

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
REGIONŲ PLĖTROS INSTITUTAS

Silva Gubinskytė

(Matematikos studijų programa, valstybinis kodas: 6211AX010)

**Diskretusis vieno Selbergo klasės poklasio
 L funkcijų universalumas**

Magistro darbas

Darbo vadovė

prof. dr. Renata Macaitienė

Šiauliai, 2020

Turinys

ĮVADAS	3
1 SELBERGO KLASĖ	5
1.1 Selbergo klasės apibrėžimas	5
1.2 Selbergo klasės poklasiai	8
2 UNIVERSALUMO SĄVOKA	10
3 TOLYDŽIOJI UNIVERSALUMO TEOREMA	12
4 DISKREČIOJI UNIVERSALUMO TEOREMA	13
4.1 Atvejis, kai $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš Q	13
4.2 Atvejis, kai $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ yra tiesiškai priklausoma virš Q	20
4.3 Pagrindinės teoremos įrodymas	23
REZULTATAI IR IŠVADOS	26
LITERATŪRA	27
SANTRAUKA	28
SUMMARY	29

ĮVADAS

Aktualumas. Matematikoje nagrinėjamos įvairių tipų eilutės, tarp kurių ir skaičių teorijoje labai svarbus objektas – Dirichlė eilutės, kurios vaidina esminį vaidmenį kaip generuojančiosios aritmetinių objektų funkcijos bei turinčios platų pritaikymą. Kompleksinio kintamojo funkcijos, tam tikroje pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė (Dirichlet) eilutėmis

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad s = \sigma + it,$$

vadinamos dzeta arba L funkcijomis. Čia $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ – kompleksinių skaičių seka, $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ – nemažėjanti realiųjų skaičių seka, tokia, kad $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = +\infty$. Tokio tipo eilutės vadinamos bendrosiomis Dirichlė eilutėmis su koeficientais a_m ir rodikliais λ_m . Jeigu $\lambda_m = \log m$, turime paprastąją Dirichlė eilutę $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}$.

Viena iš labai svarbių Dirichlė eilutėmis užrašomų dzeta ir L funkcijų savybių yra ta, kad analizinė tam tikrose kompaktinėse aibėse funkcijas galima tolygiai aproksimuoti jų postūmiais. Ši savybė vadinama *universalumu* (plačiau apie tai 2 magistro darbo skyriuje). Nagrinėjami du universalumo atvejai: *tolydusis* (kai postūmiai įgyja bet kurias realiąsias reikšmes) ir *diskretusis* (kai postūmiai imami iš tam tikros diskrečiosios aibės). Liniko - Ibrahimovo (Linnik - Ibrahimow) hipotezė [10] teigia, jog funkcijos, tam tikroje pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilute, analiziškai pratęsimos į kairę nuo absoliutaus konvergavimo pusplokštumės ir tenkinančios kai kurias augimo sąlygas, yra universalios (Voronino prasme). Rasta daug universalų dzeta ir L funkcijų, tokio tipo teoremas pateikė S. M. Voroninas (Voronin), B. Bagči (Bagchi), H. Bauer (Bauer), K. Matsumoto, J. Štaudingas (Steuding), A. Laurinčikas, R. Macaitienė ir daug kitų mokslininkų. Tačiau žinoma daug Dirichlė eilutėmis užrašytų funkcijų, kurios, deja, nėra universalios.

Magistro darbe nagrinėjamas Selbergo klasės L funkcijų universalumas, koncentruojantis į analizinių funkcijų apytikslavimą diskrečiais L funkcijų postūmiais, klausimą. Tolydujų šių funkcijų universalumą nagrinėjo H. Nagoši (Nagoshi) ir J. Štaudingas (Steuding) [7], [9]. Jų darbai aptarti 3 magistro darbo skyriuje.

Problema. Praktiniuose taikymuose kur kas naudingesnis yra diskretusis universalumas. Tokiu atveju L funkcijų postūmiai perbėga tam tikrą diskrečią aibę; tarkime, įgyja reikšmes iš aritmetinės progresijos $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$, h – teigiamas fiksuotas skaičius. Tačiau šis atvejis yra gana sudėtingas, tokio tipo rezultatų yra gerokai mažiau, nes integralus reikia pakeisti sumomis.

Objektas. Nagrinėjamos paprastosios Dirichlė eilutės, turinčios Oilerio sandaugą, analizinį pratęsimą, Rymano tipo funkcinę lygtį ir tenkinančios Ramanudžano hipotezę koeficientams a_m , klasė. Tokių funkcijų klasė $\mathcal{S}$ pavadinta *Selbergo* vardu (plačiau apie Selbergo klasę pateikiame 1.1 poskyryje). Universalumo savybė įrodoma išplėsto, J. Štaudingo apibrėžto klasės $\mathcal{S}$ poklasio $\tilde{\mathcal{S}}$ funkcijoms, atsisakius polinominės Oilerio sandaugos reikalavimo. Išsami poklasio analizė bei funkcijų pavyzdžiai pateikiami 1.2 poskyryje.

Magistro darbo tikslas – įrodyti diskretaus universalumo teoremą tam tikro Selbergo klasės poklasio funkcijoms.

Pažymėkime $\sigma_L = \max \left\{ \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{d_L} \right\}$, kur d_L – funkcijos L laipsnis [8]. Kaip įprastai, $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$, $p \in \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ žymi pirminių skaičių aibę), $h > 0$.

Pagrindinė teorema. *Tarkime, $L \in \mathcal{S}$ ir tenkina papildomą sąlygą*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 = \kappa, \quad \kappa > 0.$$

Tegul K yra kompaktinė juostos $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_L < \sigma < 1\}$ aibė su jungiuoju papildiniu, o funkcija $f(s)$ yra tolydi, nelygi nuliui aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |L(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Čia $\#A$ žymi aibės A elementų skaičių.

Metodai. Universalumo teoremų įrodymui taikomi tikimybiniai metodai. Pirmiausia, gaunamos ribinės teoremos apie tikimybinių matų analizinių funkcijų erdvėje silpnąjį konvergavimą, po to taikomas silpnąjo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentas tolydumo aibės terminais. Svarbų vaidmenį įrodant universalumą atlieka Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais.

Taikymas. Universalumo rezultatai taikomi dzeta ir L funkcijų funkcinio nepriklausomumo, saviaproksimacijos ir nulių pasiskirstymo klausimams nagrinėti. Diskretaus universalumo rezultatai ypač svarbūs, nagrinėjant įvairius aibių tirštumo klausimus.

Darbo struktūra. Magistro darbą sudaro įvadas, 4 skyriai, išvados, literatūros sąrašas bei santraukos lietuvių ir anglų kalbomis. Apibrėžimai, teoremos, lemos ir formulės numeruojamos skaičiais, nurodant skyriaus, poskyrio bei objekto numerį skyriuje. Teoremų ir lemų įrodymų pabaiga žymima simboliu $\triangle$.

Aprobacija. Magistro darbo rezultatai pristatyti *Studentų mokslinių darbų konferencijoje* 2019 m. gruodžio 20 d. Šiaulių universitete.

1 SELBERGO KLASĖ

Šiame skyriuje pateikiamas pagrindinio magistro darbe naudojamo objekto – Selbergo klasės funkcijų – apibrėžimas, pavyzdžiai, supažindinama su matematikų nagrinėjamais Selbergo klasės poklasiais. Funkcijos, priklausančios vienam iš poklasių, naudojamos magistro darbe, siekiant įrodyti, jog jų diskrečiaisiais postūmiais galima aproksimuoti analizinės funkcijas.

1.1 Selbergo klasės apibrėžimas

Magistro darbe nagrinėsime paprastųjų Dirichlė eilučių

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s}, \quad s \in \mathbb{C},$$

tenkinančių žemiau išvardintas sąlygas, klasę $\mathcal{S}$, pavadintą Selbergo (A. Selberg¹) vardu.

