ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
REGIONŲ PLĖTROS INSTITUTAS

Mindaugas Jasas

(Matematikos studijų programa, valstybinis kodas 6211AX010)

MIŠRUSIS JUNGTINIS SELBERGO KLASĖS L FUNKCIJŲ IR PERIODINIŲ HURVICO DZETA FUNKCIJŲ UNIVERSALUMAS

Magistro darbas

Darbo vadovė
prof. dr. Renata Macaitienė

Šiauliai, 2020

Turinys

ĮVADAS

Aktualumas. Nuo pirmųjų Euklido, įrodžiusio, jog pirminių skaičių yra be galo daug, darbų iki dabar matematikus (ir ne tik) domina pirminių skaičių išsidėstymo natūraliųjų skaičių aibėje problema. Remdamiesi B. Rymano (Riemann) idėjomis ir Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ savybėmis, de la Valė Pusenas ir Adamaras (nepriklausomai) įrodė, kad pirminių skaičių skaičius $\pi(x)$ turi asimptotiką:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u}(1 + o(1)), \quad x \to \infty.$$

Analogišką problemą apie pirminių skaičių pasiskirstymą aritmetinėje progresijoje $k + lm \quad (1 \leq k \leq l, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sprendė P. Dirichlė (Dirichlet) – jis nagrinėjo funkcijos

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv k (mod\ l)}} 1$$

asimptotiką, kai $(k, l) = 1$ ir $x \to \infty$. Tokio tipo bei kitiems uždaviniams spręsti prireikė naujų matematinių objektų – dzeta ir L funkcijų, kurios tam tikroje pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Čia $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ – kompleksinių skaičių seka, $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ – nemažėjanti realiųjų skaičių seka, tokia, kad $\lim_{m \to \infty} \lambda_m = +\infty$. Tokio tipo eilutę vadiname bendrąja Dirichlė eilute su koeficientais a_m ir rodikliais λ_m. Akivaizdu, jog kai $\lambda_m = \log m$, turime paprastąją Dirichlė eilutę $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}$. Vystantis mokslui pasirodė, jog tai labai naudingi, tačiau ir labai sudėtingi objektai.

Dzeta ir L funkcijų universalumo savybė yra vienas didžiausių fenomenų analizinėje skaičių teorijoje. Ši savybė reiškia, kad analizinės funkcijos gali būti aproksimuojamos duotu tikslumu dzeta arba L funkcijų postūmiais tam tikrose srityse.

1975 m. rusų matematikas S. Voroninas (Voronin) įrodė [21] Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \sigma > 1$, universalumą, t.y., jog kiekviena tolydi nelygi nuliui skritulyje $\{s \in \mathbb{C} : |s| < \frac{1}{4}\}$ funkcija ir analizinė jo viduje norimu tikslumu gali būti aproksimuojama $\zeta(s)$ postūmiais.

Voronino atradimas pasirodė gana įdomus, todėl juo susidomėjo daugelis skaičių teorijos specialistų. Buvo pastebėta, kad analogišką universalumo savybę turi ir daugelis kitų klasikinių dzeta ir L funkcijų. Be to, Voronino teorema buvo sustiprinta dviem kryptimis. Pirma, skritulys, kuriame aproksimuojama analizinė funkcija, buvo pakeistas bendresne aibe. Antra, įrodyta, jog funkcijos dzeta postūmių $\zeta(s + i\tau)$, kurie norimu tikslumu aproksimuoja duotą analizinę funkciją, yra be galo daug (apatinis tankis yra griežtai teigiamas). Šis rezultatas pateikiamas profesoriaus A. Laurinčiko monografijoje [8].

Vėliau buvo atrasta, kad dauguma kitų klasikinių dzeta ir L funkcijų taip pat yra universalios prieš tai nurodyta prasme. Išsamiai apie dzeta ir L funkcijų universalumą rašoma K. Matsumoto apžvalginiame straipsnyje [13]. Universalumo teorijos vystymąsis ir jos pritaikymas pateikiami 1.1 magistro darbo poskyryje.

Šie ir kiti pavyzdžiai rodo, jog dėmesys dzeta funkcijų universalumui motyvuoja tęsti tokio tipo tyrimus. Įvairiose šalyse (Lietuvoje, Japonijoje, Vokietijoje, Kanadoje, Pietų Korėjoje, Prancūzijoje) įsikūrusios mokslininkų grupės, tiriančios dzeta funkcijų universalumo savybes, dar kartą patvirtina apie dzeta funkcijų svarbą šiuolaikinės skaičių teorijos problemų rate.

Mokslinė problema. Praktikoje dažnai tenka aproksimuoti ir įvertinti analizinių funkcijų sistemas. Ši problema sėkmingai sprendžiama, remiantis dzeta funkcijų jungtiniu universalumu. Tačiau kur kas sudėtingesnė problema yra jungtinio universalumo nagrinėjimas, kai aproksimuojančios funkcijos yra skirtingos tam tikra prasme (plačiau apie tai 1.2 poskyryje). Tokios rūšies jungtinis universalumas vadinamas **mišriuoju jungtiniu universalumu**.

H. Mišu (Mishou) pradėjo nagrinėti jungtinį dzeta funkcijų, turinčių ir neturinčių Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius, universalumą. Jis įrodė [15] jungtinę universalumo teoremą Rymano dzeta funkcijai $\zeta(s)$ ir Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ su transcendenčiuoju parametru α. Primename, jog $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute $\zeta(s, \alpha) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$ ir analiziškai pratęsiama į visą $\mathbb{C}$, išskyrus paprastą polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Akivaizdu, jog $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$.

Mišu teorema [15]. *Tarkime, kad skaičius α yra transcendentusis, K_1, K_2 – kompaktinės juostos $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$ aibės su jungiaisiais papildiniais, funkcija $f_1(s)$ yra tolydi ir nelygi nuliui aibėje K_1 ir analizinė jos viduje, o funkcija $f_2(s)$ tolydi aibėje K_2 ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\Big\{t \in (0, T) \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{s \in K_2} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Čia meas A žymi mačios aibės $A \in \mathbb{R}$ Lebego matą.

Vėliau Mišu teorema buvo apibendrinta periodinei dzeta funkcijai ir periodinei Hurvico dzeta funkcijai, Rymano dzeta funkcijai ir naujųjų formų dzeta funkcijų rinkimui bei kitoms funkcijoms [9], [17], [19].

Magistro darbo tikslas – įrodyti mišriojo jungtinio universalumo teoremą Selbergo klasės L funkcijoms ir periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms.

Šiuo atveju įrodysime teoremą apie duotų analizinių funkcijų rinkinio vienalaikį aproksimavimą L funkcijų, turinčių Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius ir Hurvitzo tipo dzetų funkcijų, neturinčių Oilerio sandaugos, postūmiais.

Tyrimo objektas. Tam, kad suformuluotume pagrindinį magistro darbo rezultatą, pateiksime nagrinėjamų objektų – *Selbergo klasės funkcijų* ir *periodinių Hurvico dzeta funkcijų* – apibrėžimus.

1989 m. A. Selbergas (Atle Selberg) apibrėžė plačią paprastųjų Dirichlė eilučių

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \quad s = \sigma + it,$$

klasę, turinčią Oilerio sandaugą, analizinį pratęsimą, Rymano tipo funkcinę lygtį ir tenkinančią Ramanudžano hipotezę koeficientams a_m. *Šią funkcijų klasę žymėsime* $\mathcal{S}$ (išsamią informaciją apie šią klasę pateikiame 2.1 ir 2.2 poskyriuose). Magistro darbe naudojamos funkcijos iš Selbergo klasės, tenkinančios papildomą reikalavimą vidurkio kvadratui:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\le x} |a(p)|^2 = \kappa, \ \ \kappa - \text{teigiama konstanta.}$$

Tegul $\mathfrak{b} = \{b_m : \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0\}$ yra kompleksinių skaičių su minimaliu periodu $l \in N$ seka, o α, $0 < \alpha \le 1$, yra fiksuotas parametras. Tuomet *periodinė Hurvico dzeta funkcija* $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m+\alpha)^s}.$$

Kadangi koeficientai b_m yra periodiniai, tai pusplokštumėje $\sigma > 1$ galioja lygybė

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b}) = \frac{1}{l^s} \sum_{m=0}^{l-1} b_m \zeta\Big(s, \frac{m+\alpha}{l}\Big),$$

kuri duoda funkcijos $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b})$ analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastas polius su reziduumu 1.

$$b = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{l-1} b_m.$$

Jeigu $b = 0$, tai $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b})$ yra sveikoji funkcija. Kai $b_m \equiv 1$ ir $l = 1$, tuomet $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b})$ virsta Hurvico dzeta funkcija.

Magistro darbe nagrinėsime rinkinį $\zeta(s, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl})$, kur $0 < \alpha_j < 1$ ir $\mathfrak{a}_{jl} = \{a_{mjl} : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinės kompleksinių skaičių sekos su minimaliu periodu $q_{jl} \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Be to, tegul q_j yra mažiausias bendras sekos $q_{j1}, \dots, q_{jl_j}$ kartotinis ir

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j1} & a_{1j2} & \dots & a_{1jl_j} \\ a_{2j1} & a_{2j2} & \dots & a_{2jl_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q_jj1} & a_{q_jj2} & \dots & a_{q_jjl_j} \end{pmatrix}.$$

Platesnę informaciją apie $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b})$ pateikiame 2.3 ir 2.4 poskyriuose.

Tegul $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ yra kompaktinių juostos $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \Big\{s \in \mathbb{C} : \sigma_{\mathcal{L}} < \sigma < 1\Big\}$, kur $\sigma_{\mathcal{L}} = \max\Big\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\Big\}$, aibių su jungiaisiais papildiniais klasė, o $H_{0\mathcal{L}}(K)$ – tolydžių, nelygių nuliui ir analizinių srities K viduje funkcijų klasė, $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$. Be to, tegul $\mathcal{K}$ yra kompaktinių juostos $D = \Big\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\Big\}$ aibių su jungiaisiais papildiniais klasė, o $H(K_j)$ – tolydžių ir analizinių funkcijų klasė, $K_j \in \mathcal{K}$.

Pagrindinė teorema. *Tarkime, kad* $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ *ir tenkina sąlygą:* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum\limits_{p\le x} |a(p)|^2 = \kappa$, κ – teigiama konstanta. *Tegul skaičiai* $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ *yra algebriškai nepriklausomi virš* $\mathbb{Q}$ *ir* $\operatorname{rank}(A_j) = l_j, j = 1, \dots, r$. *Be to, tegul* $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ *ir* $f(s) \in H_{0\mathcal{L}}(K)$, *o* $K_{jl} \in \mathcal{K}$ *ir* $f_{jl}(s) \in H(K_{jl})$, visiems $j = 1, \dots, r$ *ir* $l = 1, \dots, l_j$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, meas\Big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\mathcal{L}(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon, \\ \sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |\zeta(s+i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Akivaizdu, kad pagrindinė teorema apima ankstesnius matematikų darbus [4], [6], [9], [11], [12], [17], kur vietoje Selbergo klasės funkcijų buvo nagrinėjama Rymano dzeta funkcija, parabolinių formų, naujųjų formų dzeta funkcijos, ar normuotos parabolinių formų L funkcijos su sąsukomis.

