

## SKRITULINIO SKERSPJŪVIO STRYPO TAMPRIAI PLASTINIO GRYNOJO LENKIMO TYRIMAS

Algis Paulauskas, Sergėjus Rimovskis, Artūras Sabaliauskas

Šiaulių universitetas, Technologijos fakultetas

### Įvadas

Dauguma mašinų ir mechanizmų detalių (pvz., ašys, velenai) eksploatacijos metu veikiamos lenkimu arba lenkimu ir sukimu. Esant trumpalaikėms perkrovoms, ypač paleidžiant ir stabdant įrengimus, šiose detalėse gali atsirasti tampriai plastinis įtempių-deformacijų būvis. Kadangi tokios perkrovos dažniausiai periodiškai kartojasi, detalės ar jų atskiri elementai patiria ciklinį tampriai plastinį deformavimą (mažaciklį deformavimą). Tačiau mažaciklio deformavimo tyrimas neįmanomas be detalaus statinio tampriai plastinio deformavimo, mūsų atveju – grynojo lenkimo, tyrimo. Esant grynajam lenkimui, elemento skerspjūvyje atsiranda norminiai tempimo ir gniuždymo įtempiai. Didžiausios įtempių reikšmės fiksuojamos lenkiamos detalės paviršiaus taškuose, kurie yra labiausiai nutolę nuo įtempių neutraliojo sluoksnio.

Analitiniuose tampriai plastinio deformavimo skaičiavimuose sudėtinga naudoti kreivalinijines deformavimo diagramos formas. Tokių diagramų matematinės išraiškos yra sudėtingos, todėl statinio tempimo ir gniuždymo diagramų plastinės dedamosios aproksimuojamos. Dažniausiai taikoma tiesinė arba laipsninė aproksimacija. Lenkimas už proporcingumo ribų labai išsamiai aprašomas T. X. Yu knygoje [1]. Autorius pateikia daug teorinės medžiagos ir eksperimentų duomenų, tačiau joje plastinis lenkimas labiau nagrinėjamas lakštinių detalių formavimo aspektu, daug dėmesio skiriant liekamosioms deformacijoms.

Lenkiamų strypų skaičiavimas, kai tiek tempiamos, tiek gniuždomos kreivės charakteristikos vienodos, yra paprasčiausias. Tačiau beveik kiekvienos medžiagos tiek proporcingumo ribos, tiek ir sustiprėjimas tempimo ir gniuždymo atvejais yra skirtingi. Tai įvertino M. Daunys, atlikdamas teorinius stačiakampio skerspjūvio strypo, apkrauto statiniu ir cikliniu tampriai plastiniu grynoju lenkimu, tyrimus [2]. Šiame darbe pateikiami skaičiavimai, leidžiantys nustatyti įtempių neutralaus sluoksnio poslinkio ir lenkimo momento priklausomybes nuo didžiausios deformacijos. Skaičiavimams taikyta tiesinė deformavimo kreivės plastinės dedamosios aproksimacija. Skritulinio skerspjūvio elemento statinio ir mažaciklio lenkimo skaičiavimai, taikant tiesinę aproksimaciją, taip pat nagrinėjami ir kituose moksliniuose darbuose [3–6]. Įtempių-deformacijų kreivės aproksimavimas

laipsnine funkcija aprašytas [7, 8] mokslo šaltiniuose – autoriai tyrė stačiakampio skerspjūvio strypo lenkimą.

Šiame straipsnyje pateikiami skritulinio skerspjūvio strypo statinio grynojo lenkimo, taikant laipsninę tampriai plastinės deformavimo kreivės plastinės dedamosios aproksimaciją ir įvertinant medžiagos deformavimo tempimu ir gniuždymu charakteristikų skirtumus, analitiniai tyrimai. Analitinių tyrimų duomenys palyginami su eksperimentų rezultatais. Eksperimentams pasirinktas mašinų ir įrengimų detalių gamyboje plačiai naudojamas plienas 45.

