OILERIO SANDAUGŲ DISKRETUS REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMAS KOMPLEKSINĖJE PLOKŠTUMOJE

Eglė Kilčiauskienė, Roma Kačinskaitė
Šiaulių universitetas, Šiaulių valstybinė kolegija

1. Įvadas

Analizinėje skaičių teorijoje svarbią vietą užima dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo ir universalumo tyrimas. Priminsime, kad dzeta funkcijos yra kompleksinio kintamojo $s=\sigma+it$ funkcijos, kurios tam tikroje pusplokštumėje gali būti užrašomos Dirichlė eilute. Viena iš labiausiai žinomų yra Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, kai $\sigma>1$, užrašoma Dirichlė eilute bei turinti išraišką Oilerio sandauga

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Pirmieji funkcijos $\zeta(s)$ reikšmių pasiskirstymo tyrimo rezultatai 1930 m. gauti B. Jeseno ir A. Vintnerio. Buvo sprendžiama problema: kaip dažnai dzeta funkcijos reikšmės patenka į tam tikrą duotą aibę.

Tarkime, kad R yra kompleksinės plokštumos uždaras stačiakampis, kurio kraštinės yra lygiagrečios koordinatinėms ašims. *L(T,R)* pažymėkime aibės $\{t\in[0,T]:\log\zeta(\sigma+it)\in R\}$ Žordano matą.

A teorema ([2]). *Pusplokštumėje $\sigma>1$ egzistuoja riba*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{L(T,R)}{T}=W(R,\sigma),$$

kuri priklauso tik nuo σ ir R.

Šiuo metu Jeseno-Vintnerio rezultatai yra žymiai išplėsti ir pagerinti kokybiškai. Galima paminėti šiuos garsius matematikus: K. Macumoto, J. Štoidingą, P. D. T. A. Eliotą, A. Ivičių, H. Mišu ir kt. Lietuvoje dzeta funkcijų tyrimais užsiima A. Laurinčikas (1996) ir jo mokiniai.

Straipsnio tikslas – gauti Oilerio sandaugų $L(s)$ diskretų reikšmių pasiskirstymą kompleksinėje plokštumoje. Šią funkciją nagrinėjo E. Bombieri ir D. A. Hejhalas (1995). Priminsime Oilerio sandaugų apibrėžimą.

Oilerio sandaugos *L(s)* yra apibrėžiamos taip

$$L(s)=e^{i\psi}\prod_p\frac{1}{(1-\alpha_{1p}p^{-s})\dots(1-\alpha_{dp}p^{-s})};$$

čia: α_{jp} yra kompleksiniai skaičiai, $1\le j\le d, d\in\mathbb{N}, d\ge1, \psi\in\mathbb{R}$. Reikalaujama (Bombieri, Hejhalas, 1995), kad funkcija *L(s)* tenkintų šias hipotezes:

1. Kiekvienam fiksuotam $\theta\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$
$$|\alpha_{jp}|\le p^{\theta},\qquad j=1,\dots,d.$$
2. Kiekvienam fiksuotam $\varepsilon>0$ teisingas įvertis
$$\sum_{p\le x}\sum_{j=1}|\alpha_{jp}|^2=O(x^{1+\varepsilon}).$$
3. $L(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą $\mathbb{C}$ kaip baigtinės eilės meromorfinė funkcija su baigtiniu skaičiumi polių tiesėje $\sigma=1$. Oilerio sandaugos tenkina funkcinę lygtį
$$G(s)L(s)=\overline{G(\overline{1-s})}\cdot\overline{L(\overline{1-s})};$$
čia $G(s)=Q^s\prod_{h=1}^{m}\Gamma(\lambda_h s+\mu_h)$ su $Q>0$, $\lambda_h>0, \mathrm{Re}\mu_h\ge0$, o $\Gamma(m)$ yra gama funkcija. Funkcija $L(s)$ yra holomorfinė, išskyrus baigtinį skaičių polių tiesėje $\sigma=1$. Funkcinė lygtis normuojama taip, kad turėtų šaknį 1, o tai reiškia, kad $G(s)L(s)$ yra reali funkcija tiesėje $\sigma=\frac{1}{2}$. To reikia, nes Oilerio sandaugos apibrėžime yra daugiklis $e^{i\psi}$ (Bombieri, Hejhalas, 1995).
4. Oilerio sandaugos $L(s)$ gali būti išreikštos Dirichlė eilutėmis
$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s},$$
kai koeficientai $b(n)$ tenkina lygybę
$$\sum_{p\le x}\frac{b_n(p)\overline{b_k(p)}}{p}=\delta_{jk}\eta_j\log\log x+c_{jk}+B\left(\frac{1}{\log x}\right)$$
su tam tikromis teigiamomis konstantomis $n_1,\dots,n_N$ ir $x\ge2$.