Funkcijos $L(s) \in \mathcal{S}$ tenkina reikalavimus [5]:

(1) kiekvienam $\epsilon > 0$, $a(m) \ll m^\epsilon$ (jei tenkinama ši Ramanudžano hipotezė, funkcija $L(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > 1$: eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > 1$ ir tolygiai kiekviename kompaktiškame jos poaibyje);

(2) egzistuoja toks sveikasis skaičius $r \geq 0$, kad $(s-1)^r L(s)$ yra sveikoji baigtinės eilės funkcija (analizinio pratęsimo sąlyga nurodo, jog egzistuoja mažiausiai vienas polius taške $s = 1$);

(3) egzistuoja tokie realieji teigiami sveikieji skaičiai Q ir λ_j bei kompleksiniai skaičiai μ_j ($\Re \mu_j \geq 0$) ir ω ($|\omega| = 1$), $j = 1, \dots, l$, kad funkcija

$$\Lambda_L(s) = L(s) Q^s \prod_{j=1}^l \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$$

tenkina funkcinę lygtį

$$\Lambda_L(s) = \omega \overline{\Lambda_L(s)(1 - \bar{s})};$$

čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija; be to, jei $L \in \mathcal{S}$, tuomet $\Lambda_L(s) \leq x \log^2 x$ [6];

(4) egzistuoja tokie kompleksiniai skaičiai $b(p^\alpha)$, tenkinantys įvertį $b(p^\alpha) \ll p^{\alpha\theta}$ su $\theta < \frac{1}{2}$, kuriems $L(s)$ užrašoma Oilerio sandauga:

$$L(s) = \prod_p \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{b(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} \right\}.$$

Nesunku įrodyti, kad kiekvienas Oilerio faktorius $\alpha_p(s) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{b(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}$ absoliučiai konver-

¹Atle Selberg (1917 – 2007) – norvegų matematikas, žinomas dėl svarių rezultatų analizinėje skaičių teorijoje bei automorfinių formų teorijoje. A. Selbergas ne tik apibrėžė klasę $\mathcal{S}$, bet ir suformulavo tam tikras hipotezes šios klasės funkcijoms.

guoja pusplotštumėje $\sigma > 0$ ir nelygus nuliui $\sigma > \theta$.

Selbergo klasei $\mathcal{S}$ priklauso Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, Dirichlė L funkcijos $L(s, \chi)$ su primityviuoju charakteriu χ , Hekės L funkcijos $L_K(s, \chi)$, susietos su algebrinių skaičių lauku, normuotos L funkcijos, susijusios su naujausiomis formomis, Dedekindo dzeta funkcija $\zeta_K(s)$, Rankino - Selbergo L funkcijos ir daug kitų.

Pateikiame keletos funkcijų detalią analizę, remiantis minėtais reikalavimais Selbergo klasės funkcijoms. Pavyzdžiui:

- Rymano dzeta funkcija, kuri pusplotštumėje $\sigma > 1$, apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą $\mathbb{C}$, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra jos paprastasis poliūs. $\zeta(s)$ tenkina funkcinę lygtį

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

- Dirichlė L funkcija, kuri pusplotštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

čia χ – Dirichlė charakteris moduli q , $L(s, \chi)$ meromorfiškai pratęsiama į visą $\mathbb{C}$, išskyrus galimą polių taške $s = 1$. Beje, tai galioja tik kai χ yra pagrindinis charakteris. Dirichlė L funkcijos tenkina funkcinę lygtį:

$$\left(\frac{\pi}{d}\right)^{-\frac{1-s+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right) L(1-s, \bar{\chi}) = \frac{i^\delta \sqrt{d}}{\tau(\chi)} \left(\frac{\pi}{d}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi),$$

kai $\chi(m)$ – primityvusis charakteris moduli d .

A. Selbergas ne tik apibrėžė klasę $\mathcal{S}$, bet ir suformulavo tam tikras hipotezes šios klasės funkcijoms (keletą jų pateiksime skyriaus pabaigoje). Išsamią analizę apie Selbergo klasės funkcijas galima rasti A. Perelli, M. Muray, L. Zheng darbuose, [6], [8], [11].

Prisiminsime, jog išplėstoji Selbergo klasė $S^\#$ susideda iš funkcijų, tenkinančių tik (2) ir (3) reikalavimus. Įdomu tai, jog į išplėstąją Selbergo klasę patenka ir funkcijos, kurioms negalioja Rymano hipotezės analogas. Pavyzdžiui, Davenporto - Heibrono dzeta funkcija, kuri apibrėžiama tam tikra dviejų Dirichlė L funkcijų tiesine kombinacija. Akivaizdu, jog visos $L(s) \in \mathcal{S}$, priklauso ir $S^\#$, pavyzdžiui:

- Hekės L funkcijos

$$L_K(s, \chi) = \sum_I \frac{\chi(I)}{N(I)^s}, \quad \sigma > 1,$$

susietos su algebrinių skaičių lauku K , čia I perbėga nenulinius idealus sveikųjų skaičių žiede iš K , $N(I)$ žymi I normą, χ – baigtinės ar begalinės eilės Hekės charakterį. Kai $K = \mathbb{Q}$, $L_K(s, \chi)$ susiveda į $L(s, \chi)$; kai $\chi = 1$, turime Dedekindo dzeta funkciją [5].

- Holomorfinių modulinių formų Hekės L funkcijos (su atitinkamais apribojimais ir normavimu)

$$L_F(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad c(p) = \alpha(p) + \beta(p),$$

kur $c(m)$ yra modulinės formos $F(z)$, išskleistos Furje eilute, koeficientai.

- Dedekindo dzeta funkcija

$$\zeta_K(s) = \sum_I \frac{1}{N(I)^s} = \prod_p \left(1 - N(p)^{-s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1,$$

kur I perbėga visus nelygius nuliui lauko K idealus, o p – pirminius idealus [10].

- Artino L funkcijos, jei teisinga Artino hipotezė [4].
- L funkcijos, susijusios su modulinėmis formomis.
- L funkcijos $L(s, E)$, susietos su elipsinėmis kreivėmis $E/\mathbb{Q}$ ir dzeta funkcijomis

$$L_p(s, E) = \begin{cases} (1 - a(p)p^{-s} + p^{1-2s}), & \text{jei } p \nmid N; \\ (1 - a(p)p^{-s}), & \text{jei } p \parallel N; \\ 1, & \text{jei } p^2 \mid N, \end{cases}$$

čia $a(p) = p + 1$, jei $p \nmid N$, $a(p) = \pm 1$ su $p \parallel N$. L funkcijos, susietos su E , apibrėžiamos sandauga $L(s, E) = \prod_p L_p(s, E)$ [11].

Kaip jau minėta, A. Selbergas suformulavo ir daug hipotezių klasės $\mathcal{S}$ funkcijoms. Jų pateikiame magistro darbe.

1.1 hipotezė [9]. Jei $L \in \mathcal{S}$, tuomet, pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, $L(s) \neq 0$.

1.2 hipotezė [9]. Kiekvienai funkcijai $L \in \mathcal{S}$ egzistuoja toks teigiamas sveikasis skaičius n_F , kad tenkinamas įvertis

$$\sum_{p \leq x} \frac{|a_F(p)|^2}{p} = n_F \log \log x + O(1)$$

(t.y. funkcijai, kuri negali būti užrašoma jokių funkcijų $F \in \mathcal{S}$ sandauga).

1.3 hipotezė [9]. Kiekvienai primityviajai funkcijai L_1 ir L_2 tenkinama asimptotinė

formulė

$$\sum_{p \leq x} \frac{a_{L_1}(p) \overline{a_{L_2}(p)}}{p} = \begin{cases} \log \log x + O(1), & \text{jei } L_1 = L_2, \\ O(1), & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Atsižvelgiant į faktorizavimą primityviosiomis funkcijomis, nesunku matyti, jog iš 1.3 hipotezės seka 1.2 hipotezė. Be to, atskirais atvejais nėra sunku patikrinti 1.2 hipotezę. Pavyzdžiui, $\zeta(s)$ tenkina 1.2 hipotezę, nes, atsižvelgus į pirminių skaičių teoremą ir pasinaudojus sumavimo dalimis formule, nesunku įrodyti, jog egzistuoja tokios konstantos c_1 ir c_2 , kad $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + c_1 + O(\exp(-c_2 \sqrt{\log x}))$. Taip pat A. Selbergo hipotezės nusako L funkcijų analizinę elgesį ant kritinės juostos krašto. Pavyzdžiui, remdamiesi A. Selbergo 1.3 hipotezės teisingumu, A. Konris ir M. Gošas (Conrey, Ghosh) nurodė Selbergo klasės funkcijų elgesį pusplokštumėje $\sigma \geq 1$, t.y. jog $L(s) \neq 0$.