### Skritulinio skerspjūvio strypo tampriai plastinio grynojo lenkimo skaičiavimai

Kaip rodo bandymai [1, 2, 9], plokščių pjūvių hipotezė lenkiamiems strypams tinka ir tada, kai įtempių reikšmės žymiai viršija proporcingumo ribą. Taigi, deformacijų pasiskirstymo strypo išilginiame pjūvyje vaizdas bus toks, kaip parodyta 1 pav. Įtempių pasiskirstymas išilginiame pjūvyje parodytas 2 pav. (a), o tamprus ir plastinio deformavimo zonos skersiniame pjūvyje – 2 pav. (b). Šiose schemose deformacijos  $e$  ir įtempiai  $\sigma$  išreiškiami santykiniais vienetais ir žymimi brūkšneliu virš simbolio:

$$\bar{e} = e/e_{pr}, \quad (1)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_{pr}, \quad (2)$$

čia:  $e_{pr}$  ir  $\sigma_{pr}$  – atitinkamai proporcingumo ribos deformacija ir įtempis.

Indeksu 1 žymimos visos apkrovimo tipo charakteristikos (tempimas arba gniuždymas), kurio proporcingumo riba yra mažesnė ( $e_{pr2} > e_{pr1}$  ir  $\sigma_{pr2} > \sigma_{pr1}$ ). Tamprumo modulis  $E$  tempimo ir gniuždymo atvejais yra vienodas, o statinio deformavimo kreivių plastinių dalių sustiprėjimai įvertinti laipsnio rodikliais  $m_1$  ir  $m_2$ . Kaip matyti iš 1 ir 2 pav., atstumas  $y$  gali būti išreikšiamas santykinio dydžiu  $\eta$ :

$$\eta = y/2R. \quad (3)$$

čia:  $R$  – strypo skerspjūvio spindulys. Sluoksnio  $d\eta = dy/2R$  plotis  $b$  apskaičiuojamas lygybe:

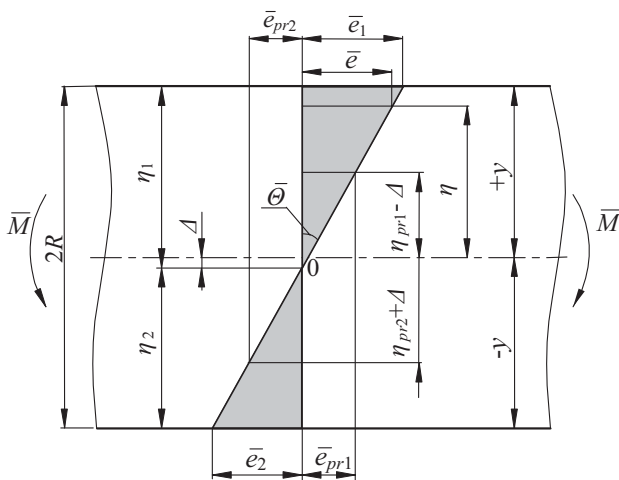
$$b = \sqrt{1 - 4\eta^2}. \quad (4)$$

Tada skritulinio skerspjūvio strypui galima užrašyti norminių įtempimų pusiausvyros ir lenkimo momento lygybes [4]:

$$\int_{-0,5}^{+0,5} \bar{\sigma} \sqrt{1 - 4\eta^2} d\eta = 0, \quad (5)$$

$$\bar{M} = \frac{32}{\pi} \int_{-0,5}^{0,5} \bar{\sigma} \eta \sqrt{1 - 4\eta^2} d\eta. \quad (6)$$

Lenkimo momentas (6) lygybėje išreiškiamas santykiniu dydžiu, t. y.:



1 pav. Deformacijų pasiskirstymo lenkiamo strypo išilginiame pjūvyje schema

$$\bar{M} = \frac{M}{M_{pr1}}. \quad (7)$$

Toliau nustatomos analitinės įtempių  $\bar{\sigma}$  išraiškos. Įvertindami įtempių neutraliojo sluoksnio poslinkius nuo strypo skerspjūvio simetrijos ašies (atstumas  $\Delta$ ) plastiškai deformuojamiems strypo sluoksniams, užrašome lygybes [6]:

$$\bar{\sigma}_1 = (\bar{\Theta}(\eta + \Delta))^{m_1}, \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_2 = K \left( \frac{\bar{\Theta}}{K} (\eta + \Delta) \right)^{m_2}, \quad (9)$$