Iš 1–3 hipotezių seka, kad pusplokštumėje $\sigma>\theta+\frac{1}{2}$ funkcija $L(s)$ tenkina šias augimo sąlygas:

$$L(\sigma+it)=O(|t|^2)$$

ir tam tikriems $\delta>0$

$$\int_0^T|L(\sigma+it)|^2dt=O(T),\quad T\to\infty.$$

Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo rezultatus patogu formuluoti taikant ribinių teoremų silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme terminologiją. $\mathfrak{B}(S)$ pažymėkime erdvės S Borelio aibių klasę ir tegul P_n bei P yra tikimybiniai matai $\big(S, \mathfrak{B}(S)\big)$ erdvėje. Tada sakome, kad P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$, jei

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP$$

kiekvienai realiai tolydžiai aprėžtai erdvės S funkcijai f.

$\mathfrak{B}(S)$ pažymėkime erdvės S Borelio aibių klasę. Tarkime, kad h yra fiksuotas teigiamas skaičius toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ būtų iracionalus su visais sveikaisiais $k \neq 0$. Kai $N \in \mathbb{N}$, pažymėkime

$$\mu_N(\ldots) = \frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N, \ldots\};$$

čia vietoje daugtaškio rašomos sąlygos, kurias tenkina k.

Kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$ vienetinį apskritimą pažymėkime γ, t. y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C}: |s| = 1\}$. Apibrėžkime begaliniamatį torą

$$\Omega = \prod_p \gamma_p;$$

čia $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba toras Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $\big(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega)\big)$ galima apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H, gaunant tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p. Tuomet formule

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha || m} \omega^\alpha(p)$$

funkciją $\omega(p)$ pratęsiame į natūraliųjų skaičių aibę $\mathbb{N}$; čia $p^\alpha || m$ žymi, kad $p^\alpha | m$, bet $p^{\alpha+1} \nmid m$.

4 hipotezė teigia, kad pusplokštumėje $\sigma > \theta + 1$ funkcija $L(s)$ gali būti išreikšta absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute.

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą $L(\sigma, \omega)$ formule

$$L(\sigma, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)\omega(k)}{m^{\sigma}} =$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{\alpha_{jp}\omega(p_m)}{p_m^\sigma}\right)^{-1}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Jo skirstinį pažymėkime P_L^h, t. y.

$$P_L^h(A) = m_H(\omega \in \Omega: L(\sigma, \omega) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

Tada teisingas toks teiginys.

Teorema. *Tarkime, kad Oilerio sandaugos $L(s)$ tenkina* 1–4 *hipotezes, o $h > 0$ yra fiksuotas skaičius toks, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *yra iracionalus su visais sveikaisiais $k \neq 0$ Tada pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$, kai $N \to \infty$, tikimybinis matas*

$$\frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N: L(\sigma + ikh) \in A\},$$

$A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$,

silpnai konverguoja į matą P_L^h

2. Teoremos įrodymas

Pateiksime teoremos įrodymo santrauką.

Tarkime, kad

$$p_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k k^{-it}, \quad a_m \in \mathbb{C}$$

yra trigonometrinis polinomas. Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_{N,p_n}(A) = \mu_N(p_n(mh) \in A), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

Tada įrodome, kad erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P_{p_n} toks, kad matas P_{N,p_n}, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į P_{p_n}.

Apibrėžkime

$$p_n(t, k) = \sum_{k=1}^{n} a_k g(k) k^{-it}$$

ir tikimybinį matą

$$\tilde{P}_{N,p_n}(A) = \mu_N(p_n(mh, g) \in A), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C});$$

čia $g(k)$, $k \in \mathbb{N}, |g(k)| = 1$ yra pilnai multiplikatyvi funkcija, t. y. $g(k_1, k_2) = g(k_1)g(k_2)$. Įrodome, kad tikimybiniai matai P_{N,p_n} ir $\tilde{P}_{N,p_n}$ abu silpnai konverguoja į tą patį matą, kai $N \to \infty$.

