_{r=1}^{N_t}\ln g(\alpha,\tau_r),$$

$$g(\alpha,x)=\frac{\alpha k(\theta_1,x)+(1-\alpha)k(\theta_2,x)}{k(\theta_1,x)^{\alpha}k(\theta_2,x)^{1-\alpha}},$$

o $\mathbb{E}$ yra matematinis vidurkis, atitinkantis matą $P(\alpha)$.

1 lema [3]. Tarkime, kad atstatymo proceso N_t tarpiniai atstatymo momentai τ_i, $i=\overline{1,n}$ tenkina Kramerio sąlygą:

$\psi(\lambda)=\mathbb{E}e^{\lambda\tau_1}<\infty$ su tam tikru $\lambda>0$.

Tada tikimybinis matas

$$\mu_t(B)=P\left(\frac{N_t}{t}\in B\right),\ B\in\mathcal{B}(R_+)$$

tenkina didžiųjų nuokrypių principą su greičio funkcija $I_N(x)$ pavidalu

$$I_N(x)=x\Lambda\left(\frac{1}{x}\right),$$

čia $\Lambda(x)$ yra didžiųjų nuokrypių greičio funkcija, atitinkanti atsitiktinį dydį τ_1, t. y.

$$\Lambda(x)=\sup_{\lambda}(x\lambda-\ln\psi(\lambda)).$$

2 teorema [4]. Tarkime, kad egzistuoja $\lambda>0$, toks, kad $\psi(\lambda)=\mathbb{E}e^{\lambda\tau_1}<\infty$ (Kramerio sąlyga). Tada

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}\ln H_t\left(\alpha;P_{\theta_1}^t,P_{\theta_2}^t\right)=-\inf_{0\le x\le\frac{b}{a}}(x+I(x)),$$

$\alpha\in(0,1)$,

kur

$$0<a=a(\alpha)=\mathbb{E}\tau_1<\infty,$$
$$b=b(\alpha)=\mathbb{E}\ln g(\theta,\tau_1)<\infty,$$
$$I(x)=\frac{x}{b}\Lambda\left(\frac{b}{x}\right),\quad \Lambda(y)=\sup_{\lambda}(y\lambda-\ln\psi(\lambda)).$$

Įrodymas.

Bet kuriems atsitiktiniams įvykiams A ir B teisingos formulės:

$$P(B)\le P(B|A)+P(\overline{A}),\qquad (*)$$
$$P(B)\ge P(B|A)P(A).\qquad (**)$$

Įveskime tokį tikimybinį matą

$$P_t^l(B)=P(t^{-1}N(t)D(t)\in B),\ B\in\mathcal{B}(R),$$

kur $D(t)=N(t)^{-1}\sum_{i=1}^{N(t)}\ln g(\theta,\tau_i)$.

Iš Kramerio sąlygos išplaukia, kad $a=\mathbb{E}\tau_1<\infty$ ir $b=\mathbb{E}\ln g(\theta,\tau_1)<\infty$. Vadinasi, galioja didžiųjų skaičių dėsniai atstatymo procesui N_t ir sumai $D(t)$:

$$P-\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=a,\quad P-\lim_{t\to\infty}D(t)=b,$$

kur $P-\lim_{t\to\infty}$ reiškia konvergavimą pagal tikimybę. Todėl bet kuriam $\varepsilon>0$ ir $\delta>0$ egzistuoja $t_0=t_0(\varepsilon,\delta)$ tokie, kad

$$P\left(D_t^{\delta}\right)>1-\varepsilon,\ t>t_0,$$

kur

$$D_t^{\delta}=\{\omega\in\Omega:D_t\in(b-\delta,b+\delta)\}.$$

Tikimybei $P_t^l(B)$ pritaikome (*) formulę ir pasinaudojame didžiųjų nuokrypių teorija, pagal kurią gauname, kad dėl kiekvienos uždaros aibės F iš R

$$\limsup_{t\to\infty}t^{-1}\ln P_{t_t}^l(F)\le-\inf_{x\in F}I_N\left(\frac{x}{b}\right)=$$
$$=-\inf_{x\in F}\frac{x}{b}\Lambda\left(\frac{b}{x}\right),$$

kur $I_N(y)=y\Lambda\left(\frac{1}{y}\right)$ – greičio funkcija tikimybinių matų šeimai $\mu_t(B)=P\left(\frac{N_t}{t}\in B\right)$ iš prieš tai buvusios lemos.

