SKIRSTINIO UODEGOS INDEKSO MAX-DPR ĮVERTIS

Liudvikas Kazlauskas, Marijus Vaičiulis
Šiaulių universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas

Įvadas

Sakoma, kad neneigiamo atsitiktinio dydžio X tikimybių pasiskirstymas $F(x)$ pasižymi sunkia uodega, jei egzistuoja konstanta $0 < c_0 < \infty$ ir parametras $\alpha > 0$ (vadinamas skirstinio uodegos indeksu), jei

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}(1 - F(x)) = c_0 . \tag{1.1}$$

Statistikoje formuluojamas toks uždavinys: stebiniai X_1, ..., X_N yra neneigiami, nepriklausomi, vienodai pasiskirstę pagal dėsnį F, kuris tenkina semiparametrinę prielaidą (1.1) atsitiktiniam dydžiui; reikia įvertinti uodegos indeksą α. Dar 1975 m. semiparametrinius uodegos indekso įverčius pasiūlė Hill ir Pickand. Išsamias žinomų uodegos indekso įverčių apžvalgas galima rasti M. I. Gomes, L. Castro (2008) apžvalginiame straipsnyje bei N. Markovich (2007) monografijoje.

Statistinėje literatūroje, o ypač kompiuterinių tinklų statistinėje literatūroje gausu realių duomenų pavyzdžių, demonstruojančių, kad stebinių skirstinys pasižymi sunkia uodega, pvz., užklausų skaičiaus, siunčiamų failų dydžio skirstiniai (Crovella ir kt., 1998; Munoz-Rodriguez ir kt., 2006; Park ir kt., 2000; Markovich, 2007). Paprastai, jei kompiuteriniai tinklai nelabai apkrauti, tai iš jų gautuose duomenyse gausu nulių ar mažų skaičių. Tuo tarpu uodegos indeksas yra didelių reikšmių charakteristika, todėl surinkti duomenys agreguojami taikant vieną ar kelias agregavimo schemas.

Tikslas. Kombinuojant DPR skirstinio uodegos indekso įvertį su stebinių max-agregavimu, sukonstruoti naują skirstinio uodegos indekso įvertį max-DPR, kurio minimalus asimptotinis vidutinis kvadratinis nuokrypis yra mažesnis, kai max-agregavimo eilė yra fiksuota.

Pagrindinis rezultatas

Šiame darbe mes pasiūlysime Yu. Davydov, V. Paulausko ir A. Račkausko įverčio modifikaciją, kurioje max-agregavimas inkorporuotas į įvertį, t. y. vietoje uodegos indekso įverčio stebiniams $X_1, \ldots, X_N$, mes užrašysime aukščiau paminėtą įvertį agreguotai maksimumu imčiai $\bigvee_{k=1}^{q} X_k, \bigvee_{k=q+1}^{2q} X_k, \ldots, \bigvee_{k=([N/q]-1)q+1}^{q[N/q]} X_k$, čia: $q \geq 2$ yra sveikas skaičius ir žymi max-agregavimo eilę, o $[\cdot]$ žymi sveikąja skaičiaus dalį. Pastarąją imtį suskirstykime į grupeles po $m \geq 2$ $m \geq 2$ elementų:

$$G_{q,m,k} = \left\{ \bigvee_{l=(j-1)q+1}^{jq} X_l, (k-1)m + 1 \leq j \leq km \right\}, k = 1,2,\ldots,r,$$

o $r = [[n/q]/m]$. Tegul $L_{q,m,k}$ ir $l_{q,m,k}$ žymi k-tosios grupelės $G_{q,m,k}$ didžiausią ir antrą pagal didumą elementus. Apibrėžkime

$$\hat{p}_{q,m} = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} v_{q,m,k},\; v_{q,m,k} = \frac{l_{q,k}}{L_{q,k}}. \tag{1.2}$$

Mes tvirtiname, kad įvertis

$$\hat{a}_{q,m} = \frac{\hat{p}_{q,m}}{1 - \hat{p}_{q,m}} \tag{1.3}$$

vertina parametrą α. Įstatę $q = 1$i (1.2)–(1.3) gauname Yu. Davydov, V. Paulausko ir A. Račkausko (2000) pasiūlytą skirstinio uodegos indekso įvertį, sutrumpintai vadinamą DPR įverčiu (Qi, 2010). Kadangi max-agregavimas yra inkorporuotas į DPR įvertį $\hat{a}_{1,m}$, atrodo, natūralu $\hat{a}_{q,m}$ vadinti max-DPR skirstinio uodegos indekso įverčiu.

