TRUPMENINIO BRAUNO JUDESIO AGREGAVIMAS

Ineta Tučiūtė, Marijus Vaičiulis
Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas

Įvadas

Savastingumas yra ko gero viena iš svarbiausių kompiuterinių tinklų statistikos sąvokų. Savastingumo apibrėžimai diskretaus ir tolydaus laiko atsitiktiniams procesams šiek tiek skiriasi (Dieker, 2004). Būtina prisiminti, kad tolydaus laiko atsitiktinis procesas $X(t)$, $t \in \mathrm{R}$ yra vadinamas savastingu, jei su bet kokiais $n \in \mathrm{N}$ ir $t_1 \in R, \ldots, t_n \in R$ ir su bet kokiu a > 0 yra toks H > 0, kad atsitiktinių vektorių $\left(a^{-H} X(at_1), \ldots, a^{-H} X(at_n)\right)$ ir

$$\left(X(t_1), \ldots, X(t_n)\right) \tag{1.1}$$

tikimybių skirstiniai sutampa. H yra vadinamas atsitiktinio proceso $X(t)$, $t \in R$ savastingumo indeksu. Pvz., Brauno judesys arba stabilus Levy judesys yra savastingi atsitiktiniai procesai.

Minėto Brauno judesio apibendrinimas yra trupmeninis Brauno judesys. Pastarojo proceso taikymai sutinkami teorinėje fizikoje, tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje (Biagini, Hu ir kt., 2008), medicinoje (Ascher, Akay, 2002), biologijoje, finansuose (Sottinen, 2001) bei daugelyje kitų sričių. Savastingas (su savastingumo indeksu 0 < H ≤ 1) ir pasižymintis stacionariais pokyčiais Gauso atsitiktinis procesas $B_H(t)$, $t \in R$ yra vadinamas trupmeniniu Brauno judesiu. Galima įsitikinti, kad $EB_H(t) = 0$ ir

$$R_H(t_1, t_2) = Cov\left(B_H(t_1), B_H(t_2)\right) = \frac{1}{2}\left\{ |t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H} \right\},$$

(pvz., Samorodnitsky, Taggu, 1994) (1.2)

Aukšto dažnio duomenų rinkimo pradžia yra laikomas praeito šimtmečio devintas dešimtmetis. Paprastai tokio tipo duomenys statistiškai tiriami prieš tai juos agregavus. Ko gero, populiariausia agregavimo schema yra agregavimas suma. Detalią laiko eilučių agregavimo metodų apžvalgą yra pateikęs D. Celov (2008), o funkcinių duomenų agregavimą nagrinėjo M. Pronskevičiūtė (2011).

Šio darbo ***tikslas*** – taikant kintamo žingsnio agregavimo suma schemą trupmeniniam Brauno judesiui apibrėžti porą naujų tolydaus laiko atsitiktinių procesų, kurie yra savastingi (su tuo pačiu, kaip ir agreguojamas trupmeninis Brauno judesys, savastingumo indeksu). Naujai apibrėžti procesai gali būti naudingi tolydaus laiko atsitiktinių procesų statistikoje (konkrečiai – empiriškai tiriant savastingumo indekso įvertinių savybes).

Pagrindinis rezultatas

Tegul ξ yra atsitiktinis dydis, įgyjantis natūralias reikšmes. Apibrėžkime agreguotą atsitiktine eile ξ trupmeninį Brauno judesį:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\xi} B_H(jt), \quad t \in R.$$

Pagrindinis šio darbo rezultatas yra teorema, kurioje aptariamos atsitiktinio proceso $X(t)$, $t \in \mathrm{R}$ savybės.

Teorema. Tegul atsitiktinis dydis ξ ir atsitiktinis procesas $B_H(t)$, $t \in R$ yra nepriklausomi. Tada

(i) atsitiktinis procesas $X(t)$, $t \in \mathrm{R}$ nėra gausiškas.

(ii) atsitiktinis procesas $X(t)$, $t \in \mathrm{R}$ savastingas su indeksu H.

(iii) $EX(t) = 0;$ Papildomai pareikalaukime, kad $E\xi^{2H+2} < \infty$. Tada

$$Cov\left(X(t), X(s)\right) = \sum_{l=1}^{\infty} P\{\xi = l\} \sum_{j', j''=1}^{l} R_H\left(j't, j''s\right). \tag{1.4}$$

Reikalavimas $E\xi^{2H+2} < \infty$ gali būti pakeistas paprastesne, bet griežtesne sąlyga $E\xi^4 < \infty$. Taigi, iš nelygybės H $\leq$ 1 išplaukia, kad 2H+2 $\leq$ 4. Pasinaudoję Holderio nelygybe, gauname, kad iš $E\xi^4 < \infty$ seka $E\xi^{2H+2} < \infty$.

Apibrėžkime agreguotą neatsitiktine eile $l \in N$ trupmeninį Brauno judesį.