Analogiškai $P_t^l(B)$ pritaikome (**) su $A=D_t^{\delta}$. Pasinaudodami mato $\mu_t(B)$ didžiausiais nuokrypiais gauname, kad bet kuriai atvirai aibei G iš R

$$\liminf_{t\to\infty}t^{-1}\ln P_t^l(G)\ge-\inf_{x\in G}I_N\left(\frac{x}{b}\right).$$

Gavome, kad matas P_t^l tenkina didžiųjų nuokrypių principą su greičio funkcija $I(x)=I_N\left(\frac{x}{b}\right)=\frac{x}{b}\Lambda\left(\frac{b}{x}\right)$. Dabar Helingerio integralui $H_t\left(\alpha;P_{\theta_1}^t,P_{\theta_2}^t\right)$ galime pritaikyti Varadano teoremą [ ]:

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right)=$$
$$=\lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln\int e^{t(-x)}P_t^l(dx)=\sup_{x\in R_+}(-x-I(x))=$$
$$=-\inf_{0\le x\le \frac{b}{a}}(x+I(x)).$$

Įrodymas baigtas

Išvada. Esant patenkintoms teoremos sąlygoms, Helingerio integralas $H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right)$ užrašomas pavidalu:

$$H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right)=\exp\left\{-t\left[\inf_{x\in\left[0,\frac{b}{a}\right]}(x+I(x))+o(1)\right]\right\},$$

čia $o(1)\to 0$, kai $t\to\infty$.

Akivaizdu, kad matui P reikalaujama Kramerio sąlyga gali būti pakeista matų P_{θ_i}, $i=1,2$ atžvilgiu:

$\psi(\lambda,\theta_i)=\mathbb{E}_{\theta_i}e^{\lambda\tau_1}<\infty$, $i=1,2$ su tam tikru $\lambda>0$. (***)

Kadangi didžiųjų nuokrypių greičio funkcijos $I(x)\ge 0$ su visais x ir $I(x)=0$, kai $x=\mu>0$ – prie tam tikros tikros konstantos, tai

$$\lim_{t\to\infty} H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right)=0$$

visada esant patenkintai Kramerio sąlygai (***), kai $\theta_1\ne\theta_2$.

Pastebėsime, kad

$H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right)\equiv 1$, kai $\theta_1=\theta_2$.

Dabar galima suformuluoti pagrindinį darbo rezultatą.

3 teorema. Atstatymo proceso N_t su tolydžiais kompensatoriais tikimybiniai matai $P_{\theta_1}^t$ ir $P_{\theta_2}^t$, kai $\theta_1\ne\theta_2$ yra visiškai asimptotiškai atskiriami, jei momentų τ_i pasiskirstymo funkcijos $F(\theta,t)=1-\exp\left\{-\int_0^t k(\theta,s)ds\right\}$ tenkina Kramerio sąlygą (***).

Pavyzdžiai

1. Eksponentinis atstatymo procesas

Nagrinėsime atstatymo procesą $N_t=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}(T_n\le t)$, kurio tarpiniai atstatymo momentai $\tau_i=T_i-T_{i-1}$ turi eksponentinį skirstinį su pasiskirstymo funkcija:

$F(\theta,t)=1-e^{-\theta t}$, $\theta>0$, $t\ge 0$.

Remiantis K. Adomaitiene (2009), šio atstatymo proceso α– eilės Helingerio integralas turi pavidalą:

$$H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right)=\exp\left\{-t\left(\theta_1\alpha+(1-\alpha)\theta_2-\theta_1^{\ \alpha}\theta_2^{1-\alpha}\right)\right\}.$$

2 lema. Kai $\theta_1\ne\theta_2$, teisinga formulė

$\theta_1\alpha+\theta_2(1-\alpha)-\theta_1^{\ \alpha}\theta_2^{1-\alpha}>0.$

Įrodymas

Pažymėkime

$g(\theta_1)=\theta_1\alpha+\theta_2(1-\alpha)-\theta_1^{\ \alpha}\theta_2^{1-\alpha}$.