Sustiprinsime semiparametrinę prielaidą (1.1), tvirtindami, kad F yra Pareto dėsnis su minimalia reikšme $x_0 > 0$ ir uodegos indeksu $\alpha > 0$,

$$F(x) = 1 - x_0^{\alpha} x^{-\alpha}, x \geq x_0. \tag{1.4}$$

V. Paulauskas (2003) yra įrodęs, kad $\hat{p}_{1,m}$ yra asimptotiškai normalus bei nepaslinktas parametro $p = \alpha/(\alpha + 1)$ įvertis, kai stebiniai X_1, ..., X_N yra nepriklausomi Pareto atsitiktiniai dydžiai. Taip pat įrodyta, kad optimalus $G_{1,m,k}$ grupės plotis vidutinio kvadratinio nuokrypio prasme Pareto paprastajai imčiai yra $m = 2$. Prie bendresnių, nei (1.4) prielaidų, įverčio $\hat{p}_{1,m}$ asimptotinis normalumas aprašytas V. Paulausko (2003), V. Paulausko, M. Vaičiulio (2010a), V. Paulausko, M. Vaičiulio (2010b), Qi (2010) straipsniuose. Mūsų pagrindinis rezultatas tvirtina, kad įvertis $\hat{\alpha}_{q,m}$ yra asimptotiškai normalus.

Teorema 1.1. *Tegul stebiniai X_1, ..., X_N yra nepriklausomi, pasiskirstę pagal dėsnį (1.4) atsitiktiniai dydžiai. Tegul $m = m(N) \to \infty$*, kai $N \to \infty$.

(i) Tegul

$$q = q(N) \to \infty,\; N \to \infty \tag{1.5}$$

ir

$$\frac{N}{qm^3} \to \lambda^2 \in [0,\infty), \; N \to \infty . \tag{1.6}$$

Tada

$$\sqrt{r}(\hat{\alpha}_{q,m} - \alpha) \Rightarrow (\alpha+1)^2 \mathrm{N}(\lambda\mu, \sigma^2), \; N \to \infty , \tag{1.7}$$

čia ir toliau $\Rightarrow$ žymi konvergavimą pagal pasiskirstymą, N – normalųjį dėsnį, o asimptotinės konstantos yra

$$\mu = \frac{\alpha}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}, \; \sigma^2 = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}.$$

(ii) *Tegul agregavimo eilė q yra fiksuota ir tegul tenkinama sąlyga (1.6). Tada*

$$\sqrt{r}(\hat{\alpha}_{q,m} - \alpha) \Rightarrow (\alpha+1)^2 \mathrm{N}(\lambda\mu, \sigma^2), \; N \to \infty , \tag{1.8}$$

kur $\mu_q = \mu(q-1)/q$.

Trečiame skyrelyje, taikydami L. de Haan ir L. Peng (1998) pasiūlytą metodiką, įrodėme, kad minimalus asimptotinis įverčio $\hat{\alpha}_{q,m}$ vidutinis kvadratinis nuokrypis yra mažesnis, kai agreguojama naudojant fiksuotą agregavimo eilę q. Tame pačiame skyrelyje palyginome įverčių $\hat{\alpha}_{q,m}$ bei DPR įverčio $\hat{\alpha}_{1,m}$ minimalius vidutinius kvadratinius nuokrypius. Ketvirtame skyrelyje įrodyta 1.1 teorema.