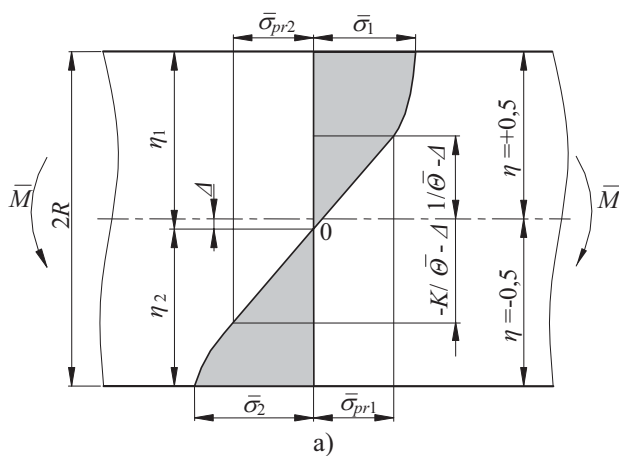
čia:  $\bar{\Theta}$  – santykinis strypo skerspjūvių pokrypių kampas ( $\bar{\Theta} = \bar{e}/\eta$ ),  $K$  – nevienodo priešimosi tampriai deformacijai koeficientas ( $K = e_{pr2}/e_{pr1}$ ).

Tampriai deformuojamiems strypo sluoksniams galioja lygybė:

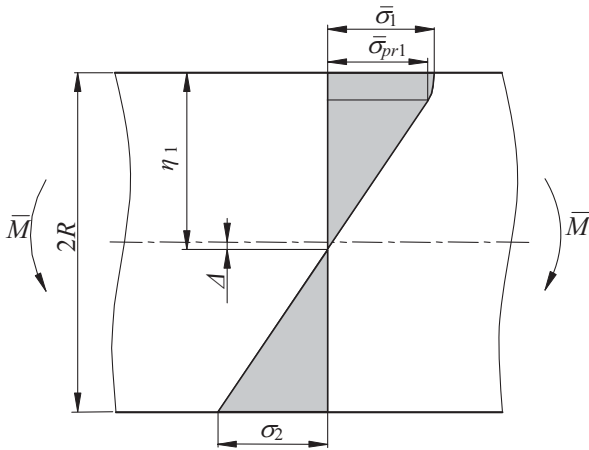
$$\bar{\sigma} = \bar{\Theta}(\eta + \Delta). \quad (10)$$

Taikant (8–10) lygybes, (5) integralą galima užrašyti taip:

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{\bar{\Theta}-\Delta}}^{0,5} (\bar{\Theta}(\eta + \Delta))^{m_1} \sqrt{1 - 4\eta^2} d\eta + \\ & + \int_{\frac{1}{\bar{\Theta}-\Delta}}^{\frac{1}{\bar{\Theta}+\Delta}} \bar{\Theta}(\eta + \Delta) \sqrt{1 - 4\eta^2} d\eta - \\ & - \int_{\frac{K}{\bar{\Theta}+\Delta}}^{0,5} K \left( \frac{\bar{\Theta}}{K} (\eta - \Delta) \right)^{m_2} \sqrt{1 - 4\eta^2} d\eta = 0. \quad (11) \end{aligned}$$



2 pav. Įtempimų pasiskirstymo lenkiamo strypo išilginiame pjūvyje schema (a) ir tamprųjų bei plastinių deformacijų zonos skersiniame pjūvyje (b)



3 pav. Įtempių pasiskirstymo lenkiamo strypo išilginiame pjūvyje schema, kai  $\bar{e}_2 < K$

3 pav. pateiktas atvejis, kai silpnesnėje strypo pusėje deformacijos viršija  $e_{pr1}$ , o priešingoje pusėje visi strypo sluoksniai deformuojami tik tampriai. Tai vyksta iki  $\bar{e}_2 < K$ . Toks deformavimas gali būti išreiškiamas integralu:

$$\int_{\frac{1}{\bar{\theta}}}^{0,5} (\bar{\theta}(\eta + \Delta))^{m_1} \sqrt{1 - 4\eta^2} d\eta + \int_{-0,5}^{\frac{1}{\bar{\theta}}} \bar{\theta}(\eta + \Delta) \sqrt{1 - 4\eta^2} d\eta = 0. \quad (12)$$

Iš 1 pav. ir 3 pav. matome, kad santykinis atstumas nuo išorinio strypo sluoksnio su įtempių reikšme  $+\sigma_1$  iki įtempių neutraliosios linijos gali būti apskaičiuojamas lygybe:

$$\eta_1 = 0,5 - \Delta. \quad (13)$$

Taikant (11) arba (12) ir (13), galima nustatyti priklausomybę  $\eta_1 = f(\bar{\theta})$ , o žinant, kad  $\bar{\theta} = 2\bar{e}_1$ , gaunama priklausomybė  $\eta_1 = f(\bar{e}_1)$ .