1.2 Selbergo klasės poklasiai

Nagrinėti Selbergo klasės funkcijų reikšmių pasiskirstymą labai sudėtinga, todėl pastarąjį dešimtmetį matematikai analizuoja įvairius Selbergo klasės poklasių, vienas iš jų – 2003 m. J. Štaudingo (Steuding) apibrėžtas poklasis $\tilde{\mathcal{S}}$ [9]. Šiam poklasiui $\tilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$ priklauso L funkcijos, tenkinančios papildomus reikalavimus:

- kiekvienam pirminiam skaičiui p ir $j = 1, \dots, k$, egzistuoja tokie kompleksiniai skaičiai $c_j(p)$, $|c_j(p)| \leq 1$, kad

$$L(s) = \prod_p \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{c_j(p)}{p^s} \right)^{-1}, \quad (1.2.1)$$

(sąlyga $|c_j(p)| \leq 1$ pakeičia Ramanudžano hipotezę Selbergo klasėje; be to, egzistuoja be galo daug pirminių skaičių, kuriems $c_j(p)$ gali artėti į nulį [2]);

- egzistuoja tokia konstanta $\kappa > 0$, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 = \kappa, \quad (1.2.2)$$

čia, kaip įprasta, $\pi(x)$ žymi pirminių skaičių, neviršijančių x , skaičių.

Selbergo klasės poklasiui $\tilde{\mathcal{S}}$ priklauso Rymano dzeta funkcija, Dirichlė L funkcijos su primityviuoju charakteriu, Hekės L funkcijos, normuotos naujųjų formų L funkcijos. Ribines teoremas šio poklasio funkcijoms pateikė J. Štaudingas.

Kitas, plačiai nagrinėtas išplėtosios Selbergo klasės L funkcijų poklasis $\mathcal{S}^{\#b}$, 2012 m. buvo apibrėžtas L. Smajlovičiaus ir A. D. Drollo [1]: $\mathcal{S}^{\#} \supseteq \mathcal{S}^{\#b} \supseteq \mathcal{S}$. Jį sudaro L funkcijos

iš klasės $\mathcal{S}^\sharp$, tenkinančios papildomą modifikuotos Oilerio sandaugos egzistavimo sąlygą: pusplokštumėje $\sigma > 1$, $\frac{d}{ds} \log L(s)$ gali būti išreikšta absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute

$$\frac{d}{ds} \log L(s) = \frac{L'(s)}{L(s)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_L(n)}{n^s},$$

kur koeficientas $c_L(n)$ – kompleksinis skaičius kiekvienam sveikajam skaičiui $n \geq 2$ [1]. Tai yra, pusplokštumėje $\sigma > 1$, $\frac{L'(s)}{L(s)}$ gali būti išreikšta absoliučiai konverguojančia eilute. Be to, A. Drolas įrodė teoremą [1], jog kiekviena Selbergo klasės S funkcija priklauso ir klasei $S^{\sharp b}$. Pateiksime keletą įdomių faktų apie funkcijas iš klasės $S^{\sharp b}$ [1].

Funkcijos $F \in S^{\sharp b}$ netrivialiųjų nulių $\rho = \sigma + it$ aibę žymėsime $Z(F)$. Tegul $0 \notin Z(F)$, tuomet kiekvienam $n \in \mathbb{Z}$ ir $\tau \geq 1$, $\tau \in \mathbb{R}$, apibrėžkime sumą

$$\lambda_n(F, \tau) = \sum_{Z(F)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho - \tau} \right)^n \right).$$

A. Drolas pateikė keletą rezultatų, susijusių su netrivialiųjų nulių aibe $Z(F)$ [1]. Tegul $F \in S^{\sharp b}$ ir $0 \notin Z(F)$. Tuomet teisingi šie teigimai:

- $\lambda_n(F, \tau) = \sum_{Z(F)} (1 - (\frac{\rho}{\rho - \tau})^n)$ konverguoja su kiekvienu sveikuoju skaičiumi n ;
- suma $\sum_{Z(F)} \Re[1 - (\frac{\rho}{\rho - \tau})^n]$ absoliučiai konverguoja kiekvienam sveikajam skaičiui n .

Magistro darbe nagrinėsime funkcijų, priklausančių J. Štaudingo poklasiui $\tilde{S}$, analizinę elgesį.

2 UNIVERSALUMO SĄVOKA

Šiame skyriuje trumpai aptarsime universalumo sąvoką ir pateiksime pirmuosius rezultatus Rymano dzeta funkcijai.

Pirmąjį universalumo rezultatą 1914 metais gavo M. Feketė (Fekete). Jis įrodė, jog egzistuoja tokia realioji laipsninė eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m, \quad x \in [-1, 1], \quad (2.1)$$

kuri diverguoja su visomis $x \neq 0$ reikšmėmis, ir šis divergavimas yra toks blogas, kad su kiekviena tolydžiąja funkcija $f(x)$, $x \in [-1, 1]$, $f(0) = 0$, egzistuoja tokia didėjanti teigiamų sveikųjų skaičių n_k seka, kad

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m \leq n_k} a_m x^m = f(x)$$

konverguoja tolygiai, kai $x \in [-1, 1]$. Akcentuojame tai, jog įrodytas tik (2.1) eilutės egzistavimas, tačiau nėra žinoma jos išreikštinė forma. Vėliau rasta daug universaliųjų tam tikra prasme objektų, tačiau išreikštiniu pavidalu jie nebuvo pateikti.

1975 metais S. M. Voroninas (Voronin) pateikė [10] pirmąjį išreikštinį universalųjį tam tikra prasme objektą – Rymano dzeta funkciją ir įrodė šią teoremą.

2.1 teorema [10]. *Tegul $0 < r < \frac{1}{4}$, $f(s)$ tolydžioji ir neįgyjanti nulių skritulyje $[s] \leq r$ funkcija bei analizinė to skritulio viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks realusis skaičius $\tau = \tau(\varepsilon)$, kad*

$$\max_{|s| \leq r} \left| \zeta \left(s + \frac{3}{4} + i\tau \right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Šiuo metu žinoma kur kas bendresnė S. M. Voronino teoremos versija, kurią pateikė A. Laurinčikas. Ją galima rasti daugelyje mokslo darbų, pavyzdžiui, [2].

2.2 teorema [2]. *Tegul K yra juostos*

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1 \right\}$$

kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o $f(s)$ yra tolydžioji ir neįgyjanti nulių aibėje K funkcija bei analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Ši nelygybė teigia, jog yra be galo daug realiųjų skaičių τ , kad kiekviena duota analizinė funkcija norimu tikslumu gali būti aproksimuojama Rymano dzeta funkcijos postūmiais $\zeta(s + i\tau)$, tiksliau, tokių postūmių τ aibės apatinis tankis yra teigiamas.

2.2 teorema turi ir diskretųjį analogą, kurį pateikė B. Bagčis (Bagchi). Šiuo atveju τ

įgyja reikšmes iš tam tikros diskrečiosios aibės.

2.3 teorema[9]. Tegul $h > 0$ yra fiksuotas skaičius, o K ir $f(s)$ yra tokie pat, kaip ir 2.2 teoremoje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq m \leq N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + imh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

S. M. Voroninas pastebėjo, jog ir kai kurios kitos dzeta ir L funkcijos taip pat turi panašią aproksimavimo savybę, t.y., jis įrodė Dirichlė L bei Hurvico dzeta funkcijų su racionaliuoju parametru universalumą. Voronino tyrimus tęsė S. M. Gonekas, B. Bagčis, J. Štaudingas, A. Laurinčikas, R. Macaitienė ir kiti.

Kaip jau minėjome įvade, Liniko – Ibragimovo (Linnik – Ibragimov) hipotezė teigia, kad funkcijos, tam tikroje pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilute, analiziškai pratęsimos į kairę nuo absoliutaus konvergavimo pusplokštumės ir tenkinančios kai kurias natūraliąsias augimo sąlygas, yra universaliosios Voronino prasme. Magistro darbe taip pat pateiksime L funkcijų, priklausančių J. Štaudingo apibrėžtam poklasiui $\tilde{\mathcal{S}}$, universalumo tyrimų rezultatus, patvirtinančius Liniko – Ibragimovo hipotezę.

3 TOLYDŽIOJI UNIVERSALUMO TEOREMA

Selbergo klasės struktūrą nagrinėjo J. Kaczorowski ir A. Perelli, M. Muray, o šių funkcijų tolydųjį universalumą – J. Štaudingas. Jis nagrinėjo universalumą (Voronino prasme) funkcijoms $L(s) \in \tilde{S}$ [1] (apie poklasį $\tilde{S}$ rašėme 1.2 poskyryje). Vėliau kartu su H. Nagoši jie panaikino (1.2.1) reikalavimą ir įrodė tolydžiojo universalumo teoremą platesnei funkcijų klasei. Tam, kad suformuluotumėme naujausią H. Nagoši ir J. Štaudingo rezultatą [7], reikalingi pažymėjimai ir sąvokos.