Įrodysime, kad $g(\theta_1)>0$, kai $\theta_1\ne\theta_2$. Tuo tikslu ieškome funkcijos $g(\theta_1)$ ekstremumų:

$g'(\theta_1)=\alpha-\alpha\theta_1^{\ \alpha-1}\theta_2^{1-\alpha}$.

Prilyginame nuliui:

$\alpha-\alpha\theta_1^{\ \alpha-1}\theta_2^{1-\alpha}=0$

$\theta_1^{\ \alpha-1}=\theta_2^{\alpha-1}$.

Vadinasi, $\theta_1=\theta_2$ yra funkcijos $g(\theta_1)$ minimumo taškas, nes

$g''(\theta_1)=\alpha(1-\alpha)\theta_1^{\ \alpha-2}\theta_2^{1-\alpha}>0$,

kai $\alpha\in(0,1)$, $\theta_1>0$, tai

$g(\theta_2)=\min_{\theta_1>0}g(\theta_1)=0.$

Kadangi pagal gerai žinomą nelygybę (Ширяев, 1989)

$\alpha\theta_1+(1-\alpha)\theta_2-\theta_1^{\ \alpha}\theta_2^{1-\alpha}\ge 0,$

tai

$\alpha\theta_1+(1-\alpha)\theta_2-\theta_1^{\ \alpha}\theta_2^{1-\alpha}>0,$

kai $\theta_1\ne\theta_2$.

Įrodymas baigtas

Remdamiesi lema, gauname, kad

$$\lim_{t\to\infty} H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right)=0,$$

kai $\theta_1\ne\theta_2$.

Vadinasi, galima teigti, kad eksponentinio atstatymo proceso tikimybiniai matai $P_{\theta_1}^t$ ir $P_{\theta_2}^t$ yra visiškai asimptotiškai atskiriami, kai $\theta_1\ne\theta_2$. Pastebėsime, kad čia Kramerio sąlygos patenkinimo nereikalavome.

2. Geometrinis atstatymo procesas

Nagrinėsime atstatymo procesą $N_t=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}(T_n\le t)$, kurio tarpiniai atstatymo momentai τ_i turi geometrinį skirstinį:

$P_\theta\left(\tau_1 = k\right) = \theta(1-\theta)^{k-1}, \ \theta \in \Theta = (0,1),$
$k = 1,2,..$.

Remiantis K. Adomaitiene (2009), šio atstatymo proceso α – eilės Helingerio integralas turi pavidalą:

$$H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right) = \left[\theta_1^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha} + (1-\theta_1)^{\alpha}(1-\theta_2)^{1-\alpha}\right]^{[t]}$$

čia $[t]$ – sveikoji skaičiaus t dalis.

3 lema. Kai $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$, $\alpha \in (0,1)$, teisinga formulė

$$\lim_{t\to\infty} H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right) = 0,$$

ir atitinkami tikimybiniai matai $P_{\theta_1}^t$ ir $P_{\theta_2}^t$ yra visiškai asimptotiškai atskiriami, kai $\theta_1 \neq \theta_2$.

Įrodymas

Kadangi $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$, tai akivaizdu, kad

$$f(\theta_1) = \theta_1^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha} + (1-\theta_1)^{\alpha}(1-\theta_2)^{1-\alpha} > 0.$$

Kad gautume teoremos rezultatą, pakanka įrodyti, jog $f(\theta_1) < 1$. Tiriame funkciją $f(\theta_1)$:

$$f'(\theta_1) = \alpha\theta_1^{\alpha-1}\theta_2^{1-\alpha} - \alpha(1-\theta_1)^{\alpha-1}(1-\theta_2)^{1-\alpha}.$$

Prilyginame nuliui:

$$\alpha\theta_1^{\alpha-1}\theta_2^{1-\alpha} - \alpha(1-\theta_1)^{\alpha-1}(1-\theta_2)^{1-\alpha} = 0.$$

Iš čia

$$\left(\frac{1}{\theta_2} - 1\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{\theta_1} - 1\right)^{\alpha-1}.$$

Vadinasi, $\theta_1 = \theta_2$ yra vienintelis $f(\theta_1)$ ekstremumo taškas. Tai yra maksimumo taškas, nes

$$f''(\theta_1) = \alpha(\alpha-1)\theta_1^{\alpha-2}\theta_2^{1-\alpha} +$$
$$+ \alpha(\alpha-1)(1-\theta_1)^{\alpha-2}(1-\theta_2)^{1-\alpha}$$

ir

$$f''(\theta_2) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\theta_2(1-\theta_2)} < 0.$$