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{l} B_H(kt), t \in R. \tag{1.5}$$

Kadangi sekančio tvirtinimo įrodymas gaunamas nežymiai modifikavus teoremos įrodymą, tai jį suformuluosime kaip išvadą ir atskiro įrodymo nepateiksime.

Išvada

(i) $Y(t), t \in R$ yra Gauso procesas su nuliniu vidurkiu ir kovariacine funkcija

$$Cov\left(X(t), X(s)\right) = \sum_{j', j''=1}^{l} R_H\left(j't, j''s\right)$$

(ii) $Y(t), t \in R$ yra savastingas (su indeksu H) atsitiktinis procesas.

Teoremos įrodymas

Pirmiausia įrodykime, kad atsitiktinis procesas $X(t),\ t \in R$ savastingas su indeksu H. Tegul $n \in \mathrm{N}$ ir $t_1 \in R, \ldots, t_n \in R$. Užrašykime kairiojo (1.1) atsitiktinio vektoriaus charakteristinę funkciją:

$$E\exp\left\{ i\sum_{k=1}^{n}\theta_k a^{-H} X(at_k)\right\} =$$

$$= E\left(\sum_{l=1}^{\infty} I\{\xi = l\}\exp\left\{ i\sum_{k=1}^{n}\theta_k \sum_{j=1}^{l} a^{-H} B_H(ajt_k)\right\}\right),$$

kur $I\{\cdot\}$ yra indikatorius. Tegul F žymi σ-algebrą, generuotą ats. dydžio ζ. Pritaikę pilnos tikimybės formulę, gauname:

$$E\exp\left\{ i\sum_{k=1}^{n}\theta_k a^{-H} X(at_k)\right\} = E\left(\sum_{l=1}^{\infty} I\{\xi = l\} E\left(\exp\left\{ i\sum_{k=1}^{n}\theta_k \sum_{j=1}^{l} a^{-H} B_H(ajt_k)\right\} \middle| F\right)\right).$$

Trupmeninis Brauno judesys yra Gauso

procesas, todėl (l·n)-matis ats. vektorius

$$\begin{aligned}&(a^{-H}\theta_1 B_H(at_1), \ldots, a^{-H}\theta_1 B_H(alt_1),\\ &a^{-H}\theta_2 B_H(at_2), \ldots, a^{-H}\theta_2 B_H(alt_2), \ldots,\\ &a^{-H}\theta_n B_H(at_n), \ldots, a^{-H}\theta_n B_H(alt_n))\end{aligned}$$

taip pat yra gausiškas.

Vadinasi,

$$E\left(\exp\left\{ i\sum_{k=1}^{n}\theta_k \sum_{j=1}^{l} a^{-H} B_H(ajt_k)\right\} \middle| F\right) =$$

$$= \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k',k''=1}^{n}\theta_{k'}\theta_{k''}\sum_{j',j''=1}^{l} a^{-2H}\operatorname{cov}\left(B_H(aj't_{k'}), B_H(aj''t_{k''})\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k',k''=1}^{n}\theta_{k'}\theta_{k''}\sum_{j',j''=1}^{l} a^{-2H} R_H\left(aj't_{k'}, aj''t_{k''}\right)\right\}.$$

Pasinaudoję tuo, kad $a^{-2H}R_H(at, as) = R_H(t, s)$, gauname

$$E\left(\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k\sum_{j=1}^{l}a^{-H}B_H\left(ajt_k\right)\right\}\middle|F\right)=$$
$$=\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k',k''=1}^{n}\theta_{k'}\theta_{k''}\sum_{j',j''=1}^{l}R_H\left(j't_{k'},j''t_{k''}\right)\right\}.$$

Pasinaudoję paskutine lygybe gauname, kad

$$E\ \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k a^{-H}X\left(at_k\right)\right\}=$$
$$=E\left(\sum_{l=1}^{\infty}I\{\xi=l\}\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k',k''=1}^{n}\theta_{k'}\theta_{k''}\sum_{j',j''=1}^{l}R_H\left(j't_{k'},j''t_{k''}\right)\right\}\right)=$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}P\{\xi=l\}\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k',k''=1}^{n}\theta_{k'}\theta_{k''}\sum_{j',j''=1}^{l}R_H\left(j't_{k'},j''t_{k''}\right)\right\}.$$

Analogiškai galima įsitikinti, kad

$$E\ \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X\left(t_k\right)\right\}=$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}P\{\xi=l\}\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k',k''=1}^{n}\theta_{k'}\theta_{k''}\sum_{j',j''=1}^{l}R_H\left(j't_{k'},j''t_{k''}\right)\right\},\qquad(2.1)$$

t. y. abiejų (1.1) atsitiktinių vektorių charakteristinės funkcijos sutampa, o tai reiškia, kad $X(t), t\in R$ yra savastingas su indeksu H.