3.1 apibrėžimas [8]. *Funkcijos $L(s) \in \mathcal{S}$ laipsnis yra skaičius $d = 2 \sum_{j=1}^f \lambda_j$, kur $\lambda_j \in \mathbb{C}$ yra skaičiai iš funkcinės lygties.*

Pavyzdžiui, $\zeta(s)$ laipsnis lygus 1, o normuotųjų holomorfinių naujųjų funkcijų formų L funkcijų laipsnis lygus 2. Be to, žinoma, jog:

- Jei $L(s) = 1$, tai $d_L = 0$;
- nėra tokių funkcijų $L(s) \in \mathcal{S}$, kurių $0 < d_L < 1$.

Tegul $\sigma_L = \max \left\{ \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L} \right\}$ ir

$$D = D_L = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_L < \sigma < 1\}.$$

Pažymėkime $\mathcal{K} = \mathcal{K}_L$ juostos D_L kompaktinių poaibių su jungiuoju papildiniu klasę, o $H_0(K) = H_{0L}(K)$, $K \in \mathcal{K}$ – tolydžių ir neįgyjančių nulių funkcijų klasę.

3.1 teorema [7]. *Tarkime, kad $L(s) \in \mathcal{S}$ ir tenkina (1.2.2) sąlygą. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |L(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Čia $\text{meas } A$ žymi mačios aibės A Lebego matą.

Ši teorema yra vadinama tolydžiąja universalumo teorema, nes menamosios dalies poslinkis τ gali įgyti bet kokią realiąją reikšmę. Ji parodo, jog L funkcijų postūmių, tolygiai aibėje K aproksimuojančiųjų duotą analizinę funkciją $f(s)$, aibė yra pakankamai turtinga: jos apatinis tankis yra teigiamas.

4 DISKREČIOJI UNIVERSALUMO TEOREMA

Įvade minėjome, jog diskrečiojo universalumo teoremoje, postūmiai įgyja reikšmės iš tam tikros diskrečiosios aibės, pavyzdžiui, iš aritmetinės progresijos $\{kh : k = 0, 1, 2, \dots\}$, kur h – fiksuotas teigiamas skaičius. Pirmasis diskretųjų universalumą Dedekindo dzeta funkcijai pateikė A. Reichas. Su diskrečiąja universalumo teorema Rymano dzeta funkcijai supažindiname ir 2 magistro darbo skyriuje. Šiame skyriuje pateiksime diskretųjų atvejį funkcijoms $L \in \tilde{\mathcal{S}}$.

Pažymėkime $\sharp A$ – aibės A elementų skaičių, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_L$ juostos D_L kompaktinių poaibių su jungiuoju papildiniu klasę, o $H_0(K) = H_{0L}(K)$, $K \in \mathcal{K}$ – tolydžiųjų ir neįgyjančių nulių funkcijų klasę.

Pagrindinė teorema. Tegul $L \in \mathcal{S}$ ir tenkina (1.2.2) sąlygą, $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{N+1} \sharp \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |L(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Šios teoremos įrodymui naudosime metodus, paremtus tikimybių matų silpno konvergavimo teorija analizinių funkcijų erdvėje. Pažymėkime $\mathbb{P}$ – visų pirminių skaičių aibę ir

$$L(\mathbb{P}, h, \pi) = \left\{ (\log p : p \in \mathbb{P}), \frac{\pi}{h} \right\}.$$

Magistro darbe nagrinėsime du atvejus, kai:

- (1) aibė $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$;
- (2) aibė $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ yra tiesiškai priklausoma virš $\mathbb{Q}$.

4.1 Atvejis, kai $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$

Šiame poskyryje įrodysime ribinę teoremą silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme, kai aibė $L(\mathbb{P}, h, \pi) = \{\log p : p \in \mathbb{P}, \frac{\pi}{h}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma. Pažymėkime γ vienetinį apskritimą $\{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Kaip įprastai, tegul $\mathbb{X}$ yra metrinė arba topologinė erdvė, o $\mathcal{B}$ žymi erdvės $\mathbb{X}$ Borelio aibių klasę. Apibrėžkime begaliniamatį erdvinį torą

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

kur $\gamma_p = \gamma$ su kiekvienu $p \in \mathbb{P}$. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba, Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė. Tuomet erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybė-

nis Haro matas m_H ; taigi, turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tarkime, kad $\omega(p)$ yra projekcija $\omega \in \Omega$ į koordinatinę erdvę γ_p , $p \in \mathbb{P}$. Tuomet $\{\omega(p) : p \in \mathbb{P}\}$ yra nepriklausomųjų, kompleksines reikšmes įgyjančiųjų, atsitiktinių kintamųjų seka, apibrėžta tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Pratęskime $\omega(p)$, $\omega \in \Omega$, į aibę $\mathbb{N}$:

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha | m, p^{\alpha+1} \nmid m} \omega^\alpha(p), m \in \mathbb{N}.$$

Magistro darbe bus naudojama atsitiktinio elemento sąvoka, todėl ją primename.

4.1.1 apibrėžimas. *Atsitiktiniu $\mathbb{X}$ -reikšmiu elementu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, vadiname funkciją $X : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$, su kiekviena Borelio aibe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, tenkinančia sąlyga*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Kaip ir ankstesniuose skyriuose, tegul $H(D)$ yra analizinių srityje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Apibrėžkime $H(D)$ -reikšmį atsitiktinį elementą

$$L(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\omega(m)}{m^s}.$$

Remiantis Ramanudžano reikalavimu (žr. 1.1 poskyrį) ir tuo, jog $|\omega(m)| = 1$, ši eilutė konverguoja absoliučiai pusplotštumėje $\sigma > 1$. Be to, remiantis Selbergo klasės apibrėžime nusakytu (4)-uoju reikalavimu (žr. 1.1 poskyrį), turime, kad koeficientai $a(m)$ yra multiplikatyvūs. Iš to seka, kad pusplotštumėje $\sigma > 1$, $L(s, \omega)$ galima užrašyti sandauga pagal pirminius skaičius

$$L(s, \omega) = \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a(p^\alpha)\omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right).$$

Tuomet $L(s, \omega)$ yra $H(D)$ -reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

4.1.2 apibrėžimas. *$\mathbb{X}$ -reikšmio atsitiktinio elemento X pasiskirstymu vadiname tikimybinę matą*

$$P(A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}).$$

Pažymėkime P_L atsitiktinio elemento $L(s, \omega)$ pasiskirstymą, tai yra, P_L – tikimybiniis matas erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$, apibrėžtas formule

$$P_L(A) = m_H \{\omega \in \Omega : L(s, \omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Liko apibrėžti tikimybinį matą

$$P_{N,h}(A) = \frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N : L(s + ikh) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Šiame poskyryje įrodysime ribinę teoremą, kuri bus naudojama pagrindinės teoremos įrodymui. Prieš tai priminsime tikimybio mato atramos apibrėžimą.

4.1.3 apibrėžimas. Mato P atrama yra vadinama minimali uždara aibė $S_P \subset X$, su kuria $P(S_P) = 1$. Aibė S_P yra sudaryta iš tokių erdvės X elementų x , kurių bet kuriai atvirai aplinkai G galioja nelygybė

$$P(G) > 0.$$

Be to, atsitiktinio elemento atrama yra vadinama to elemento pasiskirstymo atrama.

4.1.1 teorema. Tikimybiniis matas $P_{N,h}$, kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į P_L . Be to, mato P_L atrama užrašoma aibe

$$S_L = \{g \in H(D_L) : g(s) \neq 0 \text{ arba } g(s) \equiv 0\}.$$

Šiuo atveju, nesunku matyti, kad ribinis matas nepriklauso nuo h . Šios teoremos įrodymui bus reikalingi pagalbinių rezultatų. Juos formuluosime atskiromis lemomis.

Pirmiausiai įrodysime ribinę teoremą ant toro Ω , kur aibės $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ tiesinis nepriklausomumas vaidina pagrindinę rolę.

4.1.1 lema. Tikimybiniis matas

$$Q_{N,n,h}(A) = \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : (p^{-ikh} : p \in \mathbb{P}) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega),$$

kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H .

