PARETO DĖSNIO UODEGOS INDEKSO ĮVERTINYS

Ingrida Paulauskaitė, Marijus Vaičiulis
Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Šiaulių universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas

Įvadas

Statistinėje literatūroje gausu pavyzdžių, kuriuose stebiniai yra pasiskirstę pagal 2-parametrinį Pareto dėsnį $F_{\alpha,\mu}$, kurio tikimybės tankio ir pasiskirstymo funkcijos yra

$$p_{\alpha,\mu}(x) = \mu^{\alpha}\alpha x^{-\alpha-1},\ F_{\alpha,\mu}(x) = 1-\mu^{\alpha}x^{-\alpha},$$
$$x \geq \mu,$$

čia $\mu > 0$ yra poslinkio parametras, $\alpha > 0$ – dėsnio $F_{\alpha,\mu}$ uodegos indeksas. Papildomas skalės $\sigma > 0$ parametras praplečia 2-parametrinį dėsnį $F_{\alpha,\mu}$ iki 3-parametrinio Pareto dėsnio su pasiskirstymo funkcija

$$F_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = 1-\left(1+\frac{x-\nu}{\alpha\sigma}\right)^{-\alpha},\ x \geq \nu, \tag{1}$$

Čia: $\nu \in \mathbf{R}$. Pastebėkime, kad tarp dėsnių $F_{\alpha,1}$ (taip vadinamo standartinio Pareto dėsnio) ir $F_{\alpha,\mu,\sigma}$ egzistuoja ryšys: jei ats. dydis ξ yra pasiskirstęs pagal dėsnį $F_{\alpha,1}$, tai ats. dydis

$$\eta = \nu + \alpha\,\sigma(\xi^{-1/\alpha} - 1) \tag{2}$$

yra pasiskirstęs pagal dėsnį $F_{\alpha,\mu,\sigma}$.

Ko gero žinomiausi dėsnio $F_{\alpha,\mu,\sigma}$ uodegos indekso α įvertiniai yra gaunami maksimalaus tikėtinumo ir momentų metodais (žr. Singh, Guo, 1995). Kitų parametro α įvertinių apžvalgą galima rasti S. F. Juárez (2003) straipsnyje. Šiame straipsnyje mes sukonstruosime parametro α įvertinį modifikuodami semiparametrinį Qi (2010) įvertinį. Pastarojo konstrukcija pagrįsta stebinių grupavimu: iš anksto parinkus $2 \leq m \leq N$, stebiniai $X_1, X_2, \ldots, X_N$ padalijami į $n = [N/m]$ grupių $G_1, \ldots, G_n$, kur

$$G_k = \{X_{(k-1)m+1}, \ldots, X_{km}\}\ 1 \leq k \leq n, \tag{3}$$

čia ir toliau $[\cdot]$ žymi sveikąją skaičiaus dalį. Grupės G_k variacinė seka žymima

$$X_{k,1} \leq X_{k,2} \leq \ldots \leq X_{k,m}.$$

Tada Qi(2010) įvertinys yra $\dfrac{1}{\hat{\alpha}_{N,m}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\dfrac{X_{k,m}}{X_{k,m-1}}\right)$.

Įvertinys $\hat{\alpha}_{N,m}$ yra invariantiškas skalės atžvilgiu (nesikeičia stebinius $X_1, \ldots, X_N$ pakeitus į $c_1X_1, \ldots, c_1X_N$, kur $c_1 > 0$ yra konstanta) ir nėra invariantiškas poslinkio atžvilgiu, t. y. įvertinys $\hat{\alpha}_{N,m}$ pasikeičia vietoj stebinių $X_1, \ldots, X_N$ imant $c_2 + X_1, \ldots, c_2 + X_N$, kur $c_2 > 0$ taip pat yra konstanta.

Siūlome invariantišką poslinkio ir skalės atžvilgiu įvertinio $\alpha_{N,m}$ modifikaciją, kuri gaunama išnaudojant trečią pagal didumą kiekvienos grupės (3) elementą:

$$Q_{N,m} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{X_{k,m}-X_{k,m-2}}{X_{k,m-1}-X_{k,m-2}}\right),$$

čia $3 \leq m \leq N$.