Svarbu akcentuoti tai, jog šiuo atveju galime pateikti ir parametrų α pavyzdį. Tarkime, jei $r = 2$, tokiu atveju

$$\alpha_1 = 2^{-\sqrt[3]{2}}, \qquad \alpha_2 = 2^{-\sqrt[3]{4}},$$

nes įrodyta [3], kad skaičiai $\alpha_1 = 2^{\sqrt[3]{2}}$ ir $\alpha_2 = 2^{\sqrt[3]{4}}$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$.

Tyrimo metodai. Magistro darbe gautų universalumo teoremų įrodymui naudotas išvystytas tikimybinis metodas, paremtas ribinėmis teoremomis apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą. Šis metodas sujungia mato ir ergodinės teorijų elementus. Naudojama ir Mergeliano teorema.

Darbo struktūra. Magistro darbą sudaro įvadas, trys skyriai, išvados, literatūros sąrašas bei santraukos lietuvių ir anglų kalbomis. Apibrėžimai, teoremos ir formulės žymimos skaičiais, nurodant skyriaus bei objekto numerį skyriuje.

Aprobacija. Magistro darbo rezultatai pristatyti *Studentų mokslinių darbų konferencijoje* 2019 m. gruodžio 20 d. Šiaulių universitete.

1. UNIVERSALUMO SAMPRATA IR REZULTATAI

Šiame skyriuje pateikiama universalumo samprata, aptariami jungtinio ir mišriojo jungtinio universalumo atvejai, pagrindžiantys magistro darbe gauto rezultato svarbą.

1.1. Dzeta funkcijų universalumo teorija ir jos taikymas

Trumpai aptarsime universalumo sąvoką. Pirmąjį universalumo rezultatą 1914 metais gavo M. Feketė (Fekete). Jis įrodė, jog egzistuoja tokia realioji laipsninė eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m, \quad x \in [-1; 1], \tag{1.1}$$

kuri diverguoja su visomis $x \neq 0$ reikšmėmis, ir šis divergavimas yra toks blogas, kad su kiekviena tolydžia funkcija $f(x), x \in [-1, 1], f(0) = 0$ egzistuoja tokia didėjanti teigiamų sveikųjų skaičių n_k seka, kad

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{m \leq n_k} a_m x^m = f(x)$$

tolygiai, kai $x \in [-1, 1]$. Akcentuosime tai, kad įrodytas tik 1.1 eilutės egzistavimas, tačiau nėra žinoma jos išreikštinė forma. Vėliau rasta daug universalių tam tikra prasme objektų, tačiau išreikštiniu pavidalu jie nebuvo pateikti.

1975 metais S. M. Voroninas (Voronin) pateikė [21] pirmąjį išreikštinį universalų tam tikra prasme objektą – Rymano dzeta funkciją $\zeta(s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute $\zeta(s) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ ir yra analiziškai pratęsiama į visą $\mathbb{C}$ plokštumą. Jis įrodė toliau pateiktą teoremą.

1.1 teorema. *Tegul $0 < r < \frac{1}{4}, f(s)$ yra tolygi ir neįgyjanti nulių skritulyje $|s| \leq r$ funkcija bei analizinė to skritulio viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$, egzistuoja toks realusis skaičius $\tau = \tau(\varepsilon)$, kad*

$$\max_{|s| \leq r} \left| \zeta(s + \frac{3}{4} + i\tau) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Šis rezultatas rodo, kad plati analizinių funkcijų klasė juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ gali būti aproksimuojama tolygiai spindulio r skrituliuose Rymano dzeta postūmiais $\zeta(s + i\tau)$. Šiuo metu žinoma kur kas bendresnė Voronino teoremos versija, kurią pateikė A. Laurinčikas [8].

1.2 teorema [8]. *Tegul K yra juostos*

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1 \right\}$$

kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o $f(s)$ yra tolydi ir neįgyjanti nulių aibėje K funkcija bei analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \, \text{meas}\left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon \right\} > 0.$$

Ši nelygybė leidžia teigti, jog yra be galo daug realiųjų skaičių τ, kad kiekviena duota analizinė funkcija norimu tikslumu gali būti aproksimuojama Rymano dzeta funkcijos postūmiais $\zeta(s+i\tau)$, tiksliau, tokių postūmių τ aibės apatinis tankis yra teigiamas. 1.2 teorema turi ir diskretųjį analogą.

1.3 teorema. *Tegul $h > 0$ yra fiksuotas skaičius, o K ir $f(s)$ yra tokie pat, kaip ir 1.2 teoremoje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \le m \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+imh) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Voroninas pastebėjo, jog ir kai kurios kitos dzeta ir L funkcijos taip pat turi panašią aproksimavimo savybę, jis įrodė ir Dirichlė L bei Hurvico dzeta funkcijų su racionaliuoju parametru universalumą. Voronino tyrimus tęsė S. M. Gonekas (Gonek), B. Bagčis (Bagchi), K. Matsumotas (Matsumotas), J. Štaudingas (Steuding), A. Laurinčikas ir kiti.

Be to, Liniko - Ibragimovo (Linnik - Ibragimov) hipotezė teigia, kad *funkcijos tam tikroje plokštumoje apibrėžiamos Dirichlė eilute, analiziškai pratęsiamos į kairę nuo absoliutaus konvergavimo pusplokštumės ir tenkinančios kai kurias natūralias augimo sąlygas, yra universalios Voronino prasme.*

Dabar, praėjus jau daugiau kaip 40 metų po teoremos publikavimo 1975 m., anot K. Matsumoto [13], galime išskirti tris pagrindinius universalumo teorijos plėtojimo etapus: 1975–1987 m., 1996–2007 m., 2007 m.– dabar.

Pirmajame etape Voronino atradimas buvo visiškai naujas konceptas skaičių teorijoje. Voronino įkvėpti matematikai bandė sukurti įvairius apibendrinimus, analogijas ir patobulinimus dzeta funkcijų universalumo teorijoje. Pirmajame plėtojimo etape buvo pasiekti šie rezultatai: jungtinis universalumas; stiprusis universalumas (Hurvitzo dzeta funkcijoms); stiprusis pasikartojamumas; diskretus universalumas; χ-universalumas; hibridinis universalumas.

Kai kurie pirmąjame universalumo teorijos laikotarpyje nagrinėti klausimai ir aspektai buvo išplėtoti tik vėlesniame laikotarpyje. Taip nutiko, nes daug Voronino, Bagči ir Goneko darbų buvo tiesiog nepublikuoti. Tuo galime paaiškinti ir laikotarpį tarp 1987 ir 1996 metų, kai publikacijų dzeta funkcijų universalumo tema buvo ypač mažai.

Antrajame, Matsumoto [13] išskiriamame *etape*, pastebime svarų proveržį, kuris padėjo pamatus dabartinei dzeta funkcijų universalumo mokyklai Lietuvoje. Įvade minėta, 1996 metais publikuota Laurinčiko monografija [8] mokslo pasauliui atskleidė niekur nepublikuotų Bagči darbų detales ir praplėtė universalumo teorijos supratimą. Šiame darbe Laurinčikas įrodo ribines teoremas Rymano dzeta ir Dirichle L-funkcijoms, reikalingas šių funkcijų universalumo įrodymams. Antrojo etapo metu daug profesoriaus Laurinčiko studentų pasirinko tyrinėti įvairių dzeta funkcijų universalumo savybes, taip suformavo dabar jau visame pasaulyje žinomą Lietuvos dzeta funkcijų tyrimo mokyklą. Šiame etape pagrindinė mokslininkų užduotis buvo praplėsti dzeta ir L funkcijų klasę, turinčią universalumo savybę.

Trečiasis etapas. Dabar universalumo teorija plėtojama įvairiomis kryptimis. Paskutiniu metu nagrinėjamas mišrusis bei sudėtinis universalumai. Kartu atsiranda vis daugiau universalumo teorijos krypčių bei pritaikomumo galimybių.

Taikymas. S. M. Voronino atrastas dzeta funkcijų universalumas taikomas daugelyje teorinių ir praktinių uždavinių. Iš universalumo teoremų išplaukia funkcinis nepriklausomumas, kurį dar 1900 m. numatė garsus matematikas D. Hilbertas. Funkcijos $\zeta(s)$ atveju, tai reiškia, kad su tolydžiomis funkcijomis $F_0, F_1, \dots, F_N, : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$, kurios ne visos yra tapatingai lygios nuliui, $\zeta(s)$ netenkina jokios diferencialinės lygties

$$\sum_{m=0}^{N} s^m F_m\Big(\zeta(s), \zeta(s)', \dots, \zeta^n(s)\Big) \equiv 0, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Dzeta funkcijų universalumas gali būti taikomas tų funkcijų nulių pasiskirstymo tyrimui. Nustatyta, jog tam tikrais atvejais egzistuoja ryšys tarp kartotinių dzeta funkcijų universalumo ir nulių.

Funkcijos $\zeta(s)$ universalumas buvo pritaikytas kvantinėje mechanikoje aptinkamiems integralams pagal analizines kreives įvertinti [2]. Universalumas yra glaudžiai susijęs su saviaproksimavimu, taigi ir su Rymano hipoteze. Yra žinoma, kad Rymano hipotezė yra ekvivalenti tvirtinimui, kad funkcija $\zeta(s)$ gali būti aproksimuojama jos pačios postūmiais $\zeta(s + i\tau)$. Tokio tipo rezultatus gavo T. Nakamura ir L. Pankovskis, Lietuvos matematikai R. Garunkštis ir E. Karikovas.

1.2. Jungtinis mišrusis dzeta funkcijų universalumas

Magistro darbe nagrinėjamas jungtinis mišrusis dzeta funkcijų universalumas, kai viena iš funkcijų turi Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius, o kita – ne. Pirmuosius rezultatus, patvirtinančius mišriojo universalumo egzistavimą, gavo Mišu [15], vėliau Sanderis su Štaudingu [19].

Tačiau pirmiausiai priminsime, jog dzeta funkcijų universalumo savybė gali būti apibendrinta baigtiniam analizinių funkcijų rinkiniui, aproksimuojant jį dzeta funkcijų postūmiais, tokiu atveju turime taip vadinamą jungtinį universalumą. Pirmuosius jungtinio universalumo rezultatus taip pat pateikė Voroninas Dirichlė L funkcijoms.