Analogiškai, naudodami įtempių išraiškas (8–10), perrašome (6) integralą:

$$\bar{M} = \frac{32}{\pi} \left\{ \int_{\frac{1}{\bar{\theta}}}^{0,5} (\bar{\theta}(\eta + \Delta))^{m_1} \sqrt{1 - 4\eta^2} \eta d\eta + \int_{\frac{K}{\bar{\theta} + \Delta}}^{\frac{1}{\bar{\theta}}} \bar{\theta}(\eta + \Delta) \sqrt{1 - 4\eta^2} \eta d\eta + \int_{\frac{K}{\bar{\theta} + \Delta}}^{0,5} K \left( \frac{\bar{\theta}}{K} (\eta - \Delta) \right)^{m_2} \sqrt{1 - 4\eta^2} \eta d\eta \right\}. \quad (14)$$

Jei  $\bar{e}_2 < K$  (14) integralas užrašomas paprasčiau:

$$\bar{M} = \frac{32}{\pi} \left\{ \int_{\frac{1}{\bar{\theta}}}^{0,5} (\bar{\theta}(\eta + \Delta))^{m_1} \sqrt{1 - 4\eta^2} \eta d\eta + \int_{-0,5}^{\frac{1}{\bar{\theta}}} \bar{\theta}(\eta + \Delta) \sqrt{1 - 4\eta^2} \eta d\eta \right\}. \quad (15)$$

Gautais integralais galima apskaičiuoti skritulinio skerspjūvio strypo, apkrauto tampriai plastiniu grynuoju lenkimu, santykinio momento  $\bar{M}$  reikšmę, taip pat kampą  $\bar{\theta}$ , arba jį atitinkančią maksimalią deformaciją  $\bar{e}$ . Prieš tai (13) lygybe reikia įvertinti šią deformaciją atitinkantį poslinkį  $\Delta$ .

4 ir 5 pav. pateiktos teorinės  $\eta_1 = f(\bar{e})$  ir  $\bar{M} = f(\bar{e})$  kreivės iki  $\bar{e} = 9$ , esant tokioms  $K$  ir  $m$  reikšmėms:  $K = 1,0$ ;  $K = 1,1$ ;  $m = 0,1$ ;  $m = 0,2$ ;  $m = 0,3$ ;  $m = 0,4$ .

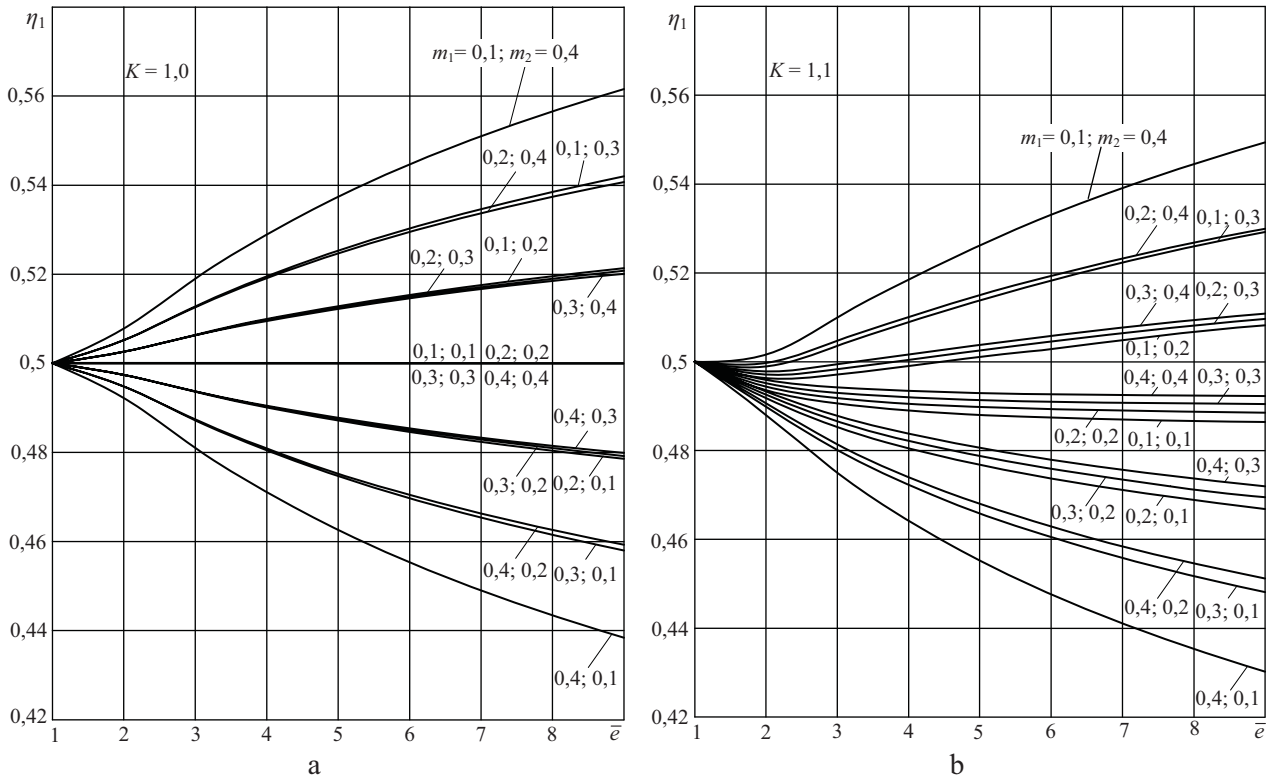
Pateiktos priklausomybės gali būti pritaikytos ir cikliniam tampriai plastinio grynojo lenkimo analitiniam tyrimui. Šiuo atveju visose lygybėse deformacijos  $\bar{e}$  ir įtempiai  $\bar{\sigma}$  turi būti pakeisti santykinėmis ciklinėmis deformacijomis  $\bar{\varepsilon}$  įtempiais  $\bar{S}$ , kaip tai rekomenduojama literatūroje [9, 10].