Pažymėkime

$$Z = \frac{\max\{Y_1, Y_2\}-1}{\min\{Y_1, Y_2\}-1},$$

čia Y_1 ir Y_2 yra nepriklausomi standartiniai Pareto ats. dydžiai. Apibrėžkime funkciją

$$\phi(\alpha) = \mathrm{E}\{\ln(Z)\} \tag{4}$$

Pirmiausia būtina aptarti optimalų m parinkimą (vidutinio kvadratinio nuokrypio prasme) bei statistikos $Q_{N,m}$ asimptotinį normalumą prie optimalaus m parinkimo.

1 teorema *Tegul stebiniai $X_1, \ldots, X_N$ yra nepriklausomi ats. dydžiai, pasiskirstę pagal triparametrinį Pareto dėsnį (1). Tada*

(i) *$Q_{N,m}$ yra nepaslinktas parametro $q = \phi(\alpha)$ įvertinys su bet kokiu $3 \leq m \leq N$;*

(ii) *Asimptotinis vidutinis kvadratinis nuokrypis $\mathrm{E}(Q_{N,m} - q)^2$ yra mažiausias prie $m = 3$;*

(iii) *Įvertinys $Q_{N,3}$ yra asimptotiškai normalus:*

$$N^{1/2}(Q_{N,3} - q) \Rightarrow \mathbf{N}(0,3Var(Z)),\ (\mathrm{N} \to \infty). \tag{5}$$

kur $\Rightarrow$ žymi konvergavimą pagal pasiskirstymą, o N yra normalusis ats. dydis.

Dešinė (4) pusė nėra išreiškiama elementariosiomis funkcijomis:

$$\phi(\alpha) = 2(\psi(2\alpha) - \psi(\alpha)), \tag{6}$$

čia $\psi(\alpha) = \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ žymi digama funkciją, o

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\exp\{-x\}dx,\ \alpha > 0$$

yra gama funkcija (arba kitaip – pirmos rūšies Oilerio integralas). Funkcija ϕ yra tolydi ir monotoninė, kai $\alpha > 0$ (žr. lemą 2.1), todėl egzistuoja jai atvirkštinė funkcija, kuri žymima ϕ^{-1}. Vadinasi,

$$\hat{\alpha}_N = \phi^{-1}(Q_{N,3}) \tag{7}$$

yra uodegos indekso $\alpha > 0$ įvertinys.

2 teorema *Tegul tenkinamos 1.1 teoremos sąlygos. Tada*

$$N^{1/2}(\hat{\alpha}_N - \alpha) \Rightarrow \mathbf{N}\left(0, 3(\phi'(\alpha))^{-2}Var(Z)\right),$$
$$(\mathrm{N} \to \infty). \tag{8}$$

Iš (8) išplaukia, kad įvertinio $\hat{\alpha}_N$ asimptotinis kvadratinis nuokrypis yra (kai stebiniai tenkina 1.1 teoremos sąlygas)

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}_N - \alpha)^2 = \frac{3Var(Z)}{(\phi'(\alpha))^2 N},\ \mathrm{N} \to \infty \tag{9}$$

Kyla natūralus klausimas – ar įvertinys α_N gerina įvertinį $\hat{\alpha}_{N,m}$? Kad būtų galima atsakyti į šį klausimą, reikia pasinaudoti de Haan ir Peng (1998) pasiūlyta įvertinių palyginimo schema. Yra žinoma (žr. Qi, 2010; Paulauskas, Vaičiulis, 2011), kad kai stebiniai $X_1, ..., X_N$ tenkina 1.1 teoremos sąlygas, tai minimalus asimptotinis kvadratinis nuokrypis Qi įvertiniui yra

$$\mathrm{E}\left(\hat{\alpha}_{N,m^*} - \alpha\right)^2 = C(\alpha,\mu,\sigma)N^{-2/(\alpha+2)},\ N \to \infty, \tag{10}$$

čia m^* žymi optimalų elementų grupelėje skaičiaus parinkimą. Iš tiesų optimalus m parinkimas m^* priklauso nuo dėsnio $F_{\alpha,\mu,\sigma}$ parametrų ir imties tūrio N, detaliau apie tai diskutuojama V. Paulausko ir M. Vaičiulio (2011) straipsnyje.