Įrodymas. Mato $Q_{N,h}$ Furje transformacija $g_{N,h}(\underline{k})$, $\underline{k} = (k_2, k_3, \dots)$ turi formą

$$\begin{aligned} g_{N,h}(\underline{k}), \underline{k} &= \int_{\Omega} \prod_p \omega^{k_p}(p) dQ_{N,h} = \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \prod_p p^{-k k_p h} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \exp \left\{ -ikh \sum_p k_p \log p \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

kur tik baigtiniai skaičiai k_p , $k_p \in \mathbb{Z}$, nėra lygūs 0. Akivaizdu, kad

$$g_{N,h}(\underline{0}) = 1. \quad (4.1.2)$$

Kadangi aibė $\{\log p : p \in \mathbb{P}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, su $\underline{k} \neq \underline{0}$, gauname, kad

$$\sum_p k_p \log p \neq 0.$$

Svarbu akcentuoti tai, jog, šiuo atveju,

$$\exp \left\{ ih \sum_p k_p \log p \right\} \neq 1. \quad (4.1.3)$$

Iš tiesų, jei (4.1.3) negaliojotų, tai

$$\sum_p k_p \log p = \frac{\pi r}{h},$$

kas prieštarautų reikalavimui apie $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ tiesinį nepriklausomumą. Taigi, naudodami

(4.1.3) ir (4.1.1), tuo atveju, kai $\underline{k} \neq \underline{0}$, gauname, jog

$$g_{N,h}(\underline{k}) = \frac{1 - \exp \left\{ ih (N+1) \sum_p k_p \log p \right\}}{(N+1) \left(1 - \exp \left\{ -ih \sum_p k_p \log p \right\} \right)}.$$

Remiantis (4.1.2) turime, kad

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_{N,h}(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jei } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Kadangi šios lygybės dešinė pusė yra Haro mato m_H Furje transformacija, lemos tvirtinimas seka iš gerai žinomos tikimybinių matų tolydumo kompaktiškose aibėse teoremos.

△

Dabar tegul $\theta > \sigma_L$ yra fiksuotas skaičius ir

$$v_n(m) = \exp \left\{ - \left(\frac{m}{n} \right)^\theta \right\}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Tuomet visiems $\omega \in \Omega$ eilutės

$$L_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)v_n(m)}{m^s}, \quad L_n(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\omega(m)v_n(m)}{m^s},$$

konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \sigma_L$. Apibrėžkime funkciją $u_n : \Omega \rightarrow H(D)$ kaip

$$u_n(\omega) = L_n(s, \omega).$$

Iš eilutės $L_n(s, \omega)$ absoliutaus konvergavimo seka funkcijos u_n tolydumas. Erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ apibrėžkime matą

$$U_n(A) = m_H u_n^{-1}(A) = m_H(u_n^{-1}(A)).$$

4.1.2 lema. *Tikimybiniis matas*

$$P_{N,h}(A) = \frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N : L_n(s + ikh) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į U_n .

Irodymas. Ši lema yra 4.1.1 lemos išvada, kuri seka iš u_n tolydumo bei 5.1 teoremos iš [3].

Lieka pereiti nuo funkcijos $L_n(s)$ prie funkcijos $L(s)$. Tam mums reikalinga lema apie $L(s)$ aproksimavimą $L_n(s)$ pagal vidurkius. Tegul ρ yra metrika erdvėje $H(D)$ su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija.

4.1.3 lema. *Teisinga lygybė*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \rho(L(s + ikh), L_n(s + ikh)) = 0.$$

Įrodymas. Tegul

$$l_n(s) = \frac{s}{\theta} \Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right) n^s,$$

kur $\Gamma(s)$ – Oilerio gama funkcija. Tuomet $L_n(s)$ galime išreikšti integralu

$$L_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} L(s+z) l_n(z) \frac{dz}{z}.$$

Pritaikę reziduumų teoremą, randame, kad su $\sigma_L < \sigma < 1$,

$$L_n(s) - L(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_L-\sigma-i\infty}^{\sigma_L-\sigma+i\infty} L(s+z) l_n(z) \frac{dz}{z} + R(s), \quad (4.1.4)$$

čia $R(s) = \operatorname{Res}_{z=1-s} \left(L(s+z) \frac{l_n(z)}{z} \right)$.

Tegul K yra juostos D kompaktinė aibė. Pasinaudoję (4.1.4) lygybe bei atlikę nesudėtingas transformacijas, gauname, kad pakankamai dideliems N ir $\sigma_L < \sigma < 1$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sup_{s \in K} |L(s+ikh) - L_n(s+ikh)| \\ & \ll \int_{-\infty}^{\infty} |l_L(\sigma_L - \sigma + i\tau)| \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{2N} |L(\sigma + ikh + i\tau)| d\tau + \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{2N} \sup_{s \in K} |R(s+ikh)|. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Gerai žinoma [10], kad, kai $\sigma_L < \sigma < 1$,

$$\int_0^T |L(\sigma + it)|^2 dt \ll T.$$

Tuomet, remiantis Koši integraline formule, gauname, jog toje pačioje srityje

$$\int_0^T |L'(\sigma + it)| \ll T.$$

Be to, pritaikius Galagherio lemą [2], kuri susieja diskrečiuosius ir tolydžiuosius vidurkius, turime, kad

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{2N} |L(\sigma + ikh + i\tau)| \leq \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N} |L(\sigma + ikh + i\tau)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \ll \left(\frac{1}{N} \left(\int_0^{2N} |L(\sigma + it + i\tau)|^2 dt + \left(\int_0^{2N} |L(\sigma + it + i\tau)|^2 dt \int_0^T |L'(\sigma + it + i\tau)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \ll 1 + |\tau|. \end{aligned}$$

Pasinaudojus gerai žinomu įverčiu [2],

$$\Gamma(\sigma + it) \leq e^{-\pi|t|/2},$$

kai $N \rightarrow \infty$, gaunama, kad

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{2N} \sup_{s \in K} |R(s+ikh)| = o(1).$$

Remiantis šiuo įverčiu ir (4.1.5), kai $\sigma > \sigma_L$ ir $N \rightarrow \infty$, turime

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sup_{s \in K} |L(s+ikh) - L_n(s+ikh)| \ll \int_{-\infty}^{\infty} |l_L(\sigma_L - \sigma + i\tau)| (1 + |\tau|) d\tau + o(1). \quad (4.1.6)$$

Kadangi $\sigma_L - \sigma < 0$, iš funkcijos $l_n(s)$ apibrėžimo seka, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_L - \sigma + i\tau)| (1 + |\tau|) d\tau = 0.$$

Tuomet iš (4.1.6) gauname lygybę

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sup_{s \in K} |L(s+ikh) - L_n(s+ikh)| = 0.$$

Remiantis metrikos ρ apibrėžimu, gauname lemos įrodymą.

△

4.1.1 teoremos įrodymui bus reikalingi tam tikri rezultatai, susiję su tikimybinių matų tirštumu.

4.1.4 lema. *Tikimybinių matų šeima $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra tiršta, t.y., kiekvienam $\varepsilon > 0$, egzistuoja tokia kompaktiška aibė $K = K(\varepsilon) \subset H(D)$, kad visiems $n \in \mathbb{N}$,*

$$U_n(K) > 1 - \varepsilon.$$

Įrodymas. Įrodymui naudosime konvergavimo pagal pasiskirstymą savybes. Priminsime jo apibrėžimą ir žymėjimą.

4.1.3 apibrėžimas. *Sakome, kad atsitiktinis elementas X_n , $n \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinį elementą X pagal pasiskirstymą, jei elemento X_n pasiskirstymas P_n , $n \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento X pasiskirstymą P .*

Konvergavimas pagal pasiskirstymą žymimas simboliu $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathfrak{D}} X$. Atsitiktiniu elementu X_n apibrėžimo tikimybinės erdvės gali būti skirtingos, tačiau jie privalo įgyti reikšmės iš tos pačios erdvės.