Kaip matyti iš 4 pav., kai  $m_1 = m_2$  ir  $K = 1$ , poslinkis  $\Delta = 0$  ir  $\eta_1 = 0,5$ . Tokiu atveju lenkiamame strype, nepriklausomai nuo deformacijos dydžio, įtempių neutralusis sluoksnis visada sutampa su strypo skerspjūvio simetrijos ašimi. Taigi, tiek tempimo, tiek gniuždymo diagramos plastinę dedamąją aproksimuojant vienodu laipsnio rodikliu  $m$ , lenkimo momentas gali būti išreiškiamas taip:

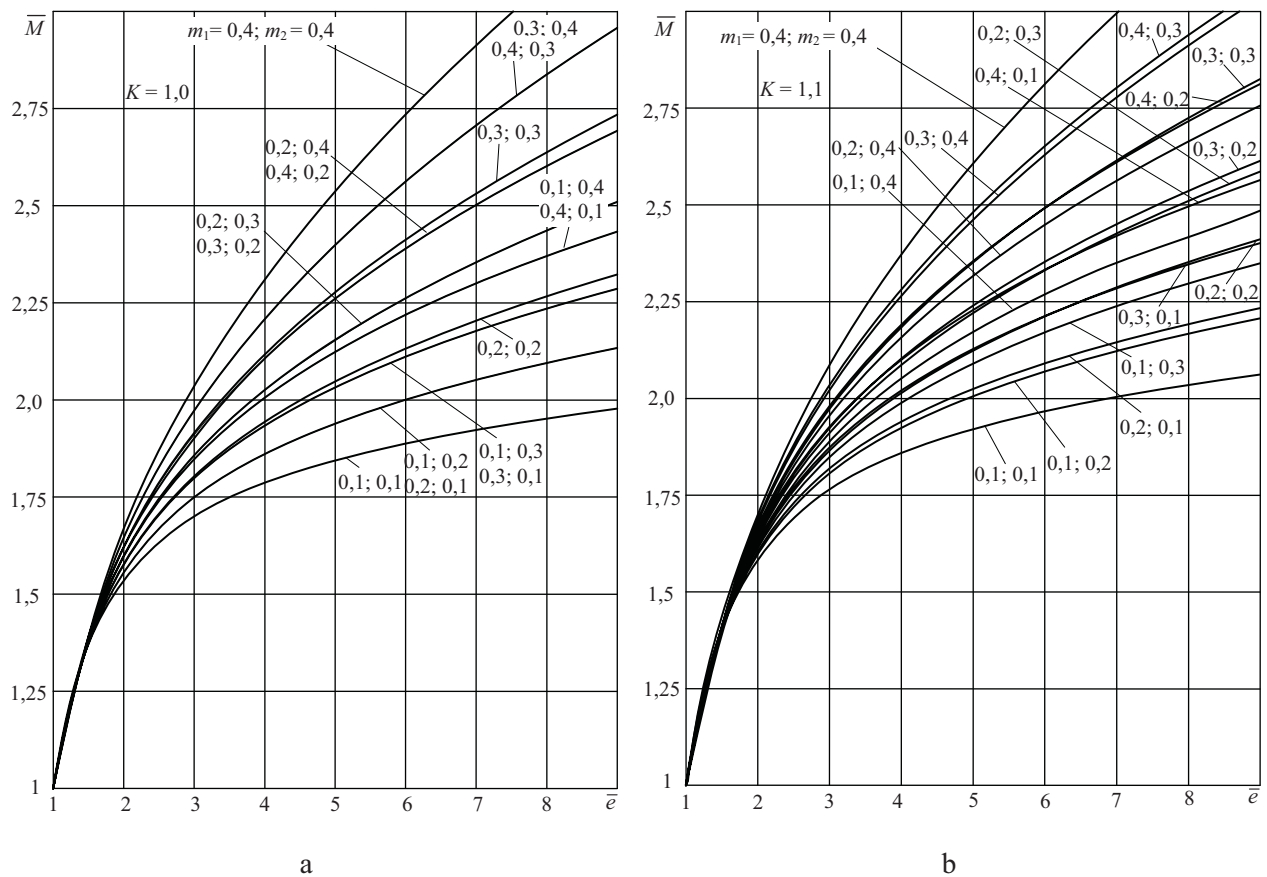
$$\bar{M} = \frac{32}{\pi} \left\{ 2 \int_{\frac{1}{\bar{\theta}}}^{0,5} (\bar{\theta} \eta)^m \sqrt{1 - 4\eta^2} \eta d\eta + \int_{\frac{1}{\bar{\theta}}}^{\frac{1}{\bar{\theta}}} \bar{\theta} \eta^2 \sqrt{1 - 4\eta^2} d\eta \right\}. \quad (16)$$