Optimalios agregavimo eilės parinkimas

Straipsnyje siūloma metodika, kaip palyginti du skirtingus uodegos indekso α įverčius. Šią metodiką mes adaptuosime, kad galėtume palyginti 1.1 teoremoje minimas agregavimo eiles. Šiame skyrelyje max-DPR įvertį su agregavimo eile $q = q(N)$ tolstančia kartu su N į begalybę, žymėsime $\alpha_{q(N),m}$. Sekdami L. de Haan ir L. Peng (1998), sakysime, kad fiksuota agregavimo eilė yra pranašesnė nei tolstanti į begalybę agregavimo eilė, jei

$$A := \lim_{N\to\infty} \frac{\inf_{q(N)\ge 2, m\ge 2} E(\hat{\alpha}_{q(N),m} - \alpha)^2}{\inf_{q(N)\ge 2, m\ge 2} E(\hat{\alpha}_{q,m} - \alpha)^2} > 1. \tag{2.1}$$

Pradėkime nuo (2.1) poribinio reiškinio vardiklio asimptotikos. Pasinaudoję prielaida (1.6) ir sąryšiu (1.8), gauname

$$E(\hat{\alpha}_{q,m} - \alpha)^2 \sim (\alpha+1)\left\{\frac{\mu_q^2}{m^2} + \frac{qm\sigma^2}{N}\right\}, \; N \to \infty .$$

Subalansuokime skliaustuose {...} esančių dėmenų artėjimo į nulį greičius parinkdami grupių $G_{q,m,k}$, $1 \le k \le r$ narių skaičių $m_* = DN^{1/3}$, kur $0 < D < \infty$ nepriklauso nuo N. Tada

$$E(\hat{\alpha}_{q,m_*} - \alpha)^2 \sim (\alpha-1)^4\left(\frac{\mu_q^2}{D^2} + qD\sigma^2\right)\left(\frac{1}{N}\right)^{2/3}, \; \mathrm{N} \to \infty.$$

Kad surastume minimalų asimptotinį vidutinį kvadratinį nuokrypį, reikia minimizuoti asimptotinę konstantą $f(q,D) = \mu_q^2 D^{-2} + qD\sigma^2$. Nesunku patikrinti, kad funkcija $f(q, D)$ yra didėjanti pagal $q > 0$. Prisiminę, kad $q = 1$ atitinka stebinių neagregavimą, o mažiausia agregavimo eilė yra 2, gauname, kad $q_* = 2$ yra optimalus agregavimo eilės parinkimas. Minimizuodami funkciją $f(2, D)$ pagal $D > 0$ randame, kad $\min_{D>0} f(2,D) = 3\sigma^2 D_*$ ir šis minimumas įgyjamas prie $D_* = \left(\frac{\mu^2}{4\sigma^2}\right)^{1/3}$.

Vadinasi, įverčio $\hat{\alpha}_{q,m}$ minimalus asimptotinis vidutinis kvadratinis nuokrypis (kai agregavimo eilė fiksuota) yra

$$\inf_{q\ge 2, m\ge 2} W(\hat{\alpha}_{q,m} - \alpha)^2 \sim \frac{3\alpha(\alpha+1)^2}{\alpha+2}\left(\frac{\alpha}{4(\alpha+2)}\right)^{1/3} N^{-2/3},$$

$N \to \infty$.

Pereikime prie įverčio $\hat{\alpha}_{q(N),m}$ minimalaus asimptotinio vidutinio kvadratinio nuokrypio paieškos. Pasinaudoję prielaida (1.6) ir (1.7), randame

$$E(\hat{\alpha}_{q(N),m_*} - \alpha)^2 \sim (\alpha+1)^4\left(\frac{\mu^2}{D^2} + D\sigma^2\right)\left(\frac{q(N)}{N}\right)^{2/3},$$

$N \to \infty$.

Grupės narių skaičiumi $m^* = D(N/q(N))^{1/3}$, kur $0 < D < \infty$ nepriklauso nuo $q(N)$ ir $N (N)$, balansuojame artėjančių į nulį dėmenų greičius:

$$E(\hat{\alpha}_{q,m^*} - \alpha)^2 \sim (\alpha+1)^4\left(\frac{\mu^2}{D^2} + D\sigma^2\right)\left(\frac{q(N)}{N}\right)^{2/3},$$

$$N \to \infty . \tag{2.3}$$

Remdamiesi prielaida (1.5), gauname, kad $E(\hat{\alpha}_{q,m^*} - \alpha)^2$ E artėja į nulį lėčiau nei $N^{-2/3}$. Taigi, $A = \infty$, vadinasi, max-agregavimas, kai agregavimo eilė q fiksuota, yra pranašesnis už max-agregavimą, kai agregavimo eilė $q(N)$ auga į begalybę kartu su stebinių skaičiumi N.