Dabar įrodome diskrečią ribinę teoremą absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms. Imkime $\sigma_1 > \frac{1}{2}$. Tegul

$$L_n(s) = e^{i\psi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}. \qquad (1)$$

Kadangi galioja 3 hipotezė, daugiklį $e^{i\psi}$ galime parinkti taip, kad $|e^{i\psi}|$=1. Todėl vietoje (1) eilutes nagrinėsime

$$L_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}.$$

Ši eilutė taip pat konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Apibrėžkime funkciją

$$l_n(s) = \frac{s}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right) \mathrm{n}^{\mathrm{s}}$$

ir

$$a_n(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{l_n(s) ds}{s m^s};$$

čia $\Gamma(\mathrm{s})$ yra Oilerio gama funkcija.

Tegul

$$L(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)\omega(m)}{m^s} \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\},$$

kur $\omega \in \Omega$.

Apibrėžkime du tikimybinius matus

$$P_{N,n}(A) = \mu_N(L_n(\sigma + imh) \in A), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$$

ir
$\tilde{P}_{N,n}(A) = \mu_N(L_n(\sigma + imh, \omega) \in A)$,
$A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$.
Tuomet įrodome, kad erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P_n toks, kad, kai $N \to \infty$, abu matai $P_{N,n}$ ir $\tilde{P}_{N,n}$ silpnai į jį konverguoja.

Funkciją $L_n(s)$ aproksimuosime pagal vidurkį, t. y. įrodome, kad pusplok tumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} |L(\sigma + ikh) - L_n(\sigma + ikh)| = 0.$$

Tegul $a_h = \{p^{-ih},\ p - \text{pirminis}\}$. Tore Ω apibrėžkime transformaciją $L_h(\omega)$ tokiu būdu: $L_h(\omega) = a_h\omega,\ \omega \in \Omega$.

Akivaizdu, kad L_h yra mati, matą i sauganti transformacija erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$. Taikydami ergodinę teoriją (Laurinčikas, 1996) įrodome, kad L_h yra ergodinė transformacija.

Tegul T yra mati, matą i sauganti ergodinė transformacija erdvėje $(\tilde{\Omega}, \mathrm{F}, \mathrm{m})$. H. L. Montgomery darbe įrodyta, kad kiekvienai funkcijai $f \in L^1(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{m})$ beveik visiems $\omega \in \tilde{\Omega}$ teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = \mathbb{E}(f);$$

čia $\mathbb{E}(f)$ yra atsitiktinio dydžio vidurkis.

Pažymėkime aibės Ω poaibį Ω_1 tokį, kad eilutė, kai $\omega \in \Omega_1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(k)\omega(k)}{k^{\sigma+it}}$$

konverguotų ir galiotų įvertis

$$\sum_{k=0}^{N} |L(\sigma + ikh, \omega)|^2 dt = O(N),$$

kai $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Tokiu atveju $m_H(\Omega_1) = 1$.

Galima įrodyti, kad pusplok tumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$, kai $\omega \in \Omega_1$,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} |L(\sigma + ikh, \omega) - L_n(\sigma + ikh, \omega)| = 0.$$

Dabar, kai $\omega \in \Omega_1$
$\tilde{P}_N(A) = \mu_N(L(\sigma + ikh, \omega) \in A),\ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$.

Įrodome, kad erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$, kai $N \to \infty$, abu matai P_N ir $\tilde{P}_N$ silpnai konverguoja į matą P_n. I čia seka, kad tikimybinių matų eima $\{P_n\}$ yra realityviai kompakti ka, o pagal Prochorovo teoremą ji yra ir tir ta (Billingsley, 1968).