Pažymėkime

$$A = \lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{E}(\hat{\alpha}_N - \alpha)^2}{\mathrm{E}(\hat{\alpha}_{N,m^*} - \alpha)^2}.$$

Sekdami de Haan ir Peng (1998) schema, sakysime, kad įvertinys $\hat{\alpha}_N$ yra pranašesnis už įvertinį $\hat{\alpha}_{N,m^*}$, jei $A < 1$. Pasinaudoję (9)–(10) mes nesunkiai randame, kad $A = 0$ su bet kokiu $\alpha > 0$. Tokia pat išvadą galima padaryti paėmus vietoje įverčio $\hat{\alpha}_{N,m^*}$ bet kurį kitą semiparametrinį įvertinį. Taigi, jei preliminari duomenų analizė rodo, kad stebiniai yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal dėsnį (1), tai uodegos indeksui vertinti rekomenduojame greta kitų parametrinių įvertinių vartoti ir įvertinį $\hat{\alpha}_N$.

Antrame šio straipsnio skyrelyje mes pateikėme (7) įvertinio taikymo metodologiją. Visi įrodymai yra nukelti į trečią skyrelį.

Metodologija

Kad būtų galima taikyti (7) uodegos indekso $\alpha > 0$ vertinimui, siūlome vartoti dviejų žingsnių procedūrą: (i) panaudoti įvertinį $Q_{N,3}$ įverčiui $\hat{q}$ surasti; (ii) $\hat{\alpha}$ atžvilgiu išspręsti lygtį

$$\phi(\hat{\alpha}) = \hat{p}. \tag{11}$$

Su netiesinės lygties sprendimu susiduriama taikant kitus parametrinius įvertinius (žr. Singh, Guo, 1995). Reikalingos kelios analizinės funkcijos $\phi(\alpha)$ savybės.

1 lema *(i)* $\phi(\alpha) \to \ln(4)$, *kai* $\alpha \to \infty$; *(ii) Kai* $\alpha > 0$ *funkcija* $\phi(\alpha)$ *turi išsvestinę*

$$\phi'(\alpha) = 2\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}\{1 - 2x^\alpha\}\ln(x)}{1-x}dx. \tag{12}$$

(iii) Kai $\alpha > 0$ funkcija $\phi(\alpha)$ yra monotoniškai mažėjanti.

Iš lemos 2.1 tvirtinimų (ii)-(iii) išplaukia, kad egzistuoja funkcijai $\phi(\alpha)$, $\alpha > 0$ atvirkštinė funkcija $\phi^{-1}(q)$, $q > \ln(4)$, kuri yra monotoninė, o tai reiškia, kad bet kuriam $\hat{q} > \ln(4)$ egzistuoja vienintelis lygties (11) sprendinys. Išnaudodami funkcijos ϕ monotonišką mažėjimą, taikysime kelių žingsnių procedūrą apytiksliam lygties (11) sprendiniui rasti:

1. Surasti mažiausią natūralų skaičių k_0, tokį, kad būtų tenkinama nelygybė $\hat{q} > \phi(k_0 + 1)$.
2. Surasti tokį mažiausią skaičių $k_1 \in \{0, 1, ..., 9\}$, kad būtų tenkinama nelygybė
$$\hat{q} > \phi\left(k_0 + \frac{k_1 + 1}{10}\right).$$
3. Surasti tokį mažiausią skaičių $k_2 \in \{0, 1, ..., 9\}$, kad būtų tenkinama nelygybė
$$\hat{q} > \phi\left(k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2 + 1}{100}\right).$$

Tęsdami analogiškai toliau, po $\ell \in N$ žingsnių turime lygties (11) sprendinį (ℓ skaitmenų po kablelio tikslumu) $\hat{\alpha} = \overline{k_0, k_1 k_2, ..., k_\ell}$.