Teoremos įrodymas

Įrodykime 1.1 teoremos atvejį (i). Pažymėkime $\nu_{q,m} := \nu_{q,m,1}$. Mums bus reikalingos momentų $E(\nu_{q,m})^{\mu}, \mu \in N$ asimptotikos.

Teiginys 3.1. *Tegul stebiniai X_1, ..., X_N yra nepriklausomi, pasiskirstę pagal dėsnį (1.4) atsitiktiniai dydžiai. Tegul $\mu \in N$ ir $m = m(N) \to \infty$, kai $N \to \infty$. Tegul $q = q(N) \to \infty$,* kai $N \to \infty$. Tada

ISSN 1648-8776
JAUNŲJŲ MOKSLININKŲ DARBAI. Nr. 1 (30). 2011

$$E(\nu_{q,m})^{\mu}-\frac{\alpha}{\alpha+\mu}\sim-\frac{\alpha\mu}{(\alpha+\mu)(2\alpha+\mu)}m^{-1}. \qquad (3.1)$$

Įrodymas. Tegul $G_q(x)$ žymi atsitiktinio dydžio $\max\{X_1, ..., X_q\}$ pasiskirstymo funkciją. Nesunku įsitikinti, kad

$$G_q(x)=\begin{cases}0 & x<x_0,\\ (F(x))^{q} & x\geq x_0.\end{cases} \qquad (3.2)$$

Pasinaudoję vidurkio apibrėžimu, gauname, kad

$$E(\nu_{q,m})^{\mu}=m!\int_{x_0}^{\infty}\frac{dG_q(x_1)}{x_1^{\mu}}\int_{x_0}^{x_1}x_2^{\mu}dG_q(x_2)\int_{x_0}^{x_2}dG_q(x_3)...$$

$$\int_{x_0}^{x_{m-1}}dG_q(x_m).$$

Apskaičiavę paskutinius $m-2$ integralus, gauname

$$E(\nu_{q,m})^{\mu}=(m-1)m\int_{x_0}^{\infty}x^{-\mu}dG_q(x)\int_{x_0}^{x}y^{\mu}(G_q(y))^{m-2}dG_q(y).$$

Integruokime vidinį integralą dalimis. Tada

$$E(\widetilde{\nu}_{r,1})^{\mu}=m\int_{x_0}^{\infty}(G_q(x))^{m-1}dG_q(x)-\mu m\int_{x_0}^{\infty}x^{-\mu}$$

$\left\{\int_{x_0}^{x}y^{\mu-1}(G_q(y))^{m-1}dy\right\}dG_q(x)$. Nesunku įsitikinti, kad

paskutinės lygybės dešinėje pusėje esantis pirmasis dėmuo yra lygus 1. Tuo tarpu, antrajame dėmenyje pakeitę integravimo tvarką, gauname

$$E(\nu_{q,m})^{\mu}=1-\mu m\int_{x_0}^{\infty}y^{\mu-1}(G_q(y))^{m-1}dy\left\{\int_{y}^{\infty}x^{-\mu}p_q(x)dx\right\}$$

$=:1-K_{q,m,1}$, čia $p(x)=\alpha q x_0^{\alpha}x^{-\alpha-1}G_{q-1}(x)$, $x\geq x_0$, žymi pasiskirstymo funkcijos $G_q(x)$ tankio funkciją. Vidiniam $K_{q,m,1}$ integralui taikydami integravimą dalimis, gauname

$$K_{q,m,1}=\frac{\mu}{\alpha+\mu}+K_{q,m,2}, \qquad (3.3)$$

kur pažymėta

$$K_{q,m,1}=\frac{\alpha^2 q(q-1)x_0^{2\alpha}\mu m}{\alpha+\mu}\int_{x_0}^{\infty}y^{\mu-1}(G_q(y)^{m-1}$$