Tegul χ yra Dirichlė charakteris moduliu q. Priminsime, jog Dirichlė L funkcija $L(s, \chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

ir, kai χ yra ne pagrindinis charakteris, ji yra analiziškai pratęsiama į sveikąją funkciją. Kai $\chi = \chi_0$ yra pagrindinis charakteris moduliu q,

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big).$$

$L(s, \chi_0)$ yra meromorfinė funkcija, turinti paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu

$$\prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Be to, pusplokštumėje $\sigma > 1$, funkcija $L(s, \chi)$ gali būti išreiškiama Oilerio sandauga pagal pirminius

$$L(s, \chi) = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Priminsime, jog Dirichle charakteriai χ_1 moduliu q_1 ir χ_2 moduliu q_2 vadinami ekvivalenčiais, jei jie yra generuojami to paties primityvaus charakterio. Pateikiame Voronino jungtinio universalumo teoremą Dirichle L funkcijoms.

1.4 teorema. *Tarkime, $\chi_1, \ldots, \chi_r$ yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Be to, tegul $K_j \subset D$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o $f_j(s)$ yra tolydi ir neįgyjanti nulių aibėje K_j bei analizinė aibės K_j viduje funkcija, $j = 1, \ldots, r$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{\tau \in [0,T] : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Jungtinio universalumo savybė įrodyta ir kitų dzeta funkcijų rinkiniams, pavyzdžiui, Hurvico dzeta funkcijoms bei periodinėms dzeta funkcijoms, be to, daugelis darbų skirta jungtiniam periodinių Hurvico dzeta funkcijų universalumui nagrinėti. Plačiau apie tai K. Matsumoto apžvalgoje [13].

Akivaizdu, jog jungtinio universalumo teoremose aproksimuojančiosios dzeta funkcijos turi būti tam tikra prasme nepriklausomos. Pavyzdžiui, Voronino teoremoje Dirichlė $L-$funkcijų nepriklausomumas nusakytas Dirichlė charakterių neekvivalentumu, o Hurvico dzeta funkcijų atveju reikalaujama parametrų $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ algebrinio nepriklausomumo virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$.

Voronino universalumo teoremoje Rymano dzeta funkcijai reikalaujama, kad aproksimuojama funkcija neįgytų nulių aibėje K, o Hurvico dzeta funkcijai su transcendenčiuoju parametru α šis reikalavimas nėra būtinas. Tai paaiškinama galimybe nagrinėjamą funkciją išreikšti Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius ($\zeta(s)$ atveju) arba tokios galimybės nebuvimu ($\zeta(s, \alpha)$ atveju).

Jungtinis dzeta funkcijų, turinčių bei neturinčių Oilerio sandaugos pagal pirminius, universalumas vadinamas **mišriuoju jungtiniu universalumu**. Pirmąją tokio tipo teoremą funkcijoms $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ įrodė H. Mišu (Mishou) [15]. Tegul $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$.

1.5 teorema. *α yra transcendentinis skaičius. Tegul $K_1 \subset D$ ir $K_2 \subset D$ yra kompaktiniai poaibiai su jungiaisiais papildiniais, funkcija $f_1(s)$ yra tolydi ir neįgyjanti nulių aibėje K_1 bei analizinė aibės K_1 viduje, o funkcija $f_2(s)$ yra tolydi aibėje K_2 ir analizinė jos viduje.*

Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Tačiau $\zeta(s,\alpha)$ *su algebriniu iracionaliuoju parametru* iki šiol yra atviras klausimas. Vėliau Mišu teorema buvo apibendinta periodinėms dzeta bei periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms.

2. SELBERGO KLASĖ IR HURVICO DZETA FUNKCIJA

Magistro darbe įrodoma jungtinė mišriojo universalumo teorema L funkcijoms ir Hurvico dzeta funkcijoms. Šiame skyriuje pateikiami nagrinėjamų objektų apibrėžimai, pristatomi žinomi rezultatai, susiję su nagrinėjamų funkcijų reikšmių pasiskirstymu.

2.1. Selbergo L funkcijų klasė ir poklasis

Šiame poskyryje išsamiau susipažinsime su vienomis iš aproksimuojančių funkcijų, apibrėžiamomis paprastosiomis Dirichlė eilutėmis

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \quad s \in \mathbb{C},$$

ir tenkinančiomis šiuos reikalavimus:

- kiekvienam $\epsilon > 0$, $a(m) \ll m^{\epsilon}$ (*Ramanudžano hipotezė*);
- egzistuoja sveikasis skaičius $r \geq 0$ toks, kad $(s-1)^r L(s)$ yra sveikoji baigtinė funkcija (*funkcijos turi analizinį pratęsimą*);
- teigiamiems sveikiesiems skaičiams Q ir λ_j bei kompleksiniams skaičiams $\mu_j, \Re\mu_j \geq 0$, ir $\omega, |\omega| = 1$, $j = 1, \dots, l$, funkcija

$$\Lambda_L(s) = L(s)Q^s \prod_{j=1}^{l} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$$

  tenkina *funkcinę lygtį*

$$\Lambda_L(s) = \omega\overline{\Lambda_L(1-\overline{s})},$$

- turi *Oilerio (L. Euler) sandaugą*, t.y., egzistuoja skaičiai $b(p^\alpha)$, tenkinantys įvertį $b(p^\alpha) \ll p^{\alpha\theta}$, su tam tikrais $\theta < \frac{1}{2}$ tokiais, kad

$$L(s) = \prod_p \exp\Big\{\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{b(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\Big\}.$$

Kaip jau minėjome įvade, tokia *funkcijų klasė vadinama Selbergo vardu* (žymėsime $\mathcal{S}$). Pirmiausia išsamiau aptarsime reikalavimus Selbergo klasės funkcijoms bei pateiksime juos tenkinančių funkcijų pavyzdžių.

Ramanudžano hipotezė teigia, jog kiekvienam $\epsilon > 0$, $a(m) \ll m^{\epsilon}$. Jei tenkinama ši hipotezė, Dirichlė eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > 1$ ir tolygiai kiekviename kompaktiškame poaibyje. Tuomet, pagal Vejerštraso teoremą, funkcija yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > 1$, o tai suteikia teisę kalbėti apie analizinį pratęsimą.

Analizinio pratęsimo sąlyga (jog egzistuoja sveikasis skaičius $r \geq 0$, toks kad $(s-1)^r$ $L(s)$ yra sveikoji baigtinės eilės funkcija) nurodo, kad egzistuoja mažiausiai vienas polius, kuris yra taške $s = 1$. Niekas nepasikeistų, jei turėtumėme daugiau polių (ant tiesės $\sigma = 1$). Taigi, pakanka nagrinėti funkcijas su mažiausiai vienu poliumi taške $s = 1$.

Reikalavime, jog teigiamiems sveikiesiems skaičiams Q ir λ_j bei kompleksiniams skaičiams $\mu_j, \Re\mu_j \geq 0$, ir ω, $|\omega| = 1$, $j = 1, \ldots, l$, funkcija $\Lambda_L(s) = L(s)Q^s\prod_{j=1}^{l}\Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$ turi tenkinti funkcinę lygtį $\Lambda_L(s) = \omega\overline{\Lambda_L(1-\overline{s})}$, apribojimas $\Re\mu_j$ kilęs iš Maso (Maass) teorijos. Priminsime, jog funkcijos $L(s)$ trivialūs nuliai pasiskirstę γ faktoriaus poliuose:

$$\rho = -\frac{\mu_j + k}{\lambda_j}, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

t.y., guli pusplokštumėje $\sigma < 0$. Kai $\rho = 0$, turime nagrinėti atskirai, atsižvelgdami į galimus polius taške $s = 1$.

Pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcija, Dirichlė L funkcijos tenkina šį reikalavimą, jų funkcinės lygtys užrašomos lygybėmis:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s);$$

$$\Big(\frac{\pi}{d}\Big)^{-\frac{1-s+\delta}{2}}\Gamma\Big(\frac{1-s+\delta}{2}\Big)L(1-s,\overline{\chi}) = \frac{i^{\delta}\sqrt{d}}{\tau\chi}\Big(\frac{\pi}{d}\Big)^{-\frac{s+\delta}{2}}\Gamma\Big(\frac{s+\delta}{2}\Big)L(s,X).$$

čia $\chi(m)$ – primityvus Dirichlė L funkcijos charakteris moduliu d.

Oilerio sandaugos egzistavimo sąlyga yra būtina (bet nepakankama) sąlyga Rymano hipotezei. Iš pirmo žvilgsnio sąlyga $\theta < \frac{1}{2}$ atrodo kiek nenatūrali, tačiau jei $\theta = \frac{1}{2}$ būtų galimas, funkcija

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

priklausytų klasei $\mathcal{S}$, bet tai akivaizdžiai pažeidžia Rymano hipotezę. Be to, iš funkcijos išraiškos Oilerio sandauga akivaizdu, kad joks Selbergo klasės elementas nėra lygus nuliui absoliutaus konvergavimo pusplokštumėje $\sigma > 1$.

Apskritai nulių pasiskirstymo Selbergo klasėje klausimai yra esminiai. Pavyzdžiui, vis dar nežinoma, ar $L(1+it) \neq 0$, visiems $t \in \mathbb{R}$.

Jei kuris nors iš pateiktų apribojimų būtų išmestas, gauta platesnė klasė apimtų Dirichlė eilutes, kurios prieštarauja Rymano hipotezei.

Selbergo klasei priklauso daug dzeta ir L funkcijų, pavyzdžiui:

- Rymano dzeta funkcija
$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1.$$

- Dirichlė L funkcijos
$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

  čia χ – charakteris iš multiplikatyviosios grupės $\mathbb{Z}^*{}_q$. Akivaizdu, jog $\zeta(s)$ yra specialus $L(s,\chi)$ atvejis, atitinkantis charakterį moduliu 1.

- Hekės L funkcijos
$$L_K(s,\chi) = \sum_I \frac{\chi(I)}{N(I)^s}\,, \quad \sigma > 1,$$

  susietos su algebrinių skaičių lauku K. Čia I perbėga nenulinius idealus sveikųjų skaičių žiede iš K; $N(I)$ žymi I normą, o χ – baigtinės ar begalinės eilės Hekės charakterį. Kai $K = Q, L_K(s,\chi)$ susiveda į $L(s,\chi)$.

- Holomorfinių modulinių formų F Hekės L funkcijos (su atitinkamais apribojimais ir normavimu)
$$L_F(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s} = \prod_P \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

  čia $c(p) = \alpha(p) + \beta(p)$, $F(z)$ yra holomorfinė modulinė forma, o c(m) – jos Furje koeficientai.

- Artinio L funkcijos priklauso aibei S, jei teisinga Artinio hipotezė.