Tikimybinėje erdvėje, kurioje apibrėžtas matas μ , apibrėžiame diskretųjį atsitiktinį dydį ξ_N su skirstiniu

$$\mu(\xi_N = kh) = \frac{1}{N+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Tegul $X_{N,n,h} = X_{N,n,h}(s)$ yra $H(D)$ -reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas lygybe

$$X_{N,n,h}(s) = L_n(s + i\zeta_N),$$

o $X_n = X_n(s)$ yra $H(D)$ -reikšmis atsitiktinis elementas, kurio skirstinys yra matas U_n , nusakytas 4.1.2 lemoje. Tuomet, pagal 4.1.2 lemą,

$$X_{N,n,h} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathfrak{D}} X_n. \quad (4.1.7)$$

Kadangi eilutė $L_n(s)$, pusplokštumėje

$\sigma > \sigma_L$, konverguoja absoliučiai, turime

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{T} \int_0^T |L_n(\sigma + it)|^2 dt = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a(m)|^2 \nu_n^2(m)}{m^{2\sigma}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a(m)|^2}{m^{2\sigma}} < \infty.$$

Analogiškas tvirtinimas galioja ir funkcijos $L(s)$ išvestinei. Pasinaudoję Galagherio lema [2], randame, kad

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N |L_n(\sigma + ikh)|^2 \leq C < \infty, \quad \sigma > \sigma_L. \quad (4.1.8)$$

Tegul $\{K_l : l \in \mathbb{N}\} \subset D$ yra kompaktinių poaibių su metrika ρ seka. Tuomet iš (4.1.8), visiems $l \in \mathbb{N}$, turime, jog

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sup_{s \in K_l} |L_n(s + ikh)| \leq R_l < \infty. \quad (4.1.9)$$

Tegul ε yra teigiamas skaičius ir $M_l = 2^l R_l \varepsilon^{-1}$, $l \in \mathbb{N}$. Remiantis (4.1.9) nelygybe, gauname, jog

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \mu \left\{ \sup_{s \in K_l} |X_{N,n,h}(s)| > M_l \right\} \leq \frac{1}{M_l} \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sup_{s \in K_l} |L_n(s + ikh)| < \frac{\varepsilon}{2^l}.$$

Be to, atsižvelgę į (4.1.7), turime, jog visiems $l \in \mathbb{N}$,

$$\mu \left\{ \sup_{s \in K_l} |X_n(s)| > M_l \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2^l}. \quad (4.1.10)$$

Dabar tegul

$$H_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K_l} |g(s)| \leq M_l, l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tuomet, H_ε yra kompaktiška aibė erdvėje $H(D)$ ir, atsižvelgę į (4.1.10), pastebime, jog

$$\mu \{X_N(s) \in H_\varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon, \quad \text{visiems } n \in \mathbb{N}.$$

Panaudodami atsitiktinio elemento χ_r apibrėžimu, randame, kad

$$U_n(H_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon, \quad \text{visiems } n \in \mathbb{N}.$$

△

Remdamiesi nagrinėtų lemų rezultatais, galime įrodyti 4.1.1 ribinę teoremą.

4.1.1 teoremos įrodymas. Įrodymas seka iš 4.1.4 lemos ir Prokhorovo (Prokhorov) teoremos, teigiančios, kad tikimybinių matų šeima $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra realiatyviai kompaktiška. Todėl bet kuri šios šeimos seka talpina savyje posekį U_{n_l} , kuris, kai $l \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą matą P , apibrėžtą erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$.

Taigi, mūsų atveju, turime, kad

$$X_{n_l} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P. \quad (4.1.11)$$

Papildomai apibrėžkime kitą $H(D)$ -reikšmį atsitiktinį elementą

$$Y_{N,h} = Y_{N,h}(s) = L(s + i\xi_N).$$

Tuomet, pritaikę 4.1.3 lemos rezultata, turime, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mu \{ (X_{N,n,h}(s), \quad X_{N,h}(s)) \geq \varepsilon \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \{ 0 \leq k \leq N : \rho(L(s + ikh), \quad L_n(s + ikh)) \geq \varepsilon \} \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon(N+1)} \sum_{k=0}^N \rho(L(s + ikh), \quad L_n(s + ikh)) = 0. \end{aligned}$$

Šis rezultatas kartu su (4.1.7) ir (4.1.11) duoda konvergavimų į matą P :

$$Y_{N,h} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathfrak{D}} P, \quad (4.1.12)$$

kuris yra ekivalentus silpnam $P_{N,h}$ konvergavimui į P , kai $N \rightarrow \infty$. Be to, (4.1.12) rodo, kad tikimybinis matas P nepriklauso nuo posekio U_{n_l} parinkimo. Todėl teisingas sąryšis

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathfrak{D}} P;$$

tai yra, kai $n \rightarrow \infty$, U_n silpnai konverguoja į P . Be to, kai $N \rightarrow \infty$, tikimybinis matas $P_{N,h}$ silpnai konverguoja į U_n . Iš to seka, kad matas

$$\frac{1}{T} \text{meas} \{ \tau \in [0, T] : L(s + i\tau) \in A \}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $T \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į U_n matą P , o matas $\mathbb{P}$ sutampa su P_L . Taigi, P_N , kai $N \rightarrow \infty$, taip pat silpnai konverguoja į P_L . Be to, H. Nagoši ir J. Štaudingas [7] įrodė, jog P_L atrama yra aibė $S_L = \{g \in H(D_L) : g(s) \neq 0 \text{ arba } g(s) \equiv 0\}$.

△

4.2 Atvejis, kai $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ yra tiesiškai priklausoma virš $\mathbb{Q}$

Kai aibė $L(\mathbb{P}, h, \pi) = \{ \log p : p \in \mathbb{P} \}, \frac{\pi}{h} \}$ yra tiesiškai priklausoma virš $\mathbb{Q}$, ribinės teoremos įrodymui remsimės tam tikrais rezultatais, kuriuos 2016 m. pateikė A. Laurinčikas, K. Motsumoto ir J. Štaudingas [3].

Tarkime, kad egzistuoja tokie sveikieji skaičiai $k_1, \dots, k_r$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ir pirminiai skaičiai $p_1, \dots, p_r$ tokie, kad

$$k_1 \log p_1 + \dots + k_r \log p_r + \frac{k\pi}{h} = 0.$$

Tuomet

$$p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r} = e^{-k\pi/h}.$$

Vadinasi, skaičius $e^{-k\pi/h}$ yra racionalusis. Tuomet atveju, kai $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ – tiesiškai pri-

klausoma virš $\mathbb{Q}$, egzistuoja $m \in \mathbb{N}$ toks, kad $e^{2\pi m/h} \in \mathbb{Q}$. Tarkime, kad m_0 – mažiausias iš tokių m ,

$$e^{2\pi m_0/h} = \frac{a}{b} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p},$$

su $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$, $\alpha_p \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}_0 = \{p \in \mathbb{P} : \alpha_p \neq 0\}$.

Pažymėkime Ω_h – uždara Ω pogrupį, sudarytą iš $(p^{-ih} : p \in \mathbb{P})$. Tegul m_H^h – tikimybinis Haro matas erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h))$. Taigi, turime tikimybinę erdvę $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$. Įrodyta [3, 1 lema], kad

$$\Omega_h = \{\omega \in \Omega : \omega(a) = \omega(b)\}.$$

Kiekvienam $\omega \in \Omega_h$ apibrėžiame $H(D)$ -reikšmį atsitiktinį elementą

$$L_h(s, \omega) = \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a(p^\alpha) \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right).$$

Tuomet $L_h(s, \omega)$ sutampa su atsitiktiniu elementu $L(s, \omega)$ iš tikimybinės erdvės $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$, kuriam galioja (4)-asis Selbergo klasės funkcijoms keliamas reikalavimas. Atkreipiame dėmesį, kad beveik kiekvienam elementui $\omega \in \Omega_h$ ši begalinė sandauga sutampa su eilute

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m) \omega(m)}{m^s}.$$

Tegul $P_{L,h}$ yra atsitiktinio elemento $L_n(s, \omega)$ skirstinys, tai yra,

$$P_{L,h}(A) = m_H^h \{ \omega \in \Omega_h : L_n(s, \omega) \in A \}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Taigi, šiame poskyryje įrodysime 4.1.1 teoremos analogą, kai $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ yra tiesiškai priklausoma virš $\mathbb{Q}$.