3. Įrodymai

Pažymėkime $W_{k,m} = \dfrac{X_{k,m} - X_{k,m-2}}{X_{k,m-1} - X_{k,m-2}}$, $1 \le k \le n.$

Pirmiausia išveskime formulę, siejančią ikiribinių ats. dydžių $\ln W_{1,m}$ ir ribinių ats. dydžių ln(Z) momentus.

1 lema *Tegul C, ..., X_N yra nepriklausomi ats. dydžiai, pasiskirstę pagal dėsnį, kurio pasiskirstymo funkcija yra (1). Tada su bet kokiais $s \ge 1$ ir $3 \le m \le N$ yra teisinga lygybė*

$$\mathrm{E}\{\ln^s(W_{1,m})\} = \mathrm{E}\{\ln^s(Z)\} \tag{13}$$

Įrodymas. Ats. dydis $W_{1,m}$ yra invariantiškas poslinkio ir skalės atžvilgiu, todėl pasinaudojus sąryšiu (2) pakanka (13) tvirtinimą įrodyti laikant, kad stebinių X_k, $1 \le k \le N$ pasiskirstymo funkcija yra $F_{\alpha,1}(x)$. Taikydami vidurkio apibrėžimą, gauname, kad kairė (13) pusė yra lygi

$$m!\int^{\infty} dF_{\alpha,1}(x_1)\int^{x_1} dF_{\alpha,1}(x_2)\int^{x_2}\ln^s\left(\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}\right)dF_{\alpha,1}(x_3)\times$$
$$\times\int^{x_3} dF_{\alpha,1}(x_4)\ldots\int^{x_{m-1}} dF_{\alpha,1}(x_m).$$

Apskaičiavę paskutinius $m-3$ integralus, pakeiskime integravimo tvarką. Tada vidurkis $\mathrm{E}\{\ln^s(W_{1,m})\}$ tampa lygus

$$\frac{m!}{(m-3)!}\int^{\infty} dF_{\alpha,1}(x_1)\int^{x_1} dF_{\alpha,1}(x_2)\times$$
$$\times\int^{x_2}\ln^s\left(\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}\right)F_{\alpha,1}^{m-3}(x_3)dF_{\alpha,1}(x_3)$$
$$=\frac{m!}{(m-3)!}\int^{\infty}F_{\alpha,1}^{m-3}(x_3)d\,\mathrm{F}_{\alpha,1}(x_3)\times$$
$$\times\int_{x_3}^{\infty} dF_{\alpha,1}(x_2)\int_{x_2}^{\infty}\ln^s\left(\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}\right)dF_{\alpha,1}(x_1).$$

Atlikę integravimo kintamųjų x_1 ir x_2 pakeitimus $x_2 = x_3 v, x_1 = x_3 u$, turime

$$\mathrm{E}\{\ln^s(W_{1,m})\} = \frac{m!}{(m-3)!}\int^{\infty} x_3^{-2\alpha}p_{\alpha,1}(x_3)F_{\alpha,1}^{m-3}(x_3)dx_3\times$$
$$\times\int^{\infty} p_{\alpha,1}(v)dv\int_{v}^{\infty} p_{\alpha,1}(u)\ln^s\left(\frac{u-1}{v-1}\right)du.$$

Atlikę integravimo kintamojo pakeitimą $t = x_3^{-\alpha}$ gauname

$$\int^{\infty} x_3^{-2\alpha}p_{\alpha,1}(x_3)F_{\alpha,1}^{m-3}(x_3)dx_3 = \int_0^1 t^2(1-t)^{m-3}\,dt.$$

Paskutinis integralas yra lygus $\Gamma(3)\Gamma(m-2)/\Gamma(m+1) = 2(m-3)!/m!$, todėl

$$\mathrm{E}\{\ln^s(W_{1,m})\} = 2\int^{\infty} p_{\alpha,1}(v)dv\int_{v}^{\infty} p_{\alpha,1}(u)\ln^s\left(\frac{u-1}{v-1}\right)du. \tag{14}$$

Lieka pastebėti, kad lygybių (13) ir (14) dešiniosios pusės sutampa. Lemos 3.1 įrodymo pabaiga.