$\left\{\int_{y}^{\infty}x^{-\mu-2\alpha-1}G_{q-2}(x)dx\right\}dy$. Integruodami dalimis $K_{q,m,1}$

vidinį integralą, gauname

$$K_{q,m,2}=K_{q,m,3}+K_{q,m,4}, \qquad (3.4)$$

Kur:

$$K_{q,m,3}=\frac{\alpha^2 q(q-1)x_0^{2\alpha}\mu m}{(\alpha+\mu)(2\alpha+\mu)}\int_{x_0}^{\infty}y^{-2\alpha-1}(1-x_0^{\alpha}x^{-\alpha})^{qm-2}dx,$$

$$K_{q,m,4}=\frac{\alpha^3 q(q-1)x_0^{3\alpha}\mu m}{(\alpha+\mu)(2\alpha+\mu)}\int_{x_0}^{\infty}y^{\mu-1}(G_q(y))^{m-1}$$

$$\left\{\int_{y}^{\infty}x^{-\mu-3\alpha-1}G_{q-3}(x)dx\right\}dy.$$

Atlikę integravimo kintamojo pakeitimą $z=x_0^{\alpha}x^{-\alpha}$, gauname:

$$K_{q,m,3}=\frac{\alpha(q-1)\mu}{(\alpha+\mu)(2\alpha+\mu)(qm-1)}.$$

Kadangi $q\to\infty$ ir $m\to\infty$, tai iš paskutinės lygybės gauname

$$K_{q,m,3}\sim\frac{\alpha\mu}{(\alpha+\mu)(2\alpha+\mu)m}. \qquad (3.5)$$

Atsižvelgiant į (3.3)–(3.4) ir (3.5), tvirtinimas (3.1) bus įrodytas, jei parodysime, kad liekamasis narys $K_{q,m,4}$ tenkina asimptotinį sąryšį

$$K_{q,m,4}=o(m^{-1}),\ (q\to\infty\ m\to\infty). \qquad (3.6)$$

Pasinaudoję pasiskirstymo funkcijos aprėžtumu, gauname

$$mK_{q,m,4}\leq Cq(q-1)(q-2)m^2\int_{x_0}^{\infty}y^{\mu-1}(G_q(y))^{m-1}\left\{\int_{y}^{\infty}x^{-\mu-3\alpha-1}dx\right\}dy$$

$$\leq Cq(q-1)(q-2)m^2\int_0^1 z^2(1-z)^{q(m-1)}dz\leq\frac{C}{m},$$

o iš čia, perėjus prie ribos kai $q\to\infty$ ir $m\to\infty$, išplaukia (3.6). Teiginio įrodymo pabaiga.

Sekdami V. Paulausku ir M. Vaičiuliu (2010a), įverčio $\hat{\alpha}_{q,m}$ asimptotinį normalumą (1.7) įrodysime taikydami trijų pakopų procedūrą. Pirmiausia įrodysime, kad (atitinkamai normuotas) skirtumas $\hat{p}_{q,m}-E_{\hat{p}_{q,m}}$ yra asimptotiškai normalus. Taikydami ši rezultatą, parodysime, kad įverčio $\hat{p}_{q,m}$ ribinis dėsnis yra normalus, ir pagaliau įrodysime įverčio $\hat{\alpha}_{q,m}$ asimptotinį normalumą.

Taikydami (1.2), gauname lygybę

$$\frac{\sqrt{r}(\hat{p}_{q,m}-E_{\hat{p}_{q,m}})}{\left(E(\nu_{q,m}-E_{\nu_{q,m}})^2\right)^{1/2}}=\sum_{j=1}^{r}K_{q,m,j},$$

$$K_{q,m,j}:=\frac{\nu_{q,m,k}-E_{\nu_{q,m,k}}}{\sqrt{r}\left(E(\nu_{q,m}-E_{\nu_{q,m}})^2\right)^{1/2}}.$$