Tvirtinimas, kad $X(t), t\in R$ nėra Gauso procesas, išplaukia iš (2.1). Apskaičiuokime vidurkio ir kovariacijos funkcijas. Pasinaudoję atsitiktinio dydžio ζ ir trupmeninio Brauno judesio $B_H(t),\ t\in R$ nepriklausomumu, gauname:

$$EX(t)=E\left(\sum_{l=1}^{\infty}I\{\xi=l\}\sum_{j=1}^{l}B_H(jt)\right)=E\left(\sum_{l=1}^{\infty}I\{\xi=l\}\sum_{j=1}^{l}E\left(B_H(jt)\middle|F\right)\right)=$$
$$=E\left(\sum_{l=1}^{\infty}I\{\xi=l\}\sum_{j=1}^{l}E\left(B_H(jt)\right)\right)=0.$$

Atsižvelgę į ką tik įrodytą lygybę, turime

$$Cov\left(X(t),X(s)\right)=E\left(X(t)X(s)\right).$$

Todėl

$$Cov\ \left(X(t),X(s)\right)=E\left(\sum_{l=1}^{\infty}I\{\xi=l\}\sum_{j',j''=1}^{l}E\left(B_H(j't)B_H(j''s)\middle|F\right)\right)=$$
$$=E\left(\sum_{l=1}^{\infty}I\{\xi=l\}\sum_{j',j''=1}^{l}R_H(j't,j''s)\right)=$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}P\{\xi=l\}\sum_{j',j''=1}^{l}R_H(j't,j''s).$$

Iš čia, pasinaudoję (1.2), gauname

$$Var\left(X(t)\right) = \sum_{l=1}^{\infty} P\{\xi = l\} \sum_{j',j''=1}^{l} R_H\left(j't, j''s\right) = 2|t|^{2H} \sum_{l=1}^{\infty} P\{\xi = l\} \sum_{j=1}^{l} j^{2H+1}.$$

Atlikę sumavimo kintamojo pakeitimą $s = j/l$ gauname

$$\sum_{j=1}^{l} j^{2H+1} = l^{2H+1} \sum_{s=1/l}^{1} s^{2H+1} \leq l^{2H+2} \int_0^1 x^{2H+1} dx = \frac{l^{2H+2}}{2H+2}.$$

Pasinaudoję sąlyga $E\left(\xi^{2H+2}\right) < \infty$ gauname

$$Var\left(X(1)\right) \leq \frac{1}{H+1} \sum_{L=1}^{\infty} l^{2H+2} P\{\xi = l\} = \frac{1}{H+1} E\left(\xi^{2H+2}\right) < \infty$$

baigdami (iii) tvirtimo, o kartu ir teoremos, įrodymą.

Literatūra

1. Biagini F., Hu Y., Øksendal B., Zhang T., 2008, *Stochastic Calcus for Fractional Brownian Motion and Applications.* London: Springer.
2. Celov D., 2008, Time series aggregation, disaggregation and long memory. *Doctoral thesis*. Vilnius university.
3. Dieker T., 2004, Simulation of fractional Brownian motion. *Doctoral thesis*. University of Twente.
4. Fischer R., Akay M., 2002, Improved estimators for fractional Brownian motion via the expectation – maximization algorithm. *Medical Enginneering & Physics*. Vol. 24. P. 77–83.
5. Sottinen T., 2001, Fractional Brownian motion, random walks and binary market models. *Finance & Stochastics*. Vol. 5. P. 343–355.
6. Pranskevičiūtė M., 2011, High frequency data aggregation and value-at-risk. *Doctoral thesis.* Vilnius university.
7. Samorodnitsky G., Taqqu M. S., 1994, *Stable non-Gausian Random Proceses.* New York*:* Chapman and Hall.

AGGREGATION OF THE FRACTIONAL BROWNIAN MOTION

Ineta Tučiūtė, Marijus Vaičiulis

Summary

In this paper we introduce fractional Brownian motion aggregated by a random order. We proved that this random process is self-similar with the same self-similarity index as in the initial fractional Brownian motion. Sample paths of the newly proposed random process can be obtained from the sample paths of the initial fractional Brownian motion easily, so the newly proposed process can be useful in the statistics of random processes where empirical investigation of the estimators of self-similarity index is needed.

Keywords: aggregation, self-similarity, fractional Brownian motion.

TRUPMENINIO BRAUNO JUDESIO AGREGAVIMAS

Ineta Tučiūtė, Marijus Vaičiulis

Santrauka

Šiame straipsnyje mes įvedėme agreguotą atsitiktine eile trupmeninį Brauno judesį. Įrodėme, kad šio atsitiktinio proceso savastingumo indeksas yra toks pat kaip ir agreguojamo Brauno judesio. Agreguoto atsitiktine eile trupmeninio Brauno judesio trajektorijas nesunku gauti iš trupmeninio Brauno judesio trajektorijų, todėl naujai įvestą atsitiktinių procesą galima naudoti atsitiktinių procesų statistikoje, kai empiriškai reikia tirti savastingumo indekso įverčių savybes.

Prasminiai žodžiai: agregavimas, savastingumas, trumpeninis Brauno judesys.

Įteikta 2012-05-18