4.2.1 teorema. *$P_{N,h}$, kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į $P_{L,h}$. Be to, $P_{L,h}$ atrama yra aibė S_L .*

Įrodymas. Kaip jau minėjome, šiuo atveju egzistuoja skaičius $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ toks, kad skaičius $e^{2\pi m/h}$ yra racionalusis. Tegul Ω^* – dualioji Ω grupė. Grupės Ω^* elementai (charakteriai) χ turi formą

$$\chi(\omega) = \prod_p \omega^{k_p}(p),$$

kur tik baigtinis skaičius $k_p \in \mathbb{Z}$ nėra 0. Tegul $\chi_{m_0} \in \Omega^*$ apibrėžiamas santykiu

$$\chi_{m_0}(\omega) = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \omega^{\alpha_p}(p) = \frac{\omega(a)}{\omega(b)}$$

ir $\Omega_h^\perp = \{\chi_{m_0}^l : l \in \mathbb{Z}\}$. Yra įrodyta, kad grupė $\Omega^*/\Omega_h^\perp$ yra dualioji Ω_h grupė. Vadinasi, charakteriai χ iš grupės Ω_h turi formą

$$\chi(\omega) = \prod_{p \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_0} \omega^{k_p}(p) \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \omega^{k_p + l \alpha_p}(p), \quad l \in \mathbb{Z},$$

kur tik baigtinis skaičius k_p nėra 0. Iš šio fakto seka (tai buvo įrodyta [3]), kad

$$\frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N : (p^{-ikh} : p \in \mathbb{P}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega_h),$$

kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H^h . Vadinasi, kaip ir 4.1.2 įrodyme, pasinaudoję Haro mato m_H^h invariantiškumu, randame, kad $P_{N,n,h}$ ir

$$\frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N : L_{n,h}(s + ikh, \omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kur

$$L_{n,h}(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\omega(m)v_n(m)}{m^s}, \quad \omega \in \Omega_h,$$

kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą $U_{n,h}$ iš $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$.

Mums taip pat bus reikalingi tam tikri apkroksimavimo vidurkiu rezultatai. 4.1.3 lemos įrodymas nepriklauso nuo aritmetinių h savybių; taigi, mūsų nagrinėjamu atveju, lygybė

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \rho(L(s + ikh), L_n(s + ikh)) = 0$$

išlieka teisinga. Tačiau, šiuo atveju, mums reikės atlikti funkcijos $L_h(s, \omega)$ aproksimavimą funkcija $L_{n,h}(s, \omega)$.

Tarkime, $a_h = \{p^{-ih} : p \in \mathbb{P}\}$. Apibrėžkime grupės Ω_h transformaciją φ_h formule

$$\varphi_h(\omega) = a_h \omega, \quad \omega \in \Omega_h.$$

Įrodyta [3], kad transformacija φ_h yra ergodinė. Pritaikę klasikinę Birkhofo - Kinčino (Birkhoff - Khinchin) ergodinę teoremą, gauname, kad, beveik kiekvienam $\omega \in \Omega_h$,

$$\int_0^T |L_h(\sigma + it, \omega)|^2 dt \ll T, \quad \sigma_L < \sigma < 1.$$

Tuomet, remdamiesi Galagerio (Gallagher) lema, gauname diskretųjį atvejį

$$\sum_{k=0}^N |L_h(\sigma + ikh, \omega)|^2 \ll N.$$

Taigi, beveik kiekvienam $\omega \in \Omega_h$, turime lygybę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} \rho(L_h(s + ikh, \omega), L_{n,h}(s + ikh, \omega)) = 0.$$

Toliau laikantis 4.1.1 teoremos įrodymo schemos bei remiantis gautais rezultatais, turime, jog matai $P_{N,h}$ ir

$$\hat{P}_{N,h}(A) = \frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N : L_n(s + ikh, \omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į matą P_h .

Dabar turime įrodyti, kad P_h sutampa su $P_{L,h}$. Tegul $A \in \mathcal{B}(H(D))$ yra mato P_h tolydumo aibė, t.y., $P_h(\partial A) = 0$, kur ∂A yra aibės A siena. Tikimybinėje erdvėje

$(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$ apibrėžkime atsitiktinį dydį

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jei } L_h(s, \omega) \in A \\ 0, & \text{jei } L_h(s, \omega) \notin A. \end{cases}$$

Tuomet θ vidurkis $\mathbb{E}\theta$ turi formą

$$\mathbb{E}\theta = \int_{\Omega_h} \theta dm_H^h = m_H^h \{ \omega \in \Omega_h : L_h(s, \omega) \in A \} = P_{L,h}(A). \quad (4.2.1)$$

Kadangi, kai $N \rightarrow \infty$, $\hat{P}_{N,h}$ silpnai konverguoja į P_h , turime

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \{ 0 \leq k \leq N : L_h(s + ikh, \omega) \in A \} = P_h(A). \quad (4.2.2)$$

Kadangi transformacija φ_h yra ergodinė, todėl, remiantis Birkhofo - Kinčino (Birkhoff - Khinchin) teorema, turime, kad su beveik kiekvienu $\omega \in \Omega_h$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \theta(\varphi_h^k(\omega)) = \mathbb{E}\theta. \quad (4.2.3)$$

Iš kitos pusės, tai seka iš φ_h ir θ apibrėžimų, taigi, turime, jog

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \theta(\varphi_h^k(\omega)) = \frac{1}{N+1} \# \{ 0 \leq k \leq N : L_h(s + ikh, \omega) \in A \}.$$

Pasinaudoję (4.2.1) – (4.2.3), darome išvadą, kad $P_h(A) = P_{L,h}(A)$ visoms mato P_h tolydumo aibėms A .

Belieka rasti mato $P_{L,h}$ atramą. Atsitiktinį elementą $L_h(s, \omega)$ išreikškime sandauga

$$L_h(s, \omega) = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a(p^\alpha) \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right) \prod_{p \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_0} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a(p^\alpha) \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} XY.$$

Kiekvienam $p \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_0$ atsitiktinės reikšmės $\omega(p)$ yra nepriklausomos. Vadinas, pritaikę tankumo metodą [3] ir (4.1.1) reikalavimą, nurodytą 4.1 poskyryje, randame, jog atsitiktinio elemento Y atrama yra aibė S_L . Be to, H. Nagoši ir J. Štaudingas [7] įrodė, jog

$$1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a(p^\alpha) \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} = \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{b(p^\alpha) \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right\},$$

o eilutė skliaustuose konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \sigma_L$. Kadangi atsitiktiniai elementai X ir Y yra nepriklausomi, iš čia seka, kad $L_h(s, \omega)$ atrama yra aibė S_L .

△

4.3 Pagrindinės teoremos įrodymas

Pagrindinės teoremos įrodymas yra paremtas 4.1 ir 4.2 poskyriuose gautais rezultatais, tiksliau, 4.1.1 ir 4.2.1 ribinėmis teoremomis apie tikimybinių matų silpnąjį konvergavimą į

atsitiktinio elemento skirstinį bei Mergeliano (Mergelyan) teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais. Priminsime ją.

4.3.1 lema. *Tarkime, kad $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks polinomas $p(s)$, kad*

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Lemos įrodymą galime rasti [3].

Įrodymo kelias yra standartinis. Kadangi $f(s) \neq 0$ aibėje K , nesunku matyti, kad egzistuoja toks polinomas $\hat{p}(s)$, kad

$$\sup_{s \in K} |f(s) - e^{\hat{p}(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3.1)$$

Dabar turime apjungti 4.1.1 ir 4.2.1 teoremas (jos vaidina pagrindinį vaidmenį). Ribinį matą jose pažymėkime $P_{L,h}$. Be to, jau įrodėme, kad mato $P_{L,h}$ atrama yra aibė $\mathcal{S}_L = \{g \in H(D_L) : g(s) \neq 0 \text{ arba } g(s) \equiv 0\}$. Pažymėkime analizinių funkcijų aibę

$$G = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - e^{\hat{p}(s)}| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Kadangi $e^{\hat{p}(s)} \in \mathcal{S}_L$, iš čia seka, kad G yra atviroji ribinio mato $P_{L,h}$ atramos $\mathcal{S}_L$ elemento $e^{\hat{p}(s)}$ aplinka. Vadinasi, iš mato atramos savybių turime, kad

$$P_{L,h}(G) > 0. \quad (4.3.2)$$

Belieka pasinaudoti silpno tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentu atvirųjų aibių terminais. Tam suformuluosime atskirą lemą, tačiau prieš tai primename, kad aibė A yra mato P tolydumo aibė, jei jos krašto ∂A matas P yra lygus nuliui, t.y., $P(\partial A) = 0$.