### Teorinių ir eksperimentinių duomenų palyginimas

Skritulinio skerspjūvio strypų ciklinio grynojo lenkimo eksperimentinių tyrimų metodika apibūdinta moksliniame pranešime [3].



4 pav. Santykinio atstumo nuo išorinio lenkiamo strypo sluoksniu su įtempių reikšme  $+\sigma_1$  iki įtempių neutraliosios linijos priklausomybė nuo deformacijos, kai: a)  $K = 1,0$ ; b)  $K = 1,1$



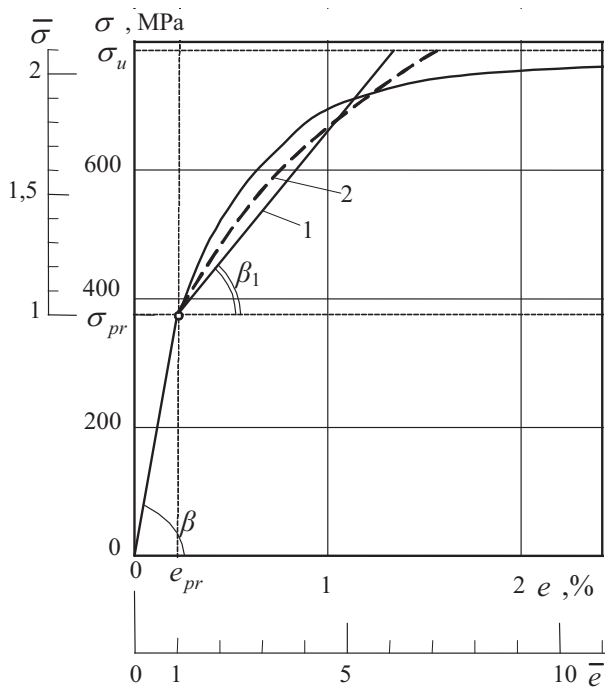
5 pav. Skritulinio skerspjūvio strypo, apkrauto grynuoju lenkimu, santykinio lenkimo momento priklausomybė nuo deformacijos, kai: a)  $K = 1,0$ ; b)  $K = 1,1$

Šiame straipsnyje pateiktos apkrovimo įrenginio ir deformacijų matavimo įtaisų schemos bei veikimas, bandinių brėžiniai, eksperimentų atlikimo sąlygos.