  Visi žinomi funkcijų iš Selbergo klasės pavyzdžiai yra automorfinės arba hipotetiškai automorfinės L funkcijos.

Kaip jau minėjome įvade, Selbergo klasė yra pakankamai plati ir sudėtinga, todėl dauguma matematikų, kaip Bombieris, Konris, Gošas, Heihalas, Perelis, Štaudingas, nagrinėja tam tikrus klasės $\mathcal{S}$ poklasius. Aptarsime vieną iš jų – J. Štaudingo apibrėžtą **Selbergo klasės poklasį, kurį autorius žymi $\tilde{\mathcal{S}}$** [20].

Funkcijos $L \in \tilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$, jei jos tenkina papildomus reikalavimus:

- *Funkcijos turi polinominę Oilerio sandaugą, t.y., kiekvienam pirminiam* p ir $j = 1,\ldots,k$ *egzistuoja kompleksiniai skaičiai* c_j, tenkinantys sąlygą $|c_j(p)| \le 1$, *tokie, kad*
$$L(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)}{p^s}^{-1}\right).$$

Šis reikalavimas nusako koeficientų a_m multiplikatyvumą ir tai, jog kiekvienas Oilerio faktorius gali būti išreiškiamas Dirichle eilute. Sąlyga $|c_j(p)| \le 1$ pakeičia Ramandžuano hipotezę Selbergo klasėje.

- *Aprėžtas vidurkio kvadratas, t.y., egzistuoja teigiama konstanta κ tokia, kad*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\pi(x)}\sum_{p\le x}|a(p)|^2=\kappa, \tag{2.1}$$

kur

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1.$$

Šis reikalavimas parodo, jog egzistuoja be galo daug pirminių skaičių, kuriems (ne visiems) $c_j(p)$ artėja į nulį. Be to, šis reikalavimas artimai susijęs su Selbergo prielaidomis. Jei papildomai tarsime, kad vidurkio kvadrato hipotezėje $\kappa\in\mathbb{N}$, sumuodami dalimis, gausime silpną Selbergo hipotezės versiją, t.y.:

$$\sum_{p\le x}\frac{|a(p)|^2}{p}\sim\kappa\log\log x.$$

Nesunku pastebėti, jog poklasiui $\tilde{\mathcal{S}}$ priklauso šios funkcijos: Rymano dzeta funkcija, $\zeta(s)$, Dirichlė L funkcijos $L(s,\chi)$ su primityviu charakteriu χ, Hekės L funkcijos $L_k(s,\chi)$, normuotos L funkcijos, susijusios su naujausiomis formomis, Dedekindo dzeta funkcija $\zeta_K(s)=\sum\limits_I\frac{1}{N(I)^s}$, Rankino - Selbergo L funkcijos.

Darbe nagrinėsime poklasio $\tilde{S}$ plėtinį – Selbergo klasės funkcijų, tenkinančių sąlygą koeficientams $a(p), p\in\mathcal{P}$, elgesį.

Svarbu pabrėžti, kad šis poklasis nesutampa su jokia kita funkcijų klase, kuriai jau kada nors yra gautos mišriojo universalumo teoremos.

2.2. Selbergo klasės *L* funkcijų reikšmių pasiskirstymas

Šiame skyriuje charakterizuosime funkcijų $L(s)$ iš klasės $\tilde{\mathcal{S}}$, apibrėžtos 2.1 skyriuje, asimptotinį elgesį.

Funkcijos $L(s)$ laipsnis d_L apibrėžiamas lygybe

$$d_L=2\sum_{j=1}^{r}\lambda_j,$$

čia skaičiai λ_j imami iš funkcijos $L(s)$ funkcinės lygties. Tegul

$$D_0=\Big\{s\in\mathbb{C}:\max\Big(\frac{1}{2},1-\frac{1}{d_L}\Big)<\sigma<1\Big\}.$$

Žinoma [18], kad $d_L\ge 1$, kai $1\ne L\in\mathbb{S}$. Vadinasi, $D_0\in\Big\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\Big\}$.

Ribinę teoremą funkcijoms $L\in\mathbb{S}$ analizinių funkcijų erdvėje $H(D)$ įrodė J. Štaudingas [20]. Tegul $(\Omega,\mathcal{B}(\omega),m(H))$ yra tikimybinė erdvė. Šioje tikimybinėje erdvėje apibrėžiame $H(D_0)$ reikšmį atsitiktinį elementą $L_0(s,\omega)$ formule

$$L_0(s,\omega)=\prod_p\prod_{j=1}^{k}\Big(1-\frac{c_j(p)\omega(p)}{p^s}\Big)^{-1},\quad \omega\in\Omega.$$

2.1 teorema [20]. *Tarkime, kad* $L \in \tilde{\mathcal{S}}$. *Tuomet*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0,T] : L(s+i\tau) \in A\Big\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D_0)),$$

kai $T \to \infty$, *silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento* $L_0(s,\omega)$ *skirstinį.*

Kadangi Selbergo klasė yra meromorfinių funkcijų, turinčių r-os eilės polių taške $s = 1$, klasė, funkcijų $L(s)$ asimptotinės savybės geriausiai nusakomos ribinėmis teoremomis meromorfinių funkcijų erdvėje. Tokio tipo ribinė teorema įrodyta [12] straipsnyje.

Tegul

$$D = \left\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right)\right\},$$

o $M(D)$ yra meromorfinių srityje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija. Be to, tegul $L(s,\omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas ta pačia formule, kaip ir elementas $L_0(s,\omega)$. Kitaip tariant, $L_0(s,\omega)$ yra elemento $L(s,\omega)$ siaurinys juostoje D_0. Tuomet rezultatai iš [12] straipsnio formuluojami šitaip.

2.2 teorema [12]. *Tarkime, kad* $L \in \tilde{\mathcal{S}}$. *Tuomet*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0,T] : L(s+i\tau) \in A\Big\}, \quad A \in \mathcal{B}(M(D)),$$

kai $T \to \infty$, *silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento* $L(s,\omega)$ *skirstinį.*

Akivaizdu, jog iš 2.2 teoremos išplaukia ir ribinė teorema funkcijoms $L(s)$ kompleksinėje plokštumoje. Pusplokštumėje

$$\sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_L$$

apibrėžiame

$$L(\sigma,\omega) = \prod_{o}\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{c_j(p)\omega(p)}{p^{\sigma}}\right)^{-1}.$$

Tuomet $L(\sigma,\omega)$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $\Omega, \mathcal{B}(\omega), m(H))$.

2.3 teorema [12]. *Tarkime, kad* $L \in \tilde{\mathcal{S}}$ *ir* $\sigma > \sigma_L$. *Tuomet*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\Big\{t \in [0,T] : L(\sigma+i\tau) \in A\Big\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, *silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento* $L(\sigma,\omega)$ *skirstinį.*

Universalumo savybę praplėsto Selbergo klasės poklasio $\tilde{\mathcal{S}}$ funkcijoms įrodė H. Nagošis (Nagoshi) ir J. Štaudingas [16].

2.3. Periodinės Hurvico dzeta funkcijos

Kita magistro darbe nagrinėjama funkcijų grupė – periodinės Hurvico dzeta funkcijos su skirtingais koeficientais. Periodinę Hurvico dzeta funkciją 2006 m. apibrėžė A. Laurinčikas ir A. Javtokas [5]. Paprasčiausia dzeta funkcija, neturinti Oilerio sandaugos, yra klasikinė Hurvitzo dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$. Hurvico dzeta funkciją 1887 m. apibrėžė ir pradėjo nagrinėti Hurvicas (A. Hurwitz). Funkcija $\zeta(s, \alpha)$ nėra tiesiogiai susijusi su pirminiais skaičiais, tačiau ji yra gana įdomus analizinis objektas, priklausantis nuo parametro, ir aptinkama algebrinėje skaičių teorijoje. Priminsime jos apibrėžimą.

Tegul α, $0 < \alpha \leq 1$ yra fiksuotas parametras, tuomet Hurvitzo dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichle eilute

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir gali būti meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuriame yra paprastas polius su reziduumu 1. Aišku, kad $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$.

Apibendrinta $\zeta(s, \alpha)$ funkcija yra periodinė Hurvico dzeta funkcija. Tegul

$$\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu $q \in \mathbb{N}$. Periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}.$$

Kadangi koeficientai yra periodiniai, tai pusplokštumėje $\sigma > 1$ galioja lygybė

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a}) = \frac{1}{q^s} \sum_{m=0}^{q-1} a_m \zeta\left(s, \frac{m+\alpha}{q}\right).$$

Tai dar kartą įrodo meromorfinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus, galbūt, tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1.

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} a_m.$$

Jeigu $a = 0$, tai funkcija $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a})$ yra sveikoji funkcija. Kai $a_m \equiv$ ir $q = 1$, tuomet $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a})$ virsta $\zeta(s, \alpha)$.

2.4. Periodinių Hurvico dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas

Pirmosios universalumo teoremos periodinei Hurvico dzeta funkcijai buvo įrodytos 2006 m. A. Laurinčiko ir A. Javtoko. Pats paprasčiausias rezultatas pateiktas [5] straipsnyje.

2.4 teorema [5]. *Tarkime, kad skaičius α yra transcendentusis. Tegul K yra juostos $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} > \sigma > 1\right\}$ kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o $f(s)$ yra tolydžioji funkcija aibėje K ir analizinė aibės K viduje.Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha, \mathfrak{a}) - f(s)| < \epsilon\right\} > 0.$$

Čia labai svarbu akcentuoti tai, jog aproksimuojamoji funkcija nebūtinai turi nevirsti nuliu. Periodinių Hurvico dzeta funkcijų universalumas jau yra nagrinėtas ne viename darbe. Bendriausias rezultatas buvo gautas A. Laurinčiko ir S. Skerstonaitės straipsnyje [9]. Kai $j = 1, \dots, r$, tegul $\alpha_j, 0 < \alpha_j \leq 1$, yra fiksuotas parametras, $l_j \in \mathbb{N}$, ir, kai $j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j$, tegul $\mathfrak{a}_{jl} = \{a_{mjl} : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliuoju periodu k_{jl}, o $\zeta(s, \alpha_j, \mathfrak{a}_{jl})$ yra atitinkama periodinė Hurvico dzeta funkcija. Be to, tegul

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \{\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, r\},$$

o k_j yra periodų $k_{j1}, \dots, k_{jl}, j = 1, \dots, r$, bendras mažiausias kartotinis. Apibrėžiame matricą

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j1} & a_{1j2} & \dots & a_{1jl_j} \\ a_{2j1} & a_{2j2} & \dots & a_{2jl_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_1j1} & a_{k_jj2} & \dots & a_{k_jjl_j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, r.$$

2.5 teorema [9]. *Tarkime, kad sistema $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$* ir *rank$(B_j) = l_j, j = 1, \dots, r$. Visiems $j = 1, \dots, r$, ir $l = 1, \dots, l_j$, tegul K_{jl} yra juostos D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o $f_{jl}(s)$ yra tolydžioji funkcija aibėje K_{jl} ir analizinė aibės K_{jl} viduje. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\leq j\leq r} \sup_{1\leq l\leq l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha j; \mathfrak{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

2010 m. J. Genys, R. Macaitienė, S. Račkauskienė ir D. Šiaučiūnas įrodė mišriojo jungtinio universalumo rezultatą periodinių Hurvico dzeta funkcijų bei Rymano dzeta funkcijos rinkiniui.