Tegul aibė $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ yra mato P tolydumo aibė. Su visais $\omega \in \Omega_1$

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(L(s + ikh, \omega) \in A) = P(A). \quad (2)$$

Dabar fiksuokime aibę A, o tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime atsitiktinį dydį $\eta(\omega)$ formule

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } L(\sigma, \omega) \in A, \\ 0, & \text{kai } L(\sigma, \omega) \neq A. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad dydžio η vidurkis yra

$$\mathbb{E}(\eta) = \int_{\Omega} \eta dm_H = m(\omega: L(\sigma, \omega) \in A) = P_L(A). \quad (3)$$

Randame, kad

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \eta\left(L_h^k(\omega)\right) = \mathbb{E}\eta \quad (4)$$

beveik $\omega \in \Omega$. Dar daugiau: i η ir L_h apibrėžimų seka lygybė

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \eta\left(L_h^k(\omega)\right) = \mu_N(L(\sigma + ikh, \omega) \in A).$$

I pastarosios bei (3) – (4) lygybių randame, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(L(\sigma + ikh, \omega) \in A) = P_L(A).$$

Atsižvelgdami į (2) sąry į, gauname

$$P(A) = P_L(A)$$

kiekvienai mato P tolydumo aibei A. Todėl

$$P(A) = P_L(A)$$

visoms $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, nes tolydumo aibės sudaro apibrėžiančią klasę. Teorema įrodyta.

Literatūra

1. Billingsley P., 1968, *Convergence of Probability Measures* John Willey Sons, New York.
2. Bohr H., Jessen B., 1930, Über die Wertverteilung der Riemannshen Zeta-funktion, Erste Mitteilung. *Acta Math*. No. 58. P. 1–35.
3. Bombieri E., Hejhal D. A., 1995, On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products. *Duke Math J* Vol. 80. No. 3. P. 821–862.
4. Laurinčikas A., 1996, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function* Kluwer, Dordrecht.
5. Montgomery H. L., 1971, *Topics in Multiplicative Number Theory* Springer, Berlin.

D CR TE VALUE-D STR BUT ON OF EULER PRODUCTS ON THE COMPLEX PLANE

Eglė Kilčiauskienė, Roma Kačinskaitė

Summary

Let $s = \sigma + it$ be a complex number, and denote by $\mathbb{C}$ the sets of integers, and complex numbers, respectively. The paper aims at investigation of discrete value-distribution of Euler products given by the formula

$$L(s) = e^{i\psi} \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_{1p} p^{-s}) \dots (1 - \alpha_{dp} p^{-s})}$$

Furthermore, we suppose some additional conditions for the function $L(s)$. We prove discrete limit theorem in the sense of the weakly convergent probability measures on the complex plane $\mathbb{C}$ for the Euler products. The main statement of the paper is as follows.

Let $h > 0$ be a fixed real number such that $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ is an irrational number with $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, and the function $L(s)$ satisfies some additional hypotheses. Then, for $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$, $\theta \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$, the probability measure

$$\frac{1}{N+1} \# \{0 \le k \le N : L(\sigma + ikh) \in A\}, \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}),$$

weakly converges to the distribution of the random element of $L(s)$ as $N \to \infty$.

Keywords: Euler products, probability measure, value-distribution, weak convergence.

O LER O SANDAUGŲ D SKRETUS RE KŠM Ų PAS SK RSTYMAS KOMPLEKS NĖJE PLOKŠTUMOJE

Eglė Kilčiauskienė, Roma Kačinskaitė

Santrauka

Tarkime, kad $\mathbb{Z}$ yra sveikųjų skaičių, o $\mathbb{C}$ – kompleksinių skaičių aibės. Straipsnis skirtas diskrečiam Oilerio sandaugų $L(s)$ reikšmių pasiskirstymo kompleksinėje plokštumoje tyrimui. Funkcija $L(s)$ yra apibrėžiama formule

$$L(s) = e^{i\psi} \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_{1p} p^{-s}) \dots (1 - \alpha_{dp} p^{-s})}.$$

Taip pat reikalaujama, kad ji tenkintų papildomas sąlygas. Mes įrodome diskrečią ribinę teoremą tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$ Oilerio sandaugoms.

Pagrindinis straipsnio tvirtinimas: tegul $h > 0$ yra fiksuotas realus skaičius toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ būtų iracionalus su $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, o funkcija $L(s)$ tenkina tam tikras hipotezes. Tada, kai $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$, $\theta \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$, tikimybinis matas

$$\frac{1}{N+1} \# \{0 \le k \le N : L(\sigma + ikh) \in A\}, \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}),$$

silpnai konverguoja į $L(s)$ atsitiktinį elementą, kai $N \to \infty$.

Prasminiai žodžiai: Oilerio sandaugos, tikimybinis matas, reikšmių pasiskirstymas, silpnas konvergavimas.

Įteikta 2011-06-02