VIENOS IŠSIGIMSTANČIOS DALINIŲ IŠVESTINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDINIŲ STRUKTŪRA

Ingrida Vaičiulytė
Šiaulių universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas

Daugelis diferencialinėmis lygtimis modeliuojamų uždavinių yra tiek sudėtingi, kad jų neįmanoma išspręsti analizės būdu, t. y. pateikti tiriamojo vyksmo dėsnį matematinės formulės pavidalu. Diferencialinių lygčių sprendimą papildomai apsunkina ir jų išsigimimas. Skiriami mažiausiai du išsigimimo variantai: *diferencialinės lygties eilės išsigimimas* ir *diferencialinės lygties tipo išsigimimas* (tarkime, iš pirmos eilės diferencialinės lygties gauname algebrinę lygtį arba antros eilės diferencialinė lygtis virsta pirmos eilės diferencialine lygtimi, antruoju atveju, tam tikroje srityje diferencialinė lygtis yra elipsinė diferencialinė lygtis, o kitoje srityje, pavyzdžiui, parabolinė). [1]

Tikslas – išnagrinėti išsigimstančią keturių tiesinių pirmos eilės diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemą:

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{\partial u_4}{\partial y}-\dfrac{\partial u_3}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4}a_{1j}(x,y,z)u_j=0, \\ x\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+\dfrac{\partial u_3}{\partial y}+a\dfrac{\partial u_4}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4}a_{2j}(x,y,z)u_j=0, \\ x\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x}-\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+a\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4}a_{3j}(x,y,z)u_j=0, \\ x\left(-\dfrac{\partial u_4}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4}a_{4j}(x,y,z)u_j=0 \end{cases} \quad (1)$$

Uždaviniai. Sprendžiant šią sistemą, būtina supaprastinti užrašymus bei, siekiant rezultatus pateikti trumpai ir aiškiai, taikyti matricų teoriją [2, 3]. Tiriant dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą, ji užrašoma matricine dalinių išvestinių diferencialine lygtimi:

$$x\cdot\left(l_1\frac{\partial u}{\partial x}+l_2\frac{\partial u}{\partial y}+l_3\frac{\partial u}{\partial z}\right)+A(x,y,z)u(x,y,z)=0. \quad (2)$$

Matricinė dalinių išvestinių diferencialinė lygtis (2) sprendžiama apibendrintu laipsninių eilučių metodu, t. y. ieškomąją funkciją u(x,y,z) dėstant nepriklausomųjų kintamųjų x, y arba z apibendrintomis laipsninėmis eilutėmis:

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,lnx), \quad (3)$$

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}u_k(x,z), \quad (4)$$

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}u_k(x,y). \quad (5)$$

Ieškosime nagrinėjamos dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinių analizinių visur, išskyrus galbūt išsigimimo taškus, ir tirsime jų elgseną išsigimimo taškų aplinkoje. (1) sistemą nagrinėsime policilindre P: $|x| < r_1, |y| < r_2, |z| < r_3.$

Jeigu (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientams galioja dėstinys laipsnine eilute

$$A(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kA_k(y,z), \quad (6)$$

tai galima įrodyti, kad ši matricinė dalinių išvestinių diferencialinė lygtis turi vieną sprendinių šeimą, kuri išreiškiama (3) laipsnine eilute ir kiekvienas šeimos atstovas priklauso nuo vienos laisvai parinktos analizinės kintamųjų y ir z funkcijos. Visi šios eilutės koeficientai vienareikšmiškai nustatomi iš lygybės

$$u_k=-e^{-alnx}\cdot\int(l_1)^{-1}e^{alnx}\cdot\left[lnx\cdot u_{k-1}\left(l_2\frac{\partial\rho}{\partial y}+l_3\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+l_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+l_3\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l\right]dlnx \quad (7)$$

pagal laisvai pasirinktą $u_0(y,z)$, kuris yra analizinė nepriklausomų kintamųjų y ir z funkcija, ρ(y,z) – funkcija, randama iš lygties

$$det(l_1\rho(y,z)+A_0(y,z))=0.$$

Jeigu (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendinių koeficientams galioja dėstinys nepriklausomo kintamojo y laipsnių eilute

$$A(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}y^kA_k(x,z), \quad (8)$$

tai galima įrodyti, kad ši matricinė diferencialinė lygtis turi vieną sprendinių šeimą, išreiškiamą tokia laipsnine eilute:

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}y^ku_k(x,z) \quad (9)$$

ir kiekvienas šios šeimos sprendinys priklauso nuo vienos laisvai parinktos analizinės kintamųjų x ir z funkcijos.

Gaunama tokia rekurentinė formulė:

$$u_k(x,z) = -\frac{1}{k}(l_2)^{-1}\left[x\left(l_1\frac{\partial u_{k-1}(x,z)}{\partial x} + l_3\frac{\partial u_{k-1}(x,z)}{\partial z}\right) + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l(x,z)\right], \tag{10}$$

iš kurios visi (9) laipsninės eilutės koeficientai vienareikšmiškai nustatomi pagal laisvai pasirinktą $u_0(x, z)$, kuris gali būti parinktas taip, kad jis būtų bet kuri analizinė kintamųjų x ir z funkcija.