4.3.2 lema [9]. *Tegul P_n , $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Tuomet P_n , kai $n \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į matą P tada ir tik tada, kai galioja kuris nors iš tvirtinimų:*

1. *su kiekviena atvirąja aibe $G \subset \mathbb{X}$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} P_n(G) \geq P(G);$$

2. *su kiekviena mato P tolydumo aibe A teisinga nelygybė*

$$\lim P_n(A) = P(A).$$

Pasinaudoję šia lema, 4.1.1 bei 4.2.1 teoremų rezultatais, turime, kad

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} P_{N,h}(G) \geq P_{L,h}(G).$$

Šis rezultatas, aibės G apibrėžimas ir (4.3.2) nelygybė, leidžia tvirtinti, kad

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |L(s + ikh) - e^{\hat{p}(s)}| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0.$$

Kadangi

$$\{0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |L(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon\} \subset$$

$$\{0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |L(s + ikh) - e^{\hat{p}(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}\},$$

siekiant užbaigti teoremos įrodymą, belieka pritaikyti (4.3.1) nelygybę. Iš čia gauname,

kad

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |L(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

REZULTATAI IR IŠVADOS

Magistro darbe nagrinėta L funkcijų, priklausančių Selbergo klasei $\mathcal{S}$, universalumo savybė, koncentruojantis į diskrečiojo universalumo klausimą.

Įrodyta, jog analizines tam tikrose kompaktinėse aibėse funkcijas galima tolygiai ap-
roksimuoti ne visų šios klasės funkcijų, o tik tam tikro poklasio funkcijų diskrečiaisiais
postūmiais. Tikėtina, jog gautą rezultatą galima pagerinti ir įrodyti diskrečiojo universa-
lumo teoremą visoms Selbergo klasės funkcijoms.

Gautas rezultatas galės būti pritaikytas šių funkcijų funkcinio nepriklausomumo, sa-
viaproksimacijos ir nulių pasiskirstymo klausimams nagrinėti.

Numatyta tęsti diskrečiojo universalumo tyrimus, nagrinėjant platesnį atvejį, kai postū-
miai įgyja reikšmes ne iš aritmetinės progresijos $\{kh : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, o iš kur kas labiau
komplikuotos aibės $\{k^\beta h : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $0 < \beta \leq 1$.

LITERATŪRA

- [1] A. D. Droll, Variations of Li's criterion for an extension of the Selberg class. Thesis, 2012: <<https://qspace.library.queensu.ca/handle/1974/7352>>[Žiūrėta 2020-05-23].
- [2] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, Discrete Universality in the Selberg Class. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 299, 143–156, 2017.
- [3] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, J. Steuding, Discrete universality of L -functions of new forms. II. *Lith. Math. J.*, 56(2), 207–218, 2016.
- [4] M. Lukošiušienė, *Selbergo klasės L funkcijų reikšmių pasiskirstymas*. Magistro darbas, Šiaulių universitetas, 2012.
- [5] J. Mazelskienė, R. Macaitienė, Limit Theorem for L -Functions from a Subclass of the Selberg Class. *Jaunųjų mokslininkų darbai*, 2 (42), 176–180, 2014.
- [6] M. Ram. Muray, A. Perelli, The pair correlation of zeros of functions in the Selberg class. *International Mathematics Research Notices*, 10, 1999: <<https://mast.queensu.ca/~murty/Murty-Perelli.pdf>>[Žiūrėta 2020-05-23].
- [7] H. Nagoshi, J. Steuding, Universality for L -functions in the Selberg class. *Lith. Math. J.* 50:3, 393 – 411, 2010.
- [8] A. Perelli, An introduction to the Selberg class of L -functions. *Dipartimento di Matematica, Università di Genova, via Dodecaneso 35*, 16146, 1-42, 2007: <<http://www.mif.vu.lt/katedros/ttsk/vs2007/files/Selberg.pdf>>[Žiūrėta 2020-05-23].
- [9] J. Steuding, On the universality for functions in the Selberg class. *Les-Mathematiques.net, The Institute for Algebra and Geometry*, 1–21, 2002: <http://www.les-mathematiques.net/phorum/file.php/5/10019/Selberg_Class_and_universality_steuding.pdf>[Žiūrėta 2020-05-23].
- [10] S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta - function. *Math USSR Izv.* 9, 443–453, 1975.
- [11] L. Zheng, A concise survey of the Selberg class of L -functions. *The university of British*: <<https://www.math.ubc.ca/~gerg/teaching/613-Winter2011/SelbergClass.pdf>>[Žiūrėta 2020-05-23].

SANTRAUKA

Diskretusis vieno Selbergo klasės poklasio L funkcijų universalumas

1989 m. A. Selbergas apibrėžė Dirichlė eilučių, turinčių Oilerio sandaugą, analizinį pratęsimą, Rymano tipo funkcinę lygtį ir tenkinančių Ramanudžano hipotezę koeficientams, klasę $\mathcal{S}$. Jis taip pat pateikė keletą hipotezių šios klasės funkcijoms. Nuo tada jo vardu pavadinta Selbergo klasė tapo svarbiu tyrimų objektu su daugybe neatsakytų klausimų apie bendras jų savybes.

Magistro darbe analizuojamos Selbergo klasės S funkcijų universalumo savybės. J. Štaudingas įrodė, kad funkcijos iš klasės $\mathcal{S}$, tenkinančios papildomą vidurkio kvadrato aprėžtumo pagal pirminius skaičius sąlygą, yra universalios Voronino prasme, t.y., plati analizinių funkcijų klasė gali būti aproksimuojama postūmiais $L(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Šiame darbe įrodome, kad kiekviena funkcija iš tos pačios analizinių funkcijų klasės gali būti aproksimuojama diskrečiaisiais nagrinėjamo poklasio funkcijų postūmiais $L(s + ikh)$, $k = 0, 1, \dots$, kur $h > 0$ yra fiksuotas skaičius.

Tegul K – juostos $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_L < \sigma < 1\}$ (kur $\sigma_L = \max\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\}$) kompaktinių poaibių su jungiuoju papildiniu klasė ir $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, tolydžiųjų ir neįgyjančių nulių funkcijų klasė bei analizinių aibės K viduje.

Pagrindinė teorema. *Tarkime, $L \in S$ ir tenkinama papildoma sąlyga*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 = \kappa, \quad \kappa > 0.$$

Tegul $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |L(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Šios teoremos įrodymui naudoti metodai, paremti tikimybių matų silpno konvergavimo analizinių funkcijų erdvėje teorija. Pažymėkime $\mathbb{P}$ – pirminių skaičių aibę ir

$$L(\mathbb{P}, h, \pi) = \left\{ (\log p : p \in \mathbb{P}), \frac{\pi}{h} \right\}.$$

Magistro darbe nagrinėtidu atvejai, kai:

- (1) aibė $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$;
- (2) aibė $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ yra tiesiškai priklausoma virš $\mathbb{Q}$.

Pagrindinės teoremos įrodymas paremtas ribinių teoremų įrodymais 4.1 ir 4.2 poskyriuose bei Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais.

SUMMARY

Discrete universality for L - functions from a subclass of the Selberg class

In 1989, A. Selberg defined some class $\mathcal{S}$ of Dirichlet series having an Euler product, analytic continuation and a functional equation of Riemann-type. Moreover, he formulated some fundamental conjectures concerning them. In the meantime, this so-called Selberg class became an important object of research, but still it is not understood very well.

In the Master thesis, we investigate universality property of functions in the Selberg class $\mathcal{S}$. J. Steuding has proved that functions in $\mathcal{S}$ that satisfy the mean value condition on primes are universal in the sense of Voronin, i.e., every function in a sufficiently wide class of analytic functions can be approximated by the shifts $L(s+i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. In this thesis we show that every function in the same class of analytic functions can be approximated by the discrete shifts $L(s+ikh)$, $k = 0, 1, \dots$, where $h > 0$ is an arbitrary fixed number.

Let K be the class of compact subsets of $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_L < \sigma < 1\}$ (where $\sigma_L = \max\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\}$) with connected complements and $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, be the class of continuous functions that have no zeros in K and are analytic in the interior of K .

The main theorem. *Suppose that the L -function belongs to $\mathcal{S}$ and satisfies additional condition*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 = \kappa, \quad \kappa > 0.$$

Let $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$. Then for every $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |L(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

To prove the main theorem we apply a probability method based on limit theorems on the weak convergence of probability measures in the space of analytic functions. Let $\mathbb{P}$ be the set of all primes and

$$L(\mathbb{P}, h, \pi) = \left\{ (\log p : p \in \mathbb{P}), \frac{\pi}{h} \right\}.$$

We considered separately two cases:

- (1) the set $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$;
- (2) the set $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ is linearly dependent over $\mathbb{Q}$.

Then the proof of the main theorem was based on limit theorems proved in 4.1 and 4.2 subsections as well as on the Mergelyan theorem on the approximation of analytic functions by polynomials.