2.6 teorema [4]. *Tarkime, kad skaičiai α_1, α_r ra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$ ir rank $(A_j) = l_j$, $j = 1, \dots, r$. Kai $j = 1, \dots, r, l = 1, \dots, l_j$, tegul K_{jl} yra juostos D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o $f_{jl}(s)$ yra tolydžioji funkcija aibėje K_{jl} ir analizinė aibės K_{jl} viduje. Be to, tegul $K \subset D$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o $f(s)$ yra tolydžioji neįgyjanti nulių funkcija aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon,\right.$$
$$\left.\sup_{1\leq j\leq r} \sup_{1\leq l\leq l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Pastebime, kad jungtiniam mišriąjam universalumui nepakanka reikalauti aibės $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ tiesinio nepriklausomumo. Tam reikalaujama skaičių rinkinio $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ algebrinio nepriklausomumo virš $\mathbb{Q}$.

Mišriojo universalumo teoremos įrodymas yra pagrįstas jungtine ribine teorema tikimybiniams matams analizinių funkcijų erdvėje. Ši teorema pati yra gana svarbi analizinėje skaičių teorijoje. Tegul

$$H^v(D) = \underbrace{H(D) \times \ldots \times H(D)}_{v}, \quad v = \sum_{j=1}^{r} l_j + 1.$$

Be to, tegul

$$\hat{\Omega} = \prod_p \gamma_p \quad ir \quad \Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ ir $\gamma_m = \gamma$ atitinkamai visiems pirminiams p ir visiems $m \in \mathbb{N}_0$. Apibrėžiame

$$\underline{\Omega} = \hat{\Omega} \times \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_r,$$

čia $\Omega_j = \Omega$, kai $j = 1, \ldots, r$. Tuomet pagal Tichonovo teoremą, $\underline{\Omega}$ yra kompaktinė topologinė Abelio (Abel) trupė, todėl gauname tikimybinę erdvę $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m_H})$, čia $\underline{m_H}$ yra tikimybinis Haro matas erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}))$. Tegul $\hat{\omega}(p)$ yra elemento $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$ projekcija į γ_p, o $\omega_j(m)$ yra elemento $\omega j \in \Omega_j$ projekcija į γ_m. Dėl trumpumo, tegul $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $\underline{\mathfrak{b}} = (b_{11}, \ldots, b_{1l_1}, \ldots, b_{r1}, \ldots, b_{rl_r})$. Tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m_H})$ apibrėžiame $H^v(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}, \underline{\mathfrak{b}})$ formule

$$\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}, \underline{\mathfrak{b}}) = (\zeta(s, \hat{\omega}), \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{b}_{11}), \ldots, \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{b}_{1l_1}), \ldots, \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{b}_{r1}), \ldots, \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{b}_{r1_r}))$$

čia

$$\zeta(s, \hat{\omega}) = \prod_p \left(1 - \frac{\hat{\omega}(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

ir

$$\zeta(s, \alpha_j, \omega_j; \mathfrak{b}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mjl}\omega_j(m)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \ldots r, \quad l = 1, \ldots, l_j.$$

Tegul $P_{\underline{\zeta}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}, \underline{\mathfrak{b}})$ skirstinys, t.y.,

$$P_{\underline{\zeta}}(A) = \underline{m_H}\Big(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} : \underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}, \underline{\mathfrak{b}}) \in A\Big), \quad A \in \mathcal{B}(H^v(D)),$$

ir

$$\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{b}}) = \Big(\zeta(s), \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{b}_{11}), \ldots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{b}_{1l_1}), \ldots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{b}_{r1}), \ldots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{b}_{rl_r})\Big).$$

2.7 teorema [4]**.** *Tarkime, kad skaičiai $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tada tikimybinis matas*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{b}}) \in A\Big\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^v(D)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į $P_{\underline{\zeta}}$.

3. PAGRINDINĖ MIŠRIOJO UNIVERSALUMO TEOREMA

Magistro darbo tikslas yra įrodyti jungtinę mišriojo universalumo teoremą funkcijoms $L(s) \in \tilde{\mathcal{S}}$ ir $\zeta(s, \alpha_j, \mathfrak{b}_{jl})$. Tam, kad įrodytume šią teoremą, turime įrodyti jungtinę ribinę teoremą ir rasti atsitiktinio elemento atramą.

3.1. Tikimybinis modelis

Norėdami įrodyti pagrindinę teoremą, turime įrodyti ribinę teoremą silpno tikimybinio mato konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje.

Tegu G yra sritis kompleksinėje plokštumoje. Pažymėkime $H(G)$ analizinių srityje G funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Tegul

$$u = \sum_{j=1}^{r} l_j, \quad v = u + 1,$$

ir

$$H^v = H^v(D_{\mathcal{L}}, D) = H(D_{\mathcal{L}}) \times H^u(D).$$

Kaip įprastai, pažymėkime $\mathbb{X}$ metrinę arba topologinę erdvę, o $\mathcal{B}$ erdvės $\mathbb{X}$ Borelio σ-kūną, t.y., mažiausią σ kūną, kuriam priklauso erdvės X atvirųjų aibių sistema. Dėl trumpumo, tegul $\underline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$, $\underline{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_{11}, ..., \mathfrak{a}_{1l_1}, ..., \mathfrak{a}_{r1}, ..., \mathfrak{a}_{rl_r})$ ir

$$Z(s_1, s, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) = \left(\mathcal{L}(s_1), \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), ..., \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), ..., \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), ..., \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})\right).$$

3.1 apibrėžimas. *Tegul P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai, apibrėžti mačioje erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena funkcija $f \in C(\mathbb{X})$ yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{X}} f dP_n = \int_{\mathbb{X}} f dP.$$

čia $C(\mathbb{X})$ žymi erdvės $\mathbb{X}$ realių, tolydžių, aprėžtų funkcijų klasę.

Šiame skyriuje nagrinėsime tikimybinio mato

$$P_T(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \text{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \ Z(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^v),$$

silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$. Kad suformuluotume ribinę teoremą, mums reikalinga topologinė struktūra. Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Apibrėžiame daugiamačius torus:

$$\hat{\Omega} = \prod_{p} \gamma_p \quad \text{ir} \quad \Omega = \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \gamma_m,$$

kur $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p ir $\gamma_m = \gamma$ visiems $m \in \mathbb{N}_0$. Pagal Tichonovo (Tikhonov) teoremą, su sandaugos topologija ir pataškine daugyba torai $\hat{\Omega}$ ir Ω yra kompaktiškos topologinės grupės. Taigi, erdvėse $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}))$ ir $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybiniai Haro (Haar) matai $\hat{m}_H$ ir m_H ir mes turime tikimybines erdves $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), \hat{m}_H)$ bei $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Dar daugiau, tegul $\Omega_j = \Omega, \quad j = 1, \dots, n, q$

$$\underline{\Omega} = \hat{\Omega} \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r.$$

Tuomet ir $\underline{\Omega}$ yra kompaktiška topologinė Abelio grupė, vadinasi, turime dar vieną tikimybinę erdvę $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m_H})$, kur $\underline{m_H}$ yra tikimybinis Haro matas erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}))$. Pažymėkime $\hat{\omega}(p)$ elemento $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_p, $p \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ – pirminių skaičių aibė), o $\omega_j(m)$ elemento $\omega_j \in \Omega_j$ projekciją į γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$.

Magistro darbe bus naudojama atsitiktinio elemento sąvoka, todėl ją primename.

3.2 apibrėžimas. *Atsitiktiniu $\mathbb{X}$–reikšmiu elementu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *vadiname funkciją $X : \Omega \to \mathbb{X}$, su kiekviena Borelio aibe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ tenkinančia sąlygą*

$$X^{-1}(B) = \Big\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\Big\} \in \mathcal{A}.$$

Taigi, tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m_H})$ apibrėžiame H^v-reikšmį atsitiktinį elementą $Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L})$, kur $\underline{\omega} = (\hat{\omega}, \omega_1, ..., \omega_r) \in \underline{\Omega}$, rinkiniu

$$\begin{aligned} Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \quad = \quad & \Big(\mathcal{L}(s_1, \hat{\omega}), \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{11}), ..., \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), ..., \\ & \zeta(s, \omega_r, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), ..., \zeta(s, \omega_r, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})\Big). \end{aligned}$$

Čia,

$$\mathcal{L}(s_1, \hat{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\hat{\omega}(m)}{m^s}, \quad s_1 \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}},$$

su

$$\hat{\omega}(m) = \prod_{\substack{p^l | m \\ p^{l+1} \nmid m}} \hat{\omega}^l(p), \quad m \in \mathbb{N},$$

o

$$\zeta(s, \alpha_j, \omega_j; \mathfrak{a}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl}\omega_j(m)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, ..., r, \quad l = 1, ..., l_j, s \in \mathcal{D}.$$

Svarbu akcentuoti tai, kad beveik kiekvienam $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$, $\mathcal{L}(s_1, \hat{\omega})$ užrašoma Oilerio sandauga, t.y.,

$$\mathcal{L}(s_1, \hat{\omega}) = \exp\left\{\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)\hat{\omega}^k(p)}{p^{ks}}\right\}.$$

3.3 apibrėžimas. $\mathbb{X}$ *reikšmio atsitiktinio elemento X pasiskirstymu vadiname tikimybinį matą*

$$P(A) = \mathbb{P}\Big\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\Big\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}).$$

P_Z pažymėkime atsitiktinio elemento $Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L})$ pasiskirstymą, t.y.

$$P_Z(A) = \underline{m_H}\left(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} : \ Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(H^v).$$

3.1 teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ ir tenkinama* 2.1 *hipotezė. Be to, tegul skaičiai $\alpha_1, .., \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tada, kai $T \to \infty$, P_T silpnai konverguoja į P_Z.*

Įrodymo kelias yra pakankamai gerai žinomas (galite peržiūrėti panašias teoremas iš [4], [10], [11]), todėl paaiškinsime tik pagrindinius įrodymo momentus.