Trečiuoju atveju nagrinėsime (2) matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį ir jos sprendinių struktūrą nepriklausomo kintamojo z atžvilgiu. Šiuo atveju, kada α = 0, (2) matricinė diferencialinė lygtis turi be galo daug atskirųjų sprendinių šeimų, išreiškiamų tokiu pavidalu

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+\rho}u_k(x,z), \tag{11}$$

čia ρ – bet koks realusis skaičius, o eilutės koeficientai randami iš formulės

$$u_k(x,z) = -\frac{1}{k+\rho}(l_3)^{-1}\left[x\left(l_1\frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial x} + l_2\frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial y}\right) + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l(x,y)\right]. \tag{12}$$

Čia $u_0(x, y)$ laisvai parenkamas vektorius stulpelis ir jo struktūra tokia

$(u_{01}(x, y), 0, 0, u_{04}(x, y))$,

čia $u_{01}(x, y)$, $u_{04}(x, y)$ – laisvai parenkamos analizinės tik nepriklausomų kintamųjų x ir y funkcijos.

Jeigu α ≠ 0, tai (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai išreiškiami tokiu pavidalu:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k u_k(x,y), \tag{13}$$

eilutės koeficientai randami iš formulės:

$$u_k(x,y) = -\frac{1}{k}(l_3)^{-1}\left[x\left(l_1\frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial x} + l_3\frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial y}\right) + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l(x,y)\right], \tag{14}$$

kur $u_0(y, z)$ – laisvai parenkamas vektorius stulpelis.

Ištirsime į (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos formalius sprendinius įeinančių laipsninių eilučių konvergavimą. Tai atliksime mažorantų metodu [4].

Matematinės indukcijos metodu įrodę, kad (7), (10) ir (12) lygybėms galioja toks įvertis

$$u_k(y, z, lnx)| < M^k|y|^{-k}|z|^{-k}|lnx^k|, \tag{15}$$
$k = 1, 2, 3, \ldots$

gausime, kad (3) laipsninė eilutė konverguoja absoliučiai ir tolygiai policilindre

$$|x| < \frac{r_2 r_3 \varepsilon}{M}, |y| < r_2, |z| < r_3. \tag{16}$$

Laipsninė eilutė (4) konverguoja absoliučiai ir tolygiai policilindre:

$$|x| < r_1, |y| < \frac{r_2 r_3 \varepsilon}{N}, \ |z| < r_3, N \geq r_1 r_3 \varepsilon, \tag{17}$$

o laipsninė eilutė (5) konverguoja absoliučiai ir tolygiai policilindre

$$|x| < r_1, |y| < r_2, \ |z| < \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{K}, K \geq r_1 r_2 \varepsilon, \tag{18}$$

Visa tai galima suformuluoti kaip teoremą.

Darbo rezultatą suformuluosime kaip teoremą.

Teorema. Jeigu α = 0, tai (1) sistemos sprendiniai srityje $|x| < r_1, |y| < r_2, \ |z| < \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{K}, K \geq r_1 r_2 \varepsilon,$ yra

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+\rho}u_k(x,y),$$

čia ρ – bet koks realusis skaičius;
jeigu α ≠ 0, tai (1) sistemos sprendiniai toje pačioje srityje yra

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k u_k(x,y),$$

jeigu α – bet kuris realusis skaičius, tai (1) sistemos sprendiniai srityje $|x| < \frac{r_2 r_3 \varepsilon}{M}, |y| < r_2, |z| < r_3$ yra

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,lnx),$$

čia ρ(y, z) – funkcija, randama iš lygties $det(l_1\rho(y, z) + A_0(y, z)) = 0$,
o srityje $|x| < r_1, |y| < \frac{r_2 r_3 \varepsilon}{N}, |z| < r_3$, yra

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k u_k(x,z),$$

Literatūra

1. Vaičiulytė I., 2009, Vienos išsigimstančios dalinių išvestinių sistemos sprendinių struktūra. *Magistro darbas*. Šiaulių universitetas.
2. Kvedaras B., 1999, *Matricų teorija*. I dalis. Kaunas.
3. Kvedaras B., 2000, *Matricų teorija*. II dalis. Vilnius.
4. Янушаускас А. И., 1979, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*. Новосибирск: Наука СО.

THE STRUCTURE OF THE SOLUTIONS OF ONE SYSTEM OF DEGENERATE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARTIAL DERIVATIVES

Ingrida Vaičiulytė

Summary

In this work the system of four degenerate differential equations with partial first-order derivatives was studied. For the solution of the system of differential equations with partial derivatives the generalized power series method was applied. Power series convergence included in the solution of the system was proved. Acting in this system, matrix theory was used for simplified recording and presenting the results briefly and clearly. Analytical solutions of this system were found and properties of solutions of neighbourhood of points of degeneration manifold were investigated.

The generalized power series method can be applied to the solution of systems of differential equations with partial derivatives of similar structure, the order of which is degenerating. The results that were obtained in this work can be applied to modelling and studying the real processes.

Keywords: partial derivative, system of differential equations, power series.

VIENOS IŠSIGIMSTANČIOS DALINIŲ IŠVESTINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDINIŲ STRUKTŪRA

Ingrida Vaičiulytė

Santrauka

Straipsnyje išnagrinėta išsigimstanti keturių pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema. Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemai spręsti taikytas apibendrintų laipsninių eilučių metodas. Rasti analiziniai šios sistemos sprendiniai ir ištirtos jų savybės išsigimimo daugdaros taškų aplinkoje.

Apibendrintų laipsninių eilučių metodas gali būti pritaikytas sprendžiant panašios struktūros dalinių išvestinių diferencialines lygtis, kurių eilė išsigimsta. Rezultatai gali būti pritaikomi realiems procesams modeliuoti ir tirti.

Prasminiai žodžiai: dalinė išvestinė, diferencialinių lygčių sistema, laipsninė eilutė.

Įteikta 2009-08-24