Eksperimentams pasirinktas detalių gamyboje plačiai naudojamas vidutinio anglingumo plienas 45. Atlikus šio plieno penkis statinio tempimo bandymus ir apskaičiavus gautų rezultatų aritmetinį vidurkį, nustatytos pagrindinės mechaninės charakteristikos, nurodytos 1 lentelėje, nubraižyta įtempių-deformacijų diagrama tikrose ir santykinėse koordinatėse (iki  $\bar{e} = 10$ ), kuri pateikta 6 pav. [6]. Naudotos statinio tempimo bandymų įrangos aprašymas pateiktas M. Daunio straipsnyje [10].

1 lentelė. *Plieno 45 mechaninės charakteristikos*

Įtempiai	$\sigma_{pr}$ , MPa	$\sigma_{0,2}$ , MPa	$\sigma_u$ , MPa
		375	544
Deformacijos	$e_{pr}$ , %	$e_{0,2}$ , %	$e_u$ , %
		0,22	0,42



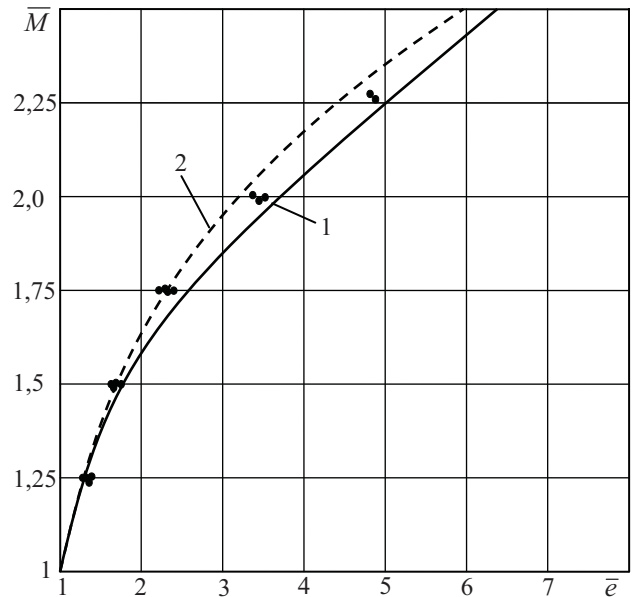
6 pav. Plieno 45 statinio tempimo diagrama

6 pav. taip pat pateiktas ir deformavimo diagramos plastinės dedamosios (iki  $\bar{e} \approx 8$ ) aproksimavimas tiesė (1) ir laipsnine funkcija (2). Nustatytas santykinis plieno 45 sustiprėjimo modulis  $G_{T1} = 0,176$  ( $G_{T1} = \beta_1/\beta$ ) ir laipsnio rodiklis  $m_1 = 0,33$ .

Lenkimo skaičiavimuose [4–6] tiek tempiamiems, tiek ir gniuždomiems strypo sluoksniams buvo taikoma ta pati sustiprėjimo modulio reikšmė

$G_{T1} = G_{T2}$ . Taikant laipsninį aproksimavimą, taip pat laikoma, kad  $m_1 = m_2$ .

Analitinės skritulinio skerspjūvio lenkiamo plieninio strypo momentų priklausomybės nuo deformacijos kreivės, taikant tiesinę ir laipsninę aproksimacijas, ir eksperimentiniai taškai (0-nio pusciklio duomenys [4]) atvaizduoti 7 pav. Kaip matyti, deformacijų ribose  $\bar{e} < 8$  ir tiesinio, ir laipsninio aproksimavimo atveju gauti geri teorinių kreivių ir eksperimentinių taškų sutapimai.



7 pav. Grynuoju lenkimu apkrauto plieno 45 skritulinio skerspjūvio strypo momentų priklausomybės nuo deformacijos eksperimentiniai taškai ir teorinės kreivės: 1 – taikant tiesinę aproksimaciją; 2 – taikant laipsninę aproksimaciją

**Išvados**

1. Nustatytos skritulinio skerspjūvio strypo statinio tempimo plastinio grynojo lenkimo analitinės priklausomybės. Naudota laipsninė įtempių-deformacijų kreivės plastinės dedamosios aproksimacija, įvertinti mechaninių medžiagos charakteristikų skirtumai tempimo ir gniuždymo atveju ( $m_1, m_2, K$ ).
2. Pateikta skaičiavimo metodika gali būti taikoma įtempių neutraliojo sluoksnio padėties pokyčiams deformavimo metu ir lenkimo momento ir didžiausios strypte atsirandančios deformacijos priklausomybei nustatyti.
3. Analitiškai apskaičiuotos momentų kreivės gerai sutapo su eksperimentiniais taškais. Pateiktos priklausomybės gali būti pritaikytos ir skritulinio skerspjūvio strypo cikliniam grynajam lenkimui tirti.