3.1 lema. *Tarkime, kad skaičiai* $\alpha_1, .., \alpha_r$ *yra algebriškai nepriklausomi virš* $\mathbb{Q}$. *Tada*

$$\begin{aligned} Q_T(A) \quad &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0,T]: \ \Big((p^{-i\tau} : p \in \mathcal{P}), \\ &\Big((m+\alpha_1)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0\Big), ..., \Big((m+\alpha_r)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0\Big)\Big) \in A\Big\}, \quad A \in \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \end{aligned}$$

kai $T \to \infty$, *silpnai konverguoja į Haro matą* $\underline{m}_H$.

Lemos įrodymas yra pateiktas [7].

Dabar tegul kiekvienam fiksuotam $\sigma_1 > \frac{1}{2}$, pažymėkime

$$u_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

ir

$$u_n(m, \alpha_j) = \exp\left\{-\left(\frac{m+\alpha_j}{n+\alpha_j}\right)^{\sigma_1}\right\}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j = 1, ..., r.$$

Kartu apibrėžkime funkcijas

$$\mathcal{L}_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)u_n(m)}{m^s}$$

ir

$$\zeta_n(s, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl}u_n(m, \alpha_j)}{(m+\alpha_j)^s}, \quad j = 1, ..., r, \quad l = 1, ..., l_j.$$

Nesunku įrodyti, kad eilutė $\mathcal{L}_n(s)$ absoliučiai konverguoja, kai $\sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\right)$ [20], o eilutės $\zeta_n(s, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl})$ absoliučiai konverguoja, kai $\sigma > \frac{1}{2}$. Apibrėžkime ir atsitiktinius elementus

$$\mathcal{L}_n(s, \hat{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\hat{\omega}(m)u_n(m)}{m^s} \tag{3.1}$$

ir

$$\zeta_n(s, \omega_j, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl}\omega_j(m)u_n(m, \alpha_j)}{(m+\alpha_j)^s}, \quad j = 1, ..., r, \quad l = 1, ..., l_j. \tag{3.2}$$

Kitame įrodymo žingsnyje nagrinėsime tikimybinių matų

$$P_{T,n}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T]: \ Z_n(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^v),$$

ir

$$\hat{P}_{T,n}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T]: \ Z_n(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^v),$$

silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$, kur

$$\begin{aligned} Z_n(s_1, s, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \quad &= \quad \Big(\mathcal{L}_n(s_1), \zeta_n(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), ..., \zeta_n(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), ..., \\ &\zeta_n(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), ..., \zeta_n(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})\Big) \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} Z_n(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \quad &= \quad \Big(\mathcal{L}_n(s_1, \hat{\omega}), \zeta_n(s, \omega_1, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), ..., \zeta_n(s, \omega_1, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), ..., \\ &\zeta_n(s, \omega_r, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), ..., \zeta_n(s, \omega_r, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})\Big). \end{aligned}$$

3.2 lema. *Tarkime, kad skaičiai $\alpha_1, .., \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tada, kiekvienam fiksuotam $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$ matai $P_{T,n}$ ir $\hat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą P_n erdvėje $(H^v, \mathcal{B}(H^v))$.*

Įrodymas. Naudosime standartinį metodą, kuris remiasi silpnojo tikimybinių matų konvergavimo teorija bei 5.1 teorema [1]. Apibrėžkime funkciją $h_n : \underline{\Omega} \to H^v$ lygybe

$$h_n(\underline{\omega}) = Z_n(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathcal{L}}).$$

Absoliutus (3.1) ir (3.2) eilučių konvergavimas parodo, kad funkcija h_n yra tolydi. Be to,

$$h_n\left(\left(p^{-i\tau} : p \in \mathcal{P}\right), \left((m+\alpha_1)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0\right), ..., \left((m+\alpha_r)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0\right)\right) = \\ Z_n(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathcal{L}}).$$

Taigi, $P_{T,n} = Q_T h_n^{-1}$. Iš čia, h_n tolydumo, 3.2 lemos ir 5.1 teoremos [1] seka tikimybinio mato $P_{T,n}$ silpnas konvergavimas į $\underline{m}_H h_n^{-1}$, kai $T \to \infty$.

Dabar tegul $h(\underline{\omega}) = \underline{\omega}\,\underline{\omega}_0$ ir fiksuotam $\underline{\omega}_0 \in \underline{\Omega}$, $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$. Tada, akivaizdu, jog

$$h_n\left(h\left(\left(p^{-i\tau} : p \in \mathcal{P}\right), \left((m+\alpha_1)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0\right), ..., \left((m+\alpha_r)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0\right)\right)\right) = \\ Z_n(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\omega}_0, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathcal{L}}).$$

Todėl, pakartoję prieš tai minėtus argumentus ir pasinaudoję Haro mato $\underline{m}_H$ invariantiškumu, randame, kad matas $\hat{P}_{T,n}$ irgi silpnai konverguoja į $\underline{m}_H h_n^{-1}$, kai $T \to \infty$. Taigi, abu tikimybiniai matai, $P_{T,n}$ ir $\hat{P}_{T,n}$ silpnai konverguoja į matą $P_n = \underline{m}_H h_n^{-1}$, kai $T \to \infty$.

Dabar mums bus reikalingi tam tikri aproksimavimo rezultatai. Pažymėkime $\rho_{\mathcal{L}}$, ρ ir ρ_v atitinkamas metrikas erdvėse $H(D_{\mathcal{L}})$, $H(D)$ ir H^v, indukuojančias tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologiją. Rinkiniams $\underline{g} = (g, g_{11}, ..., g_{1l_1}, ..., g_{r1}, ..., g_{rl_r})$ ir $\underline{f} = (f, f_{11}, ..., f_{1l_1}, ..., f_{r1}, ..., f_{rl_r}) \in H^v$, $\rho_v(\underline{g}, \underline{f})$ apibrėžiama

$$\rho_v(\underline{g}, \underline{f}) = \max\left(\rho_{\mathcal{L}}(g, f), \max_{1 \le j \le r} \max_{1 \le l \le l_j} \rho(g_{jl}, f_{jl})\right).$$

3.3 lema. *Tarkime, kad $\alpha_1, .., \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tada beveik visiems $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho_v\left(Z(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathcal{L}}), Z_n(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathcal{L}})\right) \mathrm{d}\tau = 0.$$

Be to,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho_v\left(Z(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathcal{L}}), Z_n(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathcal{L}})\right) \mathrm{d}\tau = 0.$$

Įrodymas. Pagal metrikos ρ_v apibrėžimą,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \rho_v\left(Z(s_1+i\tau, s+i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}), Z_n(s_1+i\tau, s+i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L})\right) \mathrm{d}\tau$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T \rho_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{L}(s_1+i\tau), \mathcal{L}_n(s_1+i\tau)\right) \mathrm{d}\tau \tag{3.3}$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{l_j}\frac{1}{T}\int_0^T \rho\left(\zeta(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl}), \zeta_n(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl})\right) \mathrm{d}\tau.$$

Be to, atsižvelgdami į 4.8 lemą iš J. Štaudingo monografijos [20], turime, kad

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \rho_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{L}(s_1+i\tau), \mathcal{L}_n(s_1+i\tau)\right) \mathrm{d}\tau = 0, \tag{3.4}$$

o remdamiesi 2.4 lemos iš R. Macaitienės mokslinio darbo [11] įrodymu, gauname, jog kiekvienam $j = 1, ..., r$, $l = 1, ..., l_j$.

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \rho\left(\zeta(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl}), \zeta_n(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl})\right) \mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.5}$$

Todėl antrasis lemos tvirtinimas išplaukia iš (3.3)–(3.5) lygybių. Panašiai, atsižvelgiant į 4.10 lemą iš jau minėto J. Štaudingo darbo [20], gauname, kad beveik visiems $\hat{\omega}$,

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \rho_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{L}(s_1+i\tau,\hat{\omega}), \mathcal{L}_n(s_1+i\tau,\hat{\omega})\right) \mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.6}$$

Tegul

$$\rho_u(g,f) = \max_{1\leq j\leq r}\max_{1\leq l\leq l_j}\rho(g_{jl}, f_{jl}),$$

ir $\widetilde{m}_H$ žymi Haro matą erdvėje $(\Omega_1\times\cdots\times\Omega_r, \mathcal{B}(\Omega_1\times\cdots\times\Omega_r))$. Tuomet (2.5) formulė iš [4] tvirtina, kad

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \rho_u\Big(\left(\zeta(s+i\tau,\omega_1,\alpha_1;\mathfrak{a}_{11}), ..., \zeta(s+i\tau,\omega_r,\alpha_r;\mathfrak{a}_{rl_r})\right),$$
$$\left(\zeta_n(s+i\tau,\omega_1,\alpha_1;\mathfrak{a}_{11}), ..., \zeta_n(s+i\tau,\omega_r,\alpha_r;\mathfrak{a}_{rl_r})\right)\Big)\mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.7}$$

Čia matas $\underline{m}_H$ yra matų $\hat{m}_H$ ir $\widetilde{m}_H$ sandauga. Taigi, pirmasis lemos tvirtinimas seka iš (3.6), (3.7) ir (3.3) nelygybės analogo.

3.4 lema. *Tarkime, kad $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$ ir tenkinama (2.1) hipotezė. Be to, skaičiai $\alpha_1, .., \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tada tikimybiniai matai P_T ir*

$$\hat{P}_T(A) = \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau\in[0,T]: \ Z(s_1+i\tau, s+i\tau, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L})\in A\right\}, \quad A\in\mathcal{B}(H^v),$$

kai $t \to \infty$, *silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą* P *erdvėje* $(H^v, \mathcal{B}(H^v))$ *beveik kiekvienam* $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$.

Įrodymas. Klasės $\mathcal{S}$ funkcijų savybės leidžia teigti, kad $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T |\mathcal{L}_n(\sigma + it)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a(m)| u_n^2(m)}{m^{2\sigma}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a(m)|^2}{m^{2\sigma}} < \infty, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Ši ir Koši intergalinė formulė sudaro sąlygas įrodyti, kad kiekvienai kompaktiškai aibei K iš $D_{\mathcal{L}}$ yra teisingas įvertis

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{s\in K} |\mathcal{L}_n(s_1 + i\tau)| \, \mathrm{d}\tau \leq C_K \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a(m)|^2}{m^{2\sigma_K}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

su tam tikrais C_K ir $\sigma_K > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\right)$. Iš čia, pagal (2.5) teoremą [11], kompaktiškiems poaibiams K iš D, taip pat teisingas įvertis

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{s\in K} |\zeta_n(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl})| \, \mathrm{d}\tau \leq B_K \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_{mjl}|^2}{(m+\alpha)^{2\hat{\sigma}_K}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

su $B_K > 0$ ir $\hat{\sigma}_K > \frac{1}{2}$, visiems $j = 1, ..., r$, $l = 1, ..., l_j$.