Atsitiktiniai dydžiai $K_{q,m,1}, ..., K_{q,m,r}$, $q=2, 3, ...,$ m, $m=2, 3, ...$ yra nepriklausomi. Be to, $E_{K_{q,m,j}}=0$, $\sum_{j=1}^{r}VarK_{q,m,j}=1$. Vadinasi, kad įrodytume sąryšį

$$\frac{\sqrt{r}(\hat{p}_{q,m}-E_{\hat{p}_{q,m}})}{\left(E(\nu_{q,m}-E_{\nu_{q,m}})^2\right)^{1/2}} \Rightarrow N(0,1),\ N\to\infty, \tag{3.7}$$

pakanka parodyti, kad jis yra ketvirtos eilės Liapunovo trupmena $L_4=\sum_{j=1}^{r}E(K_{q,m,j})^4$, kuri artėja į nulį, kai $N\to\infty$. Atsitiktiniai dydžiai $K_{q,m,1},\dots,K_{q,m,r}$, $q=2, 3, \dots,\ m=2, 3, \dots$ yra ne tik nepriklausomi, bet ir vienodai pasiskirstę, todėl $L_4=\frac{E(\nu_{q,m}-E_{\nu_{q,m}})^4}{r(Var(\nu_{q,m}))^2}$.

Pasinaudoję lygybėmis

$$E(\nu_{q,m}-E_{\nu_{q,m}})^2=E(\nu_{q,m})^2-(E_{\nu_{q,m}})^2,$$

$$E(\nu_{q,m}-E_{\nu_{q,m}})^4=E(\nu_{q,m})^4-4E(\nu_{q,m})^3E(\nu_{q,m})+$$
$$+6E(\nu_{q,m})^2(E_{\nu_{q,m}})^2-3(E_{\nu_{q,m}})^4$$

bei 3.1 teiginiu, gauname:

$$Var(\nu_{q,m})\sim\sigma^2 \tag{3.8}$$

$$E(\nu_{q,m}-E_{\nu_{q,m}})^4\sim\frac{3\alpha(3\alpha^2-\alpha+2)}{(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)^4},$$
$$q,m\to\infty. \tag{3.9}$$

Iš prielaidos (1.6) išplaukia, kad $r\to\infty$, kai $N\to\infty$. Iš čia bei iš (3.8)–(3.9) seka, kad $L_4\to\infty$, kai $N\to\infty$. Kombinuodami (3.8) ir (3.10), gauname

$$\sqrt{r}(\hat{p}_{q,m}-E_{\hat{p}_{q,m}})\Rightarrow \mathrm{N}(0,\sigma^2),\ N\to\infty. \tag{3.10}$$

Pastebėkime, kad yra teisinga lygybė $\sqrt{r}(\hat{p}_{q,m}-E_{\hat{p}_{q,m}})\Rightarrow\sqrt{r}(\hat{p}_{q,m}-p)+\sqrt{r}(p-E_{\nu_{q,m}})$. Pasinaudoję (1.6) ir asimptotika (3.1) su $\mu=1$ gauname, kad $\sqrt{r}(p-E_{\nu_{q,m}})\to\lambda\mu$. Taigi, iš paskutinio sąryšio ir iš (3.10) išplaukia

$$\sqrt{r}(\hat{p}_{q,m}-p)\to\mathrm{N}(\lambda\mu,\sigma^2),\ N\to\infty. \tag{3.11}$$

Kadangi $\sqrt{r}\to\infty$, kai $N\to\infty$, tai iš (3.11) išplaukia, kad skirtumas $\hat{p}_{q.m}-p$ artėja į nulį pagal tikimybę. Todėl yra teisingas sąryšis

$$\sqrt{r}(\hat{p}_{q,m}-p),(\hat{p}_{q,m}-p)\to(\mathrm{N}(\lambda\mu,\sigma^2),0),$$
$$N\to\infty. \tag{3.12}$$

Žr. 4.4 teoremą P. Billingsley (1968) monografijoje. Pasinaudoję įverčio $\hat{\alpha}_{q,m}$ išraiška per įvertį $\hat{p}_{q,m}$, gauname lygybę

$$\sqrt{r}(\hat{\alpha}_{q,m}-\alpha)=\frac{\sqrt{r}(\hat{p}_{q,m}-p)}{(1-p)^2-(1-p)(p-\hat{p}_{q,m})}.$$

Taikydami tolydaus atvaizdavimo teoremą, iš paskutinės lygybės ir (3.12) gauname (1.7).