Išvada

Tegul X_1, ..., X_N yra nepriklausomi ats. dydžiai, pasiskirstę pagal dėsnį, kurio pasiskirstymo funkcija yra (1). Tada su bet kokiu $3 \le m \le N$ yra teisingos lygybės

$$\mathrm{E}\{Q_{N,m}\} = \mathrm{E}\{\ln(Z)\}, \tag{15}$$

$$Var\{Q_{N,m}\} = \frac{1}{n}Var\{\ln(Z)\}. \tag{16}$$

Įrodymas. Ats. dydžiai $W_{k,m}$, $1 \le k \le n$ yra vienodai pasiskirstę, todėl $\mathrm{E}\{Q_{N,m}\} = \mathrm{E}\{\ln(W_{1,m})\}$. Pasinaudoję (13) su $s = 1$ gauname (15).

Kadangi $Var\{Q_{N,m}\} = \mathrm{E}\{Q_{N,m} - \mathrm{E}\{Q_{N,m}\}\}^2$, tai pasinaudoję iš (15) išplaukiančia lygybe $\mathrm{E}\{Q_{N,m}\} = \mathrm{E}\{\ln(W_{k,m})\}$, $1 \le k \le n$ gauname

$$Var\{Q_{N,m}\} = \frac{1}{n^2}\mathrm{E}\left\{\sum_{k=1}^{n}\{\ln(W_{k,m}) - \mathrm{E}\{\ln(W_{k,m})\}\}\right\}^2$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^{n}\mathrm{E}\{\ln(W_{k,m}) - \mathrm{E}\{\ln(W_{k,m})\}\}\{\ln(W_{l,m}) - \mathrm{E}\{\ln(W_{l,m})\}\}.$$

Ats. dydžiai $W_{k,m}$, $1 \le k \le n$ yra ne tik vienodai pasiskirstę, bet ir nepriklausomi, todėl

$$Var\{Q_{N,m}\} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\{\ln(W_{k,m}) - \mathrm{E}\{\ln(W_{k,m})\}\}^2$$
$$= \frac{1}{n}Var\{\ln(W_{1,m})\}.$$

Kad būtų gauti (16) lieka pasinaudoti (13) su $s = 1$ ir $s = 2$. Įrodymo pabaiga.

Teoremos 1.1 įrodymas. Tvirtinimas (i) yra įrodytas, žr. (15). Kad būtų galima įrodyti tvirtinimą (ii), pakanka pasinaudoti (15) ir (16):

$$\mathrm{E}\{Q_{N,m} - q\}^2 = \frac{1}{n}Var\{\ln(W_{1,m})\}.$$

ISSN 1648-8776
JAUNŲJŲ MOKSLININKŲ DARBAI. Nr. 1 (30). 2011

Dispersija $Var\ \{\ln(W_{1,m})\}$ nepriklauso nuo N, m, o santykis $1/n = 1/[N/m]$ yra mažiausias, kai m yra mažiausias įmanomas, t. y. kai $m = 3$.

Liko įrodyti tvirtinimą (iii). Rašykime

$$\frac{Q_{N,m} - \mathrm{E}\{Q_{N,3}\}}{(Var\{S_{N,3}\})^{1/2}} = \sum_{k=1}^{[N/3]} \frac{\ln(W_{k,3}) - \mathrm{E}\{\ln(W_{k,3}\}}{[N/3]^{1/2}(Var\{\ln(W_{k,3})\})^{1/2}}.$$