Tolesniam įrodymui mums bus reikalingi konvergavimo pagal pasiskirstymą terminai. Priminsime juos.

3.4 apibrėžimas. *Sakome, kad atsitiktinis elementas* X_n, $n \to \infty$ *konverguoja į atsitiktinį elementą* X *pagal pasiskirstymą, jei elemento* X_n *pasiskirstymas* P_n, $n \to \infty$, *silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento* X *pasiskirstymą* P.

Konvergavimas pagal pasiskirstymą žymimas simboliu $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} X$. Atsitiktinių elementų X_n apibrėžimo tikimybinės ervės gali būti skirtingos, tačiau jie privalo įgyti reikšmes iš tos pačios erdvės.

Tegu θ yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas kokioje nors tikimybinėje erdvėje $\left(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$ ir tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 1]$. Kitaip tariant, jo pasiskirstymo funkcija $F(x)$ yra

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ kai } x \leq 0, \\ x, \text{ kai } 0 < x < 1, \\ 1, \text{ kai } x \geq 1. \end{cases}$$

Šioje tikimybinėje erdvėje apibrėžiame H^v-reikšmį atsitiktinį elementą $X_{T,n}$ formule

$$X_{T,n} = X_{T,n}(s_1, s) = Z_n \left(s_1 + i\theta T, s + i\theta T, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}\right).$$

Tada iš 3.2 lemos ir 3.3 bei 3.4 apibrėžimų turime, kad

$$X_{T,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_n. \tag{3.10}$$

čia $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ reiškia konvergavimą pagal pasiskirstymą, o $X_n = X_n(s_1, s)$ yra H^v-reikšmis atsitiktinis elementas su pasiskirstymu P_n (P_n yra ribinis matas, 3.2 lemoje). Naudodamiesi (3.8)–(3.10), įrodome (analogiškai kaip pvz., [11], [20]), kad tikimybių matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra tiršta. Pagal Prochorovo (Prokhorov) teoremą, ši šeima yra realiatyviai kompaktiška. Vadinasi, iš kiekvienos tos šeimos sekos galime išskirti posekį $\left\{P_{n_k}\right\}$, kai $k \to \infty$, silpnai konverguojantį į kurį nors tikimybinį matą P erdvėje $(H^v, \mathcal{B}(H^v))$. Taigi,

$$X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{3.11}$$

Erdvėje $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ apibrėžkime dar vieną H^v-reikšmį atsitiktinį elementą

$$X_T = X_T(s_1, s) = Z\left(s_1 + i\theta T, s + i\theta T, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}\right).$$

Tada, remdamiesi 3.3 lema, gauname, kad kiekvienam $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}\left(\rho_v(X_T, X_{T,n}) \geq \epsilon\right) = 0.$$

Ši lygybė, (3.10), (3.11) ir 4.2 teorema iš [1] leidžia tvirtinti, kad

$$X_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P,$$

Tai ekvivalentu tvirtinimui, kad P_T silpnai konverguoja į P, kai $T \to \infty$. Be to, šis sąryšis rodo, kad matas P nepriklauso nuo posekio P_{n_k} pasirinkimo ir X_{n_k}. Vadinasi,

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{3.12}$$

Lieka įrodyti, kad ir $\hat{P}_T$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P. Taigi, naudodami H^v-reikšmius atsitiktinius elementus

$$Z_n\left(s_1 + i\theta T, s + i\theta T, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}\right),$$

$$Z\left(s_1 + i\theta T, s + i\theta T, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}\right)$$

ir (3.12) sąryšį, gauname, kad matas $\hat{P}_T$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į P.

3.1 *teoremos įrodymas.* Remiantis 3.4 lema, užtenka parodyti, kad matas P toje lemoje sutampa su P_Z. Tegul A būna mato $\hat{P}_T$ tolydumo aibė. Tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$, apibrėžkime atsitiktinį dydį ξ formule

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A, \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Iš 3.4 lemos turime sąryšį

$$\lim_{T\to\infty} \hat{P}_T(A) = P(A). \tag{3.13}$$

Iš atsitiktinio dydžio ξ apibrėžimo išplaukia, kad

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\underline{\Omega}} \xi \mathrm{d}\underline{m}_H = \underline{m}_H\left(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} : \ Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\right) = P_Z(A). \tag{3.14}$$

Čia $\mathbb{E}\xi$ yra atsitiktinio dydžio vidurkis. Kiekvienam $\tau \in \mathbb{R}$ apibrėžiame transformaciją Φ_τ formule

$$\Phi_\tau(\underline{\omega}) = \Big(\Big(p^{-i\tau} : p \in \mathcal{P}\Big), \Big((m+\alpha_1)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0\Big), ..., \Big((m+\alpha_r)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0\Big)\Big)\underline{\omega},$$

$\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$. Tada, pagal 7 lemą [7], mačių matą išsaugančių transformacijų grupė $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė. Taigi, atsitiktinis procesas $\xi(\Phi_\tau(\underline{\omega}))$ taip pat yra ergodinis. Todėl pagal klasikinę Birkhofo-Chinčino (Birkhoff-Khintchine) teoremą,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi(\Phi_\tau(\underline{\omega}))\mathrm{d}\tau = \mathbb{E}\xi. \tag{3.15}$$

Iš kitos pusės, remiantis ξ ir Φ_τ apibrėžimais, gauname, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi(\Phi_\tau(\underline{\omega}))\mathrm{d}\tau = \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : Z(s_1+i\tau, s+i\tau, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \mathfrak{a}, \mathcal{L}) \in A\right\}.$$

Todėl iš čia, (3.14) ir (3.15) lygybių seka, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : Z(s_1+i\tau, s+i\tau, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \mathfrak{a}, \mathcal{L}) \in A\right\} = P_Z(A).$$

Iš $\hat{P}_T$ apibrėžimo ir (3.13) lygybės, $P(A) = P_Z(A)$ visoms mato P tolydumo aibėms A. Kadangi visos atvirosios aibės sudaro apibrėžiančią klasę, turime, kad $P = P_Z$. Teorema įrodyta.

3.2. Mato P_Z atrama

Universalumo teoremos įrodymui dar reikalingas mato P_Z išreikštinis pavidalas. Primename, kad mato P_Z atrama yra tokia minimali uždara aibė $S_{P_Z} \subset H^v$, kad $P_Z(S_{P_Z}) = 1$. Aibei S_{P_Z} priklauso visos tokios funkcijos $\underline{g} \in H^v$, kurių kiekvienai atvirai aplinkai G yra teisinga nelygybė $P_Z(G) > 0$. Be to, atsitiktinio elemento X atrama yra vadinama jo skirstinio $P_{\mathbb{X}}$ atrama ir žymima S_X

Tegul

$$S_{\mathcal{L}} = \{g \in H(D_{\mathcal{L}}) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}.$$

3.2 teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ ir tenkinamas* (2.1) *reikalavimas. Tegul skaičiai $\alpha_1, .., \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$ ir* $\mathrm{rank}(A_j) = l_j$, $j = 1, ..., r$. *Tada mato P_Z atrama yra aibė $S_{\mathcal{L}} \times H^u(D)$.*

Įrodymas. Tegul

$$H^v = H(D_{\mathcal{L}}) \times H^u(D). \tag{3.16}$$

Yra žinoma, kad analizinių funkcijų erdvės $H(D)_{\mathcal{L}}$ ir $H^u(D)$ yra separabilios. Tuomet pagal (3.16) turime [1], kad

$$\mathcal{B}(H^v) = \mathcal{B}(H(D_{\mathcal{L}})) \times \mathcal{B}(H^u(D)).$$

Todėl pakanka matą $P_Z(A)$ nagrinėti aibėse, turinčiose pavidalą $A = A_1 \times A_2$, $A_1 \in H(D_{\mathcal{L}})$ ir $A_2 \in H^u(D)$. Kadangi matas $\underline{m}_H$ yra matų $\hat{m}_H$ ir $\widetilde{m}_H$ sandauga, tai iš mato P_Z apibrėžimo turime

$$\begin{aligned} P_Z(A) &= \underline{m}_H\left(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} :\ Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\right) \\ &= \underline{m}_H\left(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} :\ \mathcal{L}(s_1, \hat{\omega}) \in A_1, (\zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{11}), ..., \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{a}_{rl_r})) \in A_2\right) \\ &= \hat{m}_H\Big(\hat{\omega} \in \hat{\Omega} :\ \mathcal{L}(s_1, \hat{\omega}) \in A_1\Big)\widetilde{m}_H\Big((\omega_1, ..., \omega_r) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r : \\ &\qquad (\zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{11}), ..., \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{a}_{rl_r})) \in A_2\Big). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Yra žinoma (3 teiginys iš [16]), kad atsitiktinio elemento $\mathcal{L}(s_1, \hat{\omega})$ atrama yra aibė $S_{\mathcal{L}}$. H. Nagoši ir J. Štaudingo darbe [16] nagrinėtas $H(D_{\mathcal{L},N})$-reikšmis atsitiktinis elementas, kur $D_{\mathcal{L},N} = \Big\{s \in \mathbb{C} :\ \max\Big(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\Big) < \sigma < 1,\ |t| < N\Big\}$, tačiau įrodymas galioja visai $D_{\mathcal{L}}$ juostai. Taigi, $S_{\mathcal{L}}$ yra toks minimalus uždaras $H(D_{\mathcal{L}})$ poaibis, kad

$$\hat{m}_H\Big(\hat{\omega} \in \hat{\Omega} :\ \mathcal{L}(s, \hat{\omega}) \in S_{\mathcal{L}}\Big) = 1. \tag{3.18}$$

Be to, laikantis teoremos reikalavimo, buvo įrodyta [9], kad $H^u(D)$-reikšmio atsitiktinio elemento atrama $(\zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{11}), ..., \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{a}_{rl_r}))$ yra aibė $H^u(D)$, t.y., $H^u(D)$ yra toks minimalus uždaras $H^u(D)$ poaibis, kad

$$\widetilde{m}_H\Big((\omega_1, ..., \omega_r) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r : (\zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{11}), ..., \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{a}_{rl_r})) \in H^u(D)\Big) = 1.$$

Taigi, iš čia bei (3.18) ir (3.17) lygybių išplaukia teoremos patvirtinimas.

3.3. Pagrindinės teoremos įrodymas

Pagrindinės teoremos apie mišrųjį jungtinį universalumą (žr. magistro darbo įvade) įrodymas remiasi (3.1) ir (3.2) teoremomis bei Mergeliano (Mergelyan) teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais [14], [22].