Taigi,

$$f(\theta_2) = \max_{0<\theta_1<1} f(\theta_1) = \theta_2^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha} +$$
$$+ (1-\theta_2)^{\alpha}(1-\theta_2)^{1-\alpha} = 1.$$

Vadinasi, su visais $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ ir $\theta_2 \neq \theta_1$

$$0 < f(\theta_1) = \theta_1^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha} + (1-\theta_1)^{\alpha}(1-\theta_2)^{1-\alpha} < 1.$$

Įrodymas baigtas

Literatūra

1. Adomaitienė K., 2009, Atstatymo procesai su determinuotais kompensatoriais. *Bakalauro darbas*. Šiaulių universitetas.
2. Chernoff H., 1952, A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. *Ann. Math. Statist*. No. 23. P. 493–507.
3. Kanišauskas V., 1998, Асимптотически минимаксное различение двух простых гипотез. *Lietuvos matematikos rinkinys*. No. 38 (2). P. 169–184.
4. Kanišauskas V., 2000, Dvi atstatymo proceso Helingerio transformacijos asimptotinės formulės. *Fizikos ir matematikos fakulteto mokslinio seminaro darbai*. T. 3. P. 21–26. Šiauliai.
5. Le Cam L., 1960, Locally asymptotically normal families of distributions. *Univ. Calif. Publ. Statist.* No. 3. P. 27–98).
6. Salikhov N. P., 1973, Asymptotic properties of error probabilities of tests for discriminating betweens several multinomial testing schemes. *Dolk. Akad. Nauk. SSSR*. No. 209 (1). P. 54–57.
7. Линьков Ю. Н., 1993, Наукова Думка. *Асимптотические методы статистики случайных процессов*. Киев.
8. Ширяев А. Н., 1989, *Вероятность*. Москва: Наука.

ASYMPTOTIC SEPARABILITY OF PROBABILITY MEASURES OF RENEWAL PROCESS

Kristina Pikturnaitė, Vaidotas Kanišauskas

Summary

The paper analyses a problem of asymptotic separability of a renewal process. The paper provides essential concepts, definitions, theorems and criteria that are used in the following theories: asymptotic separability of probability measures, large deviations theory, and Hellinger integral theory. All Hellinger integrals under analysis have been included in the paper, because asymptotic separability of probability measures is directly related to respective asymptotics of Hellinger integral. Asymptotics of Hellinger integral when time increases indefinitely was also examined. The findings allowed determining that any pair of probability measures $P_{\theta_1}^t$ and $P_{\theta_2}^t$ of the renewal process with continuous compensator, exponential renewal process and geometric renewal process are asymptotically separable when their parameters differ, i.e. $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$.

ISSN 1648-8776
JAUNŲJŲ MOKSLININKŲ DARBAI. Nr. 2 (31). 2011

ATSTATYMO PROCESO TIKIMYBINIŲ MATŲ ASIMPTOTINIS ATSKIRIAMUMAS

Kristina Pikturnaitė, Vaidotas Kanišauskas

Santrauka

Straipsnyje nagrinėjamas atstatymo proceso asimptotinio atskiriamumo uždavinys. Teorinėje dalyje, pateikiamos būtinos sąvokos, apibrėžimai, vartojamos teoremos ir kriterijai iš tikimybinių matų asimptotinio atskiriamumo teorijos, iš didžiųjų nuokrypių teorijos ir Helingerio integralo teorijos. Kadangi tikimybinių matų asimptotinis atskiriamumas tiesiogiai susijęs su atitinkama Helingerio integralo asimptotika, straipsnyje rasti visi nagrinėjami Helingerio integralai. Taip pat ištirta Helingerio integralo asimptotika, kai laikas neapibrėžtai didėja. Remiantis tuo, išaiškinta, kad atstatymo proceso su tolydžiu kompensatoriumi, eksponentinio atstatymo proceso, geometrinio atstatymo proceso bet kuri tikimybinių matų pora $P_{\theta_1}^t$ ir $P_{\theta_2}^t$ yra asimptotiškai atskiriama, kai jų parametrai nesutampa, t. y. $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$.

Įteikta 2011-06-06