Ats. dydžiai

$$\frac{\ln(W_{k,3}) - \mathrm{E}\{\ln(W_{k,3})\}}{[N/3]^{1/2}(Var\{\ln(W_{k,3})\})^{1/2}}, k = 1,2,...,[N/3]$$

yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę bei turi nulinį vidurkį ir dispersiją, lygią $1/[N/3]$. Todėl, remiantis Liapunovo teorema, sąryšis

$$\frac{Q_{N,3} - \mathrm{E}\{Q_{N,3}\}}{(Var\{S_{N,3}\})^{1/2}} \Rightarrow \mathbf{N}(0,1), \quad N \to \infty \tag{17}$$

bus įrodytas, jei parodysime, kad $s > 2$ eilės Liapunovo trupmena

$$L_s = \sum_{k=1}^{[N/3]} \mathrm{E}\left| \frac{\ln(W_{k,3}) - \mathrm{E}\{\ln(W_{k,3})\}}{[N/3]^{1/2}(Var\{\ln(W_{k,3})\})^{1/2}} \right|^s \tag{18}$$

artėja į nulį, kai $N \to \infty$. Dešinė (18) pusė yra lygi

$$[N/3]^{1-(s/2)} \frac{\mathrm{E}|\ln(W_{1,3}) - \mathrm{E}\{\ln(W_{1,3})\}|^s}{(Var\{\ln(W_{1,3})\})^{s/2}}.$$

Kombinuodami Minkovskio ir Liapunovo nelygybes (jas galima rasti Shiriayev, 1996) gauname

$$\mathrm{E}|\ln(W_{1,3}) - \mathrm{E}\{\ln(W_{1,3})\}|^s \le 2^s\, \mathrm{E}\{\ln^s(W_{1,3})\}.$$

Pasinaudoję (13) gauname nelygybę

$$L_s \le [N/3]^{1-(s/2)} \frac{2^s\, \mathrm{E}\{\ln^s(Z)\}}{(Var\{\ln(Z)\})^{s/2}}.$$

Kadangi $1 - (s/2) < 0$, tai $[N/3]^{1-(s/2)} \to 0$, kai $N \to \infty$. Vadinasi, kad būtų galima baigti sąryšio (17) įrodymą, reikia įrodyti, kad

$$\mathrm{E}\{\ln^s(Z)\} < \infty, \tag{19}$$

kai $s > 2$. Iš (14) turime

$$\mathrm{E}\{\ln^s(Z)\} = 2\alpha^2 \int_1^\infty x^{-\alpha-1} dx \int_x^\infty y^{-\alpha-1} \ln^s\left(\frac{y-1}{x-1}\right) dy.$$

Pastebėkime, kad $(y - 1)/(x - 1) \ge 1$ su bet kokiais $1 < x \le y < \infty$. Todėl $\ln((y - 1)/(x - 1) \ge 0$. Pasirinkime $r > 0$ tokį, kad būtų tenkinama nelygybė $s/r < \min\ \{\alpha, 1\}$. Pasinaudoję nelygybe $\ln(x) \le rx^{1/r}$, kuri yra teisinga, kai $x \ge 1$, gauname, kad

$$\mathrm{E}\{\ln^s(Z)\} \le C \int_1^\infty x^{-\alpha-1}(x-1)^{-s/r} dx \int_1^\infty y^{-\alpha-1} (y-1)^{s/r} dy, \tag{20}$$

čia konstanta C priklauso tik nuo α ir r. Nesunku įsitikinti, kad

$$\int_1^\infty y^{-\alpha-1}(y-1)^{s/r} dy < \infty. \tag{21}$$

Iš tiesų,

$$\int_1^\infty y^{-\alpha-1}(y-1)^{s/r} dy \le \int_1^\infty y^{s/r-\alpha-1} dy,$$

o paskutinis integralas konverguoja, kai $s/r < \alpha$. Kad būtų įrodyta, jog nelygybė

$$\int_1^\infty x^{-\alpha-1}(x-1)^{-s/r} dx < \infty, \tag{22}$$

yra teisinga, atlikime integravimo kintamojo pakeitimą $t = 1/x$. Tada

$$\int_1^\infty x^{-\alpha-1}(x-1)^{-s/r} dx = \int_0^1 t^{\alpha+(s/r)-1}(1-t)^{-s/r} dt =$$
$$= \mathrm{B}(\alpha + (s/r), 1 - (s/r)),$$

čia B žymi beta funkciją, kuri konverguoja, kai jos abu argumentai yra teigiami. Taigi, iš $1 - (s/r) > 0$ išplaukia (22). Savo ruožtu, iš (20)–(22) išplaukia (19).