## Literatūra

1. Yu T. X., Zhang L. C., 1996, Plastic Bending: Theory and Applications. *World Scientific Publ. Singapore*. 572 pp.
2. Daunys M., 1964, Stačiakampių strypų skaičiavimas lenkimui už proporcingumo ribų. *Lietuvos TSR aukštųjų mokyklų mokslo darbai. Elektrotechnika ir mechanika*. T. 3. P. 61–69.
3. Daunys M., Rimovskis S., 2001, Mažaciklis apvalaus elementų lenkimas. *Tarp. konf. „Mechanika 2001“ pranešimų medžiaga*. Kaunas: Technologija. P. 21–26.
4. Daunys M., Rimovskis S., 2002, Analysis of circular cross-section bar, loaded by static and cyclic elastoplastic pure bending. *Mechanika*. Nr. 1 (33). ISSN 1392-1207. Kaunas: Technologija. P. 5–10.
5. Daunys M., Rimovskis S., 2002, Analysis of low-cycle loading characteristics at pure bending. *Mechanika*. Nr. 5 (37). ISSN 1392-1207. Kaunas: Technologija. P. 5–9.
6. Rimovskis S., 2003, Research of low cycles strength and durability under pure bending. *Summary of doctoral dissertation*. Kaunas: Technologija. 26 p.
7. Uzėla S., Rimovskis S., 2005, Theoretical Analysis of Rectangular Cross-Section Power-Hardening Element under Pure Bending. *Journal of Young Scientists*. Nr. 2 (6). P. 119–123.
8. Uzėla S., 2005, Stačiakampio skerspjūvio elementų tampriai plastinio grynojo lenkimo tyrimas. *Magistro darbas*. Šiauliai. 46 p.
9. Serensen S. V., Kogaev V. P., Snejderovic R. M., 1975, Bearing capacity and calculation of machine elements resistance (in Russian), *Mashinostroenie*. Moskva. 488 p.
10. Daunys M., 2005, *Ciklinis konstrukcijų stiprumas ir ilgaamžiškumas*. Kaunas: Technologija. 286 p.

## ANALYSIS OF CIRCULAR CROSS-SECTION BEAM UNDER ELASTIC-PLASTIC PURE BENDING

*Algis Paulauskas, Sergėjus Rimovskis, Artūras Sabaliauskas*

### Summary

Analysis of circular cross-section beam loaded by static elastic plastic pure bending is presented in the paper. A simple power relation of stress strain curve in the region of uniform plastic deformation is used. The derived mathematical model allows to calculate dimensionless stress neutral axis deviation from symmetry axis of an element and dimensionless pure bending moment versus monotonic strain. Theoretical curves of those parameters for different material constants were drawn. Results of theoretical analysis are compared with experimental data.

**Key words:** pure bending, elastic-power hardening.

## SKRITULINIO SKERSPJŪVIO STRYPO TAMPRIAI PLASTINIO GRYNOJO LENKIMO TYRIMAS

*Algis Paulauskas, Sergėjus Rimovskis, Artūras Sabaliauskas*

### Santrauka

Straipsnyje pateikiamas skritulinio skerspjūvio strypo, apkrauto statiniu tampriai plastiniu grynuoju lenkimu, tyrimas. Taikomas deformavimo diagramos plastinės dedamosios aproksimavimas laipsnine funkcija. Taikant pateiktą metodiką, galima nustatyti įtempių neutraliojo sluoksnio padėties pokyčių ir lenkimo momentų priklausomybes nuo didžiausių lenkiamo strypo deformacijų. Nubraižytos teorinės šių parametru kreivės, esant skirtingoms medžiagos charakteristikoms. Teorinių tyrimų duomenys lyginami su eksperimentų rezultatais.

**Prasminiai žodžiai:** grynasis lenkimas, laipsninė aproksimacija.

Įteikta 2008-04-02