Dabar įrodykime (1.8). Nesunku įsitikinti, kad kai agregavimo eilė q yra fiksuota, tai atsitiktinio dydžio $\max\{X_1,\dots,X_q\}$ skirstinio $G_q(x)$ uodega tenkina taip vadinamą antros eilės asimptotinį sąryšį $1-G_q(x)=qx_0^{\alpha}x^{-\alpha}-\frac{q(q-1)}{2}x_0^{2\alpha}x^{-2\alpha}+o(x^{-2\alpha})$, kai $x\to\infty$. Kad gautume (1.8), lieka pasinaudoti 2 teorema, aprašyta V. Paulausko ir M. Vaičiulio (2010a) straipsnyje.

Literatūra

1. Billingsley P., 1968, *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York.
2. Crovella M., Taqqu M., Bestavros A., 1998, Heavy Tailed Probability Distributions in the WWW. In R. Adler, R. Feldman, M. Taqqu: *A Practical Guide to Heavy Tails Statistical Techniques and Applications,* Birkhuser.
3. Davydov Yu., Paulauskas V., Račkauskas A., 2000, More on P-stable convex sets in Banach spaces. *Journal of Theoretical Prob.* No. 13 (1). P. 39–64.
4. De Haan L., Peng L., 1998, Comparison of tail index estimators. *Statist. Nederlandica.* No. 52. P. 60–70.
5. Gomes M. I., Castro L., Fraga M. I., Pestana A., Pestana D., 2008, Statistics of extremes for iid data and breakthroughs in the estimation of extreme value index: Laurens de Haan leading contribution. *Extremes.* No. 11 (1). P. 3–34.
6. Markovich N., 2007, *Nonparametric Analysis of Univariate Heavy-Tailed Data.* Jon Wiley & Sons, Chichester.
7. Munoz-Rodriguez D. et al., 2006, Heavy tailed network delay: an alpha-stable. *Computacin y Sistemas.* No. 10 (1). P. 16–27.
8. Park K., Willinger W., 2000, *Self-similar Network Traffic and Performance Evaluation.* John Wiley and Sons. Chichester, England.
9. Paulauskas V., 2003, A New Estimator for a Tail Index. *Acta Appl. Math.* No. 79. P. 55–67.
10. Paulauskas V., Vaičiulis M., 2010a, On several modifications of DPR estimator of the tail index, *to appear in Lith. Math. J.*
11. Paulauskas V., Vaičiulis M., 2010b, Once more on comparison of tail index estimators, *to appear in Stat. Neer.*
12. Qi Y., 2010, On the tail index of a heavy tailed distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.* No. 62 (2). P. 277–289.

MAX-DPR ESTIMATION OF DISTRIBUTION TAIL INDEX

Marijus Vaičiulis, Liudvikas Kaklauskas

Summary

In this paper we introduce a so-called max-DPR tail index estimator. This estimator is based on the combination of well-known distribution DPR tail index and max-aggregation of observations. The asymptotic normality of max-DPR estimator is analyzed with the following conditions: (i) aggregation order is fixed and (ii) aggregation order tends to infinity together with number of observations. It is proven that under fixed aggregation order max-DPR estimator has lesser minimal asymptotic mean squared error.

Keywords: DPR tail index, tail index, aggregation, max-aggregation.

SKIRSTINIO UODEGOS INDEKSO MAX-DPR ĮVERTIS

Liudvikas Kaklauskas, Marijus Vaičiulis

Santrauka

Šiame straipsnyje pasiūlėme naują skirstinio uodegos indekso įvertį, kuri pavadinome max-DPR. Šis įvertis sukonstruotas kombinuojant gerai žinomą DPR skirstinio uodegos indekso įvertį su stebinių max-agregavimu. Max-DPR įverčio asimptotinis normalumas įrodytas, kai (i) max-agregavimo eilė yra fiksuota ir kai (ii) max-agregavimo eilė tolsta į begalybę kartu su stebinių skaičiumi. Įrodyta, kad max-DPR įverčio minimalus asimptotinis vidutinis kvadratinis nuokrypis yra mažesnis, kai max-agregavimo eilė yra fiksuota.

Prasminiai žodžiai: DPR uodegos indeksas, uodegos indeksas, agregavimas, max-agregavimas.

Įteikta 2011-03-03