Pagrindinės teoremos įrodymas. Pagal Mergeliano teoremą, egzistuoja tokie polinomai $p(s)$ ir $p_{jl}(s)$, kad

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\epsilon}{4} \tag{3.19}$$

ir

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |f_{jl}(s) - p_{jl}(s)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.20}$$

Kadangi $f(s) \neq 0$ aibėje K, turime, kad $p(s) \neq 0$ aibėje K, jei ϵ yra pakankamai mažas. Šis teiginys ir Mergeliano teorema patvirtina, kad egzistuoja toks polinomas $q(s)$, kad

$$\sup_{s\in K} \left|p(s) - \mathrm{e}^{q(s)}\right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Taigi, (3.19) nelygybė leidžia matyti, kad

$$\sup_{s\in K} \left|f(s) - \mathrm{e}^{q(s)}\right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.21}$$

Apibrėžiame aibę

$$G = \Bigg\{(g, g_{11}, ..., g_{rl_r}) \in H^v : \quad \sup_{s\in K} \left|g(s) - \mathrm{e}^{q(s)}\right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |g_{jl}(s) - p_{jl}(s)| < \frac{\epsilon}{2}\Bigg\}.$$

Tuomet G yra atviroji aibė. Tada, pagal 3.2 teoremą, $\left(\mathrm{e}^{q(s)}, p_{11}(s), ..., p_{rl_r}(s)\right)$ yra mato P_Z atramos elementas. Todėl iš atramos savybių turime, kad $P_Z(G) > 0$. Iš čia ir 3.1 teoremos, G yra atramos elemento atviroji aplinka ir

$$\liminf_{T\to\infty} P_T(G) \ge P_Z(G) > 0.$$

Remiantis aibės G apibrėžimu, gauname nelygybę

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\Bigg\{\tau \in [0, T] : \quad \sup_{s\in K} \left|\mathcal{L}(s + i\tau) - \mathrm{e}^{q(s)}\right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) - p_{jl}(s)| < \frac{\epsilon}{2}\Bigg\} > 0.$$

Lieka $e^{q(s)}$ pakeisti funkcija $f(s)$, o polinomus $p_{jl}(s)$ funkcijomis $f_{jl}(s)$. Tuomet iš (3.21) ir (3.20) nelygybių gauname pagrindinės teoremos patvirtinimą.

REZULTATAI IR IŠVADOS

Magistro darbe nagrinėta mišriojo universalumo savybė, koncentruojantis ne į daugelyje darbų įrodytą dviejų funkcijų (iš kurių viena turi sandaugą pagal pirminius skaičius, o kita - ne) mišrųjį universalumą, o į **funkcijų rinkinių** mišrųjį universalumą.

Įrodyta teorema apie analizinių funkcijų rinkinio aproksimavimą L funkcijų iš Selbergo klasės $\mathcal{S}$ (turinčių Oilerio sandaugą) bei periodinių Hurvico dzeta funkcijų (neturinčių Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius) postūmiais.

Įrodyta teorema yra *tolydaus tipo*, kai dzeta ir L funkcijų postūmiai įgyja bet kokias realias reikšmes. Šį darbą būtų galima pratęsti, įrodant *diskretaus tipo* teoremą, kai postūmiai įgyja reikšmes iš diskrečios sekos, tarkime, aritmetinės progresijos. Tyrimai gali būti tęsiami ir su kitomis parametro α reikšmėmis.

Mišrusis dzeta funkcijų universalumas gali būti taikomas mišraus jungtinio šių funkcijų funkcinio nepriklausomumo tyrimui.

LITERATŪRA

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York (1968); second ed., Willey-Interscience (1999).

[2] K. M. Bitar, N. N. Khuri, H. C. Ren, Path integrals and Voronin's theorem on the universality of the Riemann zeta function. *Annuals of Physics*, 67, 172–196 (1991).

[3] A. O. Gel'fond, On the algebraic independence of transcendental numbers of certain classes. *Uspekhi Mat. Nauk*, 4(5), 14–48 (1949).

[4] J. Genys, R. Macaitienė, S. Račkauskienė, D. Šiaučiūnas, A mixed joint universality theorem for zeta-functions. *Math. Model. Anal.*, 15(4), 431–446 (2010).

[5] A. Javtokas, A. Laurinčikas, On the periodic Hurwitz zeta-function. *Hardy Ramanujan Journal*, 29, 18–36 (2006).

[6] R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, The joint distribution of periodic zeta-functions. *Stud. Scien. Math. Hungarica*, 48(2), 257–279 (2011).

[7] A. Laurinčikas, Joint universality of zeta-functions with periodic coefficients. *Izv. Math.*, 74(3), 515–539 (2010).

[8] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for Riemann Zeta–Function.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, etc. (1996).

[9] A. Laurinčikas, D. Skerstonaitė, Joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions. II. *New Directions in Value distribution Theory of Zeta and L-functions, Proc. Würzburg Conf., 2008*, 161–169 (2009).

[10] A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, A mixed joint universality theorem for zeta-functions. III, in: *Analytic Prob. Methods Number Theory, J. Kubilius Memorial Volume, A. Laurinčikas et al. (eds.)*, TEV, Vilnius, 185–195 (2012).

[11] R. Macaitienė, On joint universality for the zeta-functions of new forms and periodic Hurwitz zeta-functions. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B34, 217–233 (2012).

[12] R. Macaitienė, On the value distribution of L-functions from the Selberg class. *J. Math. Sciences*, 180(5), 599–609 (2012).

[13] K. Matsumoto, A survey on the theory of universality for zeta and L-functions. *In Number Theory: Plowing and Starring through High Wave forms. Proceedings of the 7th China-Japan Seminar. Series on Number Theory and Its Applications, 11, World Scientific Publ.* 95–144 (2015).

[14] S. N. Mergelyan, Uniform approximations to functions of complex variable. *Uspekhi. Mat. Nauk,* 7, 31–122 (1952).

[15] H. Mishou, The joint value distribution of the Riemann zeta-function. *Lith. Math. J.*, 47, 32–47 (2007).

[16] H. Nagoshi, J. Steuding, Universality for L-functions in the Selberg class. *Lith. Math. J.*, 50(163), 293–311 (2010).

[17] V. Pocevičienė, D. Šiaučiūnas, A mixed joint universality theorem for zeta-functions. II. *Math. Model. Anal.*, 19, 52–65 (2014).

[18] A. Perelli, A survey of the Selberg class of L-functions I.. *Milan J. Math.* 73, 19–52 (2005).

[19] J. Sander, J. Steuding, Joint universality for sums and products of Dirichlet L-functions. *Analysis*, 26, 295–312 (2006).

[20] J. Steuding, *Value distribution of L-Functions.* Lecture Notes Math, Vol. 1877, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg (2007).

[21] S. Voronin, Theorem on the 'universality' of the Riemann zeta-function. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 39, 475–486 (1975).

[22] J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 20 (1960).

SANTRAUKA

MIŠRUSIS JUNGTINIS SELBERGO KLASĖS L FUNKCIJŲ IR PERIODINIŲ HURVICO DZETA FUNKCIJŲ UNIVERSALUMAS

Daugiau kaip prieš 40 metų S. M. Voroninas atrado vieną įdomiausių skaičių teorijos fenomenų – Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ universalumą. Tai reiškia, jog analizinės funkcijos juostos $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ kompaktiškuose poaibiuose gali būti tolygiai aproksimuojamos Rymano dzeta postūmiais $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Vėliau pasirodė, kad ir kitos klasikinės dzeta ir L funkcijos taip pat yra universalios Voronino prasme. Be to, kai kurios dzeta ir L funkcijos turi jungtinio universalumo savybę – tokiu atveju analizinių funkcijų rinkinys tolygiai aproksimuojamas dzeta ar L funkcijų postūmiais.

2007 m. H. Mišu (Mishou) pirmasis įrodė mišriojo universalumo teoremą Rymano ir Hurvico dzeta funkcijoms. Plačiąja prasme, mišrusis universalumas suprantamas kaip jungtinis funkcijų, turinčių ir neturinčių Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius, universalumas.

Magistro darbe nagrinėjami mišriojo universalumo klausimai ir įrodoma mišriojo jungtinio Selbergo klasės L funkcijų ir periodinių Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcijų universalumo teorema. Tiksliau, nagrinėjama A. Selbergo (Selberg) apibrėžtos klasės $\mathcal{S}$ funkcijų, užrašomų Dirichlė eilute ir tenkinančių tam tikras specifines sąlygas (tarp kurių ir Oilerio sandaugos egzistavimas) bei papildomą sąlygą vidurkio kvadratui pagal pirminius skaičius ir Hurvico dzeta funkcijų apibendrinimo – periodinių Hurvico dzeta funkcijų (kurios neturi Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius) universalumo savybė.

Universalumo teoremos įrodymui taikomi tikimybiniai metodai. Pirmiausia įrodoma ribinė teorema apie tikimybinių matų analizinių funkcijų erdvėje silpnąjį konvergavimą. Tuomet pritaikoma Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais, kuri vaidina ypač svarbų vaidmenį įrodant universalumo teoremą.

Mišraus universalumo rezultatas gali būti panaudotas nagrinėtų funkcijų funkcinio nepriklausomumo savybės įrodymui.

SUMMARY

MIXED JOINT UNIVERSALITY FOR L-FUNCTIONS FROM SELBERG'S CLASS AND PERIODIC HURWITZ ZETA-FUNCTIONS

Over 40 years ago, S. M. Voronin discovered one of the most interesting phenomenons of analytic number theory – the universality property of the Riemann zeta-function $\zeta(s), s = \sigma + it \in \mathbb{C}$. Roughly speaking, this means that analytic functions from a wide class can be approximated uniformly on compact subsets of the strip $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 \ < \sigma < 1\}$ by shifts $\zeta(s + i\tau), \ \ \tau \in \mathbb{R}$. Later, it turned out that other classical zeta and L-functions are also universal in the Voronin sense. Moreover, some zeta and L-functions have a joint universality property. In this case, a given collection of analytic functions is approximated simultaneously by shifts of zeta and L-functions.

The so-called mixed joint universality was initiated by H. Mishou who in 2007 obtained the joint universality for the Riemann zeta and Hurwitz zeta-functions. In a wide sense, the mixed joint universality is understood as a joint universality for zeta and L-functions having and having no Euler product.

The Master Thesis contains the universality questions for L-functions from Selberg class $\mathcal{S}$, i.e. for Dirichlet series satisfying certain specific hypotheses and additional prime mean-square hypotheses (including the Euler product), and periodic Hurwitz zeta-functions that are a generalization of classical Hurwitz zeta-functions (these functions have no Euler product). More precisely, in the Master Thesis, a new result on mixed joint universality for L-functions from the Selberg class and periodic Hurwitz zeta-functions is obtained.

For the proof, some probabilistic methods are applied. Firstly, limit theorem on the weak convergence of probability measures in the space of analytic functions is obtained. Then, the Mergelyan theorem on approximation of analytic functions by polynomials plays an important role for proving the universality. The result of mixed universality can be used to prove a functional independence properties of these functions.