Pasinaudoję (15)–(16) bei faktų $[N/3]/(N/3) \to 1$, $(N \to \infty)$ sąryšiui (17), perrašykime:

$$N^{1/2}(Q_{N,3} - q) \Rightarrow 3^{1/2}(Var\{\ln(Z)\})^{1/2}\mathbf{N}(0,1),$$
$$N \to \infty,$$

o iš čia išplaukia (5). Teoremos 1.1 įrodymo pabaiga.

Įrodykime (6). Kad tai padarytume, pakanka įrodyti lygybę

$$\int_1^\infty p_{\alpha,1}(v)\left\{\int_v^\infty p_{\alpha,1}(u) \ln^s\left(\frac{u-1}{v-1}\right) du\right\} dv =$$
$$= \psi(2\alpha) - \psi(\alpha). \tag{23}$$

Taikydami integravimą dalimis vidiniame integrale, gauname, kad kairė (23) pusė yra lygi

$$\alpha\int_1^\infty v^{-\alpha-1}dv\int_v^\infty u^{-\alpha}\frac{1}{u-1}du=\alpha\int_1^\infty u^{-\alpha}\frac{1}{u-1}du\int_1^u v^{-\alpha-1}dv$$
$$=\int_1^\infty u^{-\alpha}\left(1-u^{-\alpha}\right)\frac{1}{u-1}du.$$

Paskutiniame integrale atlikime integravimo kintamojo pakeitimą $z = 1/u$:

$$\int_1^\infty u^{-\alpha}\left(1-u^{-\alpha}\right)\frac{1}{u-1}du=\int_0^1\frac{z^{\alpha-1}-z^{2\alpha-1}}{1-z}dz.$$

L. A. Medina ir V. H. Moll (2009) yra įrodę, kad su bet kokiais $s_1\in\mathbf{R}$ ir $s_2\in\mathbf{R}$ yra teisinga lygybė

$$\int_0^1\frac{z^{s_1-1}-z^{s_2-1}}{1-z}dz=\psi(s_2)-\psi(s_1).$$

Pasinaudoję šiuo rezultatu, gauname (23). Taigi, (6) įrodėme.

Lemos 2.1 įrodymas. (i) Yra žinoma, kad su bet kokiu $\alpha > 0$ yra teisingos nelygybės

$$\ln(\alpha)-\frac{1}{\alpha}<\psi(\alpha)<\ln(\alpha)-\frac{1}{2\alpha}, \tag{24}$$

(žr. N. Batir, 2005). Pasinaudoję (24) gauname, kad

$$\ln(4)<\phi(\alpha)<\ln(4)+\frac{3}{2\alpha}.$$

Lieka pereiti prie ribos (kai $\alpha\to\infty$), kad būtų gautas (i) tvirtinimas.

(ii) Įrodydami (23) esame gavę funkcijos $\phi(\alpha)$ integralinę išraišką

$$\phi(\alpha)=2\int_0^1\frac{z^{\alpha-1}-z^{2\alpha-1}}{1-z}dz,$$

kurią diferencijuodami gausime (12).

(iii) Diferencijuodami funkcijos $\psi(\alpha)$, $\alpha > 0$ integralinę išraišką

$$\psi(\alpha)=-\gamma+\int_0^1\frac{1-x^{\alpha-1}}{1-x}dx,$$

$$\psi(\alpha)=-\gamma+\int_0^1\frac{1-x^{\alpha-1}}{1-x}dx,$$

kur $\gamma = 0.577216...$ yra Oilerio konstanta, gauname

$$\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha}=-\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}\ln(x)}{1-x}dx,$$

o iš čia išplaukia nelygybė $\psi'(\alpha) > 0$, kai $\alpha > 0$, t. y. funkcija $\psi(\alpha)$ yra didėjanti. Žinoma, kad didėjančių funkcijų skirtumas yra monotoninė funkcija, tad $\phi(\alpha), \alpha > 0$ yra monotoninė. Taigi, kad būtų galima įrodyti, jog funkcija $\phi(\alpha), \alpha > 0$ yra mažėjanti, pakanka parodyti, kad $\phi(2)-\phi(1)<0$. Pasinaudoję ψ funkcijų savybe $\psi(\alpha+1)-\psi(\alpha)=1/\alpha$, $\alpha > 0$, gauname $\phi(2)-\phi(1)=-1/3$. Lemos 2.1 įrodymo pabaiga.

Teoremos 1.2 įrodymas. Remiantis teorema apie atvirkštinės funkcijos išvestinę (žr. Fichtengolcas, 1965), funkcijos ϕ^{-1} išvestinė taške $\phi(\alpha)$ yra lygi $1/\phi'(\alpha)$. Taikydami delta metodą (žr. Van der Vaart, 1998), gauname, kad iš (5) išplaukia (8). Teoremos 1.2 įrodymo pabaiga.

Literatūra

1. Batir N., 2005, Some new inequalities for gamma and polygamma functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Vol. 6 (4). P. 2–9.
2. De Haan L., Peng L., 1998, Comparison of tail index estimators. *Statist. Neerlandica*. Vol. 52. P. 60–70.
3. Fichtengolcas G., 1965, *Matematinės analizės pagrindai*. Vilnius: Mintis.
4. Juárez S. F., 2003, Robust and efficient estimation for the generalized Pareto distribution. *Doctoral Thesis.* Southern Metodist University.
5. Medina L. A., Moll V. H., 2009, The integrals in Gradshteyn and Ryzhik. *Scientia Series A: Mathematical Sciences*. Vol. 17. P. 45–66.
6. Paulauskas V., Vaičiulis M., 2011, Several modifications of DPR estimator of the tail index to appear in Lith. *Math. J.*
7. Singh V. P., Guo H., 1995, Parameter estimation for 3-parametric generalized pareto distribution by the principle of maximim entropy (POME). *Hydrological Science*. Vol. 40 (2). P. 165–181.
8. Shiriayev A. N., 1996, *Probability.* New York:Springer.
9. Van der Vaart A. W., 1998, *Asymptotic statistics*. Volume 3 of Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.
10. Qi Y., 2010, On the tail index of a heavy tailed distribution. *Ann. Inst. Statist. Math*. Vol. 62 (2). P. 277–298.

ESTIMATOR OF THE TAIL INDEX FOR THE PARETO LAW

Ingrida Paulauskaitė, Marijus Vaičiulis

Summary

By modifying Qi(2010) tail index estimator we introduce shift and scale free tail index estimator for the 3-parametric Pareto law. Asymptotic normality of the new estimator is derived. By applying de Haan and Peng(1998) comparison scheme for the tail index estimators it is obtained that new estimator outperforms Qi(2010) estimator when observations are independent and identically distributed Pareto random variables.

Keywords: tail index, estimator, variables, Pareto law.

PARETO DĖSNIO UODEGOS INDEKSO ĮVERTINYS

Ingrida Paulauskaitė, Marijus Vaičiulis

Santrauka

Modifikuodami Qi (2010) uodegos indekso įvertinį, pasiūlėme naują 3-parametrinio Pareto dėsnio uodegos indekso įvertinį, kuris yra invariantiškas poslinkio ir skalės atžvilgiu. Įrodyta, kad naujas įvertinys yra asimptotiškai normalus. Taikant de Haan ir Peng (1998) įvertinių palyginimo schemą, pademonstruota, kad, kai stebiniai yra nepriklausomi Pareto ats. dydžiai, tai naujas įvertinys yra pranašesnis už Qi (2010) įvertinį.

Įteikta